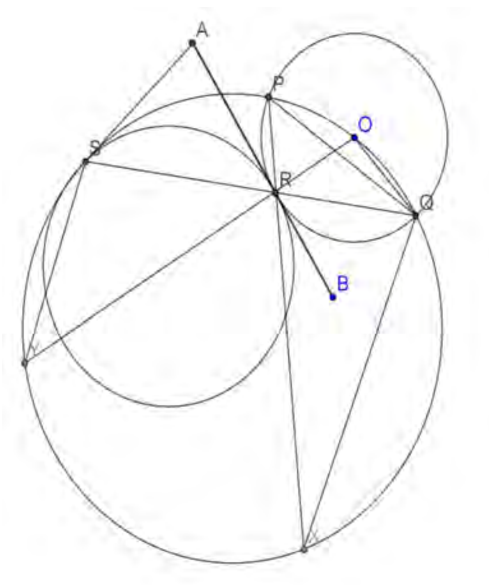
به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

۱. راه‌حل اول. برای اثبات موازی بودن QX و SY باید ثابت کنیم کمان های XY و SPQ روی دایره C_1 برابرند. برای این کار مماس بر دایره C_1 در نقطه S را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با مماس مشترک دایره های C_2 و C_3 در نقطه R را A می‌نامیم. حال با توجه به شکل روابط زیر برقرار است:



$$\widehat{ASQ} = \overparen{SPQ} = \overparen{SR}$$
$$\widehat{ASQ} = \widehat{ARS} = \widehat{BRQ} = \overparen{RQ}$$
$$\Rightarrow \overparen{SPQ} = \overparen{SR} = \overparen{RQ} \quad (۱)$$

هم‌چنین روابط زیر نیز برقرار است:

$$\frac{۱}{۲}\overparen{QX} \overset{(۲)}{=} \widehat{QPX} = \frac{۱}{۲}\overparen{RQ} = \frac{۱}{۲}\widehat{YOQ} = \frac{۱}{۴}\overparen{YXQ} = \frac{۱}{۴}(\overparen{QX} + \overparen{XY})$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}\overparen{QX} = \frac{۱}{۴}\overparen{XY} \Rightarrow \overparen{QX} = \overparen{XY} \quad (۳)$$
$$\overset{(۲),(۳)}{\Rightarrow} \overparen{QX} = \overparen{XY} = \overparen{RQ} \quad (۴)$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۴) داریم:

$$\overparen{SPQ} = \overparen{RQ} = \overparen{XY}$$

و حکم ثابت می‌شود.

نکته:

- قسمت (۳) که برابری $\widehat{XY}=\widehat{QX}$ را ثابت می‌کند به صورت های مختلفی قابل بیان است . به طور مثال می‌توان استدلال زیر را به کار برد:

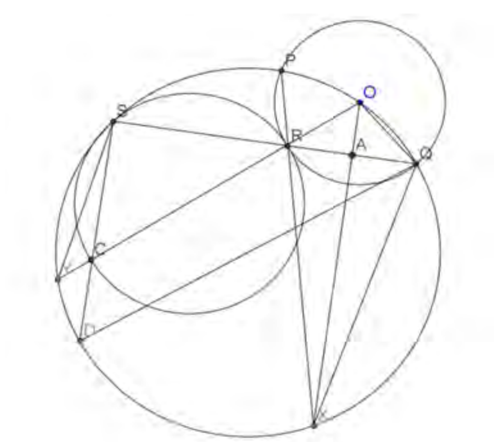
$$OP=OQ\Rightarrow \widehat{OP}=\widehat{OQ}\quad (I)$$

$$OP=OR\Rightarrow O\widehat{P}R=O\widehat{R}P\Rightarrow \frac{۱}{۲}(\widehat{OP}+\widehat{XY})=\frac{۱}{۲}(\widehat{OQ}+\widehat{XQ})\overset{(I)}{\Rightarrow}\widehat{XQ}=\widehat{XY}$$

- اثبات رابطه (۱) به وسیله بیان تجانس دایره‌های $C_۱$ و $C_۳$ و همین‌طور دایره‌های $C_۲$ و $C_۳$ نیز قابل بیان است.

راه‌حل دوم. داریم

$$OP=OQ\Rightarrow \widehat{OP}=\widehat{OQ}$$
$$OP=OR\Rightarrow O\widehat{P}R=O\widehat{R}P$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(\widehat{OP}+\widehat{XY})=\frac{۱}{۲}(\widehat{OQ}+\widehat{XQ})\Rightarrow\widehat{XQ}=\widehat{XY}$$
$$\Rightarrow R\widehat{O}X=Q\widehat{O}X\overset{OQ=OR}{\Rightarrow}O\widehat{A}R=۹۰\ (۱)$$



هم‌چنین چون $C_۲$ و $C_۳$ در نقطه R مماس هستند، OR از مرکز دایره $C_۳$ نیز عبور می‌کند. پس مرکز دایره $C_۳$ روی خط RC واقع است (C محل برخورد RY و دایره $C_۳$ است) در نتیجه $(۲)\quad C\widehat{S}R=۹۰$.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $(۳)\quad SD\parallel OX$.

هم‌چنین با توجه به این‌که S مرکز تجانس $C_۱$ و $C_۳$ است، پس DQ و YQ موازی هستند (Dمحل برخورد امتداد SC با دایره $C_۱$ است) .در نتیجه $\widehat{YD}=\widehat{OQ}$. پس $(۴)\quad Y\widehat{S}D=Q\widehat{X}O$

حال با توجه به (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که QX و SY نیز موازی‌اند و حکم ثابت می‌شود.

۲. آرایشی از اعداد ۱ تا n با خاصیت مطلوب را یک آرایش مجاز می‌نامیم. آرایش‌هایی را که با یک دوران به هم تبدیل می‌شوند یکی فرض می‌کنیم.

برای $n = ۳$ فقط دو آرایش مجاز و برای $n = ۴$ نیز فقط دو آرایش مجاز (اعداد به ترتیب ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) وجود دارد. حال با استقرا ثابت می‌کنیم که برای اعداد زوج بزرگ‌تر از ۳ دو آرایش و برای اعداد فرد بزرگ‌تر از ۳، چهار آرایش مجاز وجود دارد.

لم. در یک آرایش مجازِ ۱ تا n، مجموعِ دو عددِ مجاورِ n برابر با n است و اگر n را حذف کنیم به آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$ می‌رسیم. برعکس، اگر در آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$، عدد n را بین دو عدد که مجموعشان n است قرار دهیم، آرایشی مجاز برای ۱ تا n به دست می‌آید.

اثبات. اگر دو عدد مجاور n، a و b باشند، داریم

$$n \mid a + b \quad , \quad a + b \leq ۲n - ۳$$

پس:

$$a + b = n$$

حال اگر دو عدد مجاور a و b (به غیر از n) به ترتیب x و y باشند (یعنی حالت $x\ a\ n\ b\ y$):

$$a \mid x + n \Leftrightarrow a \mid x + a + b \Leftrightarrow a \mid x + b$$

$$b \mid y + n \Leftrightarrow b \mid y + a + b \Leftrightarrow b \mid y + a$$

پس با حذف n به آرایش مطلوبی از اعداد ۱،۲، ...،$n - ۱$ می‌رسیم و برعکس اگر در آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$، عدد n را بین دو عدد که مجموعشان n است قرار دهیم، آرایشی مجاز برای ۱ تا n به دست می‌آید.

حال فرض می‌کنیم حکم استقرا برای عدد زوج n درست باشد، سپس حکم را برای $n + ۱$ و $n + ۲$ ثابت می‌کنیم.

بنابر فرض استقرا، تنها دو آرایش مجاز برای ۱ تا n وجود دارد که عبارت‌اند از چینش اعداد ۱ تا n به طور ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد. حال باید $n+۱$ را بین دو عدد مجاور از این دو آرایش که مجموعشان $n+۱$ است، قرار دهیم. به راحتی معلوم می‌شود که این دو عدد فقط می‌توانند $\{۱, n\}$ یا $\{\frac{n}{۲}, \frac{n}{۲}+۱\}$ باشند. پس برای عدد فرد $n+۱$ چهار حالت صحیح وجود دارد که در دوتای آن اعداد به ترتیب دور دایره قرار گرفته‌اند (این دو حالت را حالات الف نام می‌گذاریم) و در دو حالت دیگر(که با حالات ب نام‌گذاری می‌کنیم) غیر از $n+۱$ بقیه اعداد به ترتیب قرار گرفته‌اند. حال می‌خواهیم جواب مساله را برای عدد زوج $n+۲$ بدست بیاوریم. باید عدد n+۲ را بین دو عدد مجاور از آرایش‌های مجاز اعداد ۱،۲،...، $n+۱$ قرار دهیم، که مجموع آن‌ها $n+۲$ باشد. به راحتی معلوم می‌شود که در آرایش‌های الف $n+۲$ فقط می‌تواند بین ۱ و $n+۱$ قرار گیرد. هم‌چنین به راحتی معلوم می‌شود که در آرایش‌های ب مجموع هیچ دو عدد مجاوری $n+۲$ نمی‌شود. بنابراین برای عدد زوج $n+۲$ نیزفقط دو آرایش مجاز وجود دارد. پس گام استقرا اثبات شد و اثبات کامل است.

- نکته: اگر تمامی مراحل اثبات درست گفته شده باشد ولی عدد $n+۱$ را بدون دلیل به آرایش‌های مجاز n عدد اضافه کند، اثبات اشتباه است و نمره‌ای نخواهد داشت.
- اگر آرایش‌هایی که با یک دوران به هم تبدیل می‌شوند یکی گرفته نشوند جواب‌های بالا در n ضرب می‌شوند و باز هم جواب مورد قبول است. همچنین اگر آرایش‌هایی که فقط جهت آن‌ها (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) با هم تفاوت دارد یکی گرفته شوند باز هم مورد قبول است.

راه‌حل دوم. حل مساله را با چند لم آغاز می‌کنیم:

لم. هیچ دو عدد زوجی در دایره کنار هم نیستند.

اثبات. واضح است اگر اعداد $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و ... و a_n به ترتیب دور دایره چیده‌شده باشند و $a_۱$ و $a_۲$ زوج باشند آن‌گاه $a_۳$ هم زوج است زیرا می دانیم $a_۲ \mid a_۳ + a_۱$ و با تکرار این روند همه‌ی اعداد زوج می‌شوند که تناقض است.

لم. اگر n زوج باشد اعداد دور دایره یکی در میان زوج هستند و اگر n فرد باشد تنها دو عدد فرد کنار هم هستند و بقیه‌ی جفت‌های کنار هم زوج و فرد هستند.

اثبات. طبق لم ۱ اگر n زوج باشد چون تعداد اعداد زوج و فرد برابر است و هیچ دو عدد زوجی کنار هم نیستند پس اعداد یکی در میان زوج و فرد هستند و اگر n فرد باشد چون تعداد اعداد فرد یکی بیشتر است پس تنها دو عدد فرد کنار هم هستند و بقیه‌ی زوج‌های کنار هم زوج و فرد هستند.

حال برای اعداد زوج ثابت می‌کنیم که تنها یک چینش متوالی (بدون در نظر گرفتن جهت و چرخش) وجود دارند. یعنی اعداد ۱ تا n به همین ترتیب دور دایره چیده شده‌اند.

اثبات.

عدد $n - ۱$ فرد است پس طبق لم ۲ اعدادِ مجاور آن زوج هستند. پس مجموع دو عدد مجاور باید مضرب زوجی از $n - ۱$ باشد پس باید مجموعِ آن‌ها برابر $۲n - ۲$ باشد (بیش‌تر از $۲n - ۲$ نمی‌تواند باشد چون بزرگ‌ترین اعدادِ باقی‌مانده n و $n - ۲$ هستند که مجموعشان $۲n - ۲$ است). پس قطعاً اعدادِ مجاور $n - ۱$ باید n و $n - ۲$ باشند. پس اعداد n و $n - ۱$ و $n - ۲$ به شکل متوالی قرار دارند. حال با استقرا نشان می‌دهیم همه‌ی اعداد به شکل متوالی قرار دارند.

فرض کنید اعداد n و $n - ۱$ و $\dots$ $n - k$ به طور متوالی قرار گرفته اند ($n - ۲ > k > ۲$) نشان می دهیم عدد بعدی $n - k - ۱$ است. فرض کنید عدد بعدی x باشد داریم $n - k \mid x + n - k + ۱$ که نشان می‌دهد $n - k \mid x + ۱$. حال چون x کم‌تر از $n - k$ است تنها عدد ممکن $n - k - ۱$ است که نشان می‌دهد عدد بعدی $n - k - ۱$ است که این روند متوالی بودن اعداد را اثبات می‌کند.

حال برای اعداد فرد $n > ۳$ ثابت می‌کنیم که تنها دو آرایش مجاز (بدون در نظر گرفتن جهت و چرخش) وجود دارند. یعنی اعداد حتماً باید به یکی از ترتیب‌های زیر باشند

$$۱, ۲, \dots, n$$

$$۱, ۲, \dots \frac{n-۱}{۲}, n, \frac{n+۱}{۲}, \frac{n+۳}{۲}, \dots, n-۱$$

لم. اگر n فرد باشد یکی از تنها دو عددِ فردِ متوالی عدد n است.

اثبات. مجموع اعداد مجاورِ n از $۲n$ کم‌تر است و چون باید مضربِ n باشد باید برابر n باشد ولی اگر اعداد مجاورِ n دو عددِ زوج باشند مجموع آن‌ها نمی‌تواند n شود چون n فرد است. پس یکی از دو عددِ فردِ متوالی عدد n است .

اگر $n = ۵$ حکم به راحتی اثبات می‌شود پس فرض می کنیم $n > ۵$.

حال به ادامه‌ی اثبات می پردازیم:

عدد $n - ۲$ فرد است پس طبق لم ۲ و لم ۳ هر دو عدد مجاورِ آن یا زوج هستند یا یکی از اعداد مجاور آن n است. اگر n مجاور $n - ۲$ باشد مجاورِ دیگرِ $n - ۲$ فقط می‌تواند $n - ۴$ باشد چون مجموع مجاورهای $n - ۲$ باید بر $n - ۲$ بخش‌پذیر باشد و این مجموع حداکثر می‌تواند $۲n - ۱$ باشد که چون $n > ۵$، $۳n - ۶ > ۲n - ۱$ پس باید $۲n - ۴$ باشد. پس n و $n - ۲$ و $n - ۴$ مجاور هستند ولی طبق لم ۲ امکان ندارد ۳ عدد فرد کنار هم باشند. پس مجاورهای $n - ۲$ دو عددِ زوج هستند. حال مانندِ اثبات برای اعداد زوج مجموعِ دو عددِ مجاور باید مضرب زوجی از $n - ۲$ باشد پس قطعاً باید برابر $۲n - ۴$ باشد (بیشتر از $۲n - ۴$ نمی‌تواند باشد چون بزرگ‌ترین اعدادِ باقی مانده n و $n - ۱$ هستند که مجموعشان $۲n - ۱$ است که کمتر از $۳n - ۶$ است). پس اعدادِ مجاور $n - ۲$ باید $n - ۱$ و $n - ۳$ باشند.

تا اینجا دیدیم که $n - ۱$ و $n - ۲$ و $n - ۳$ متوالی هستند. حال اگر x مجاور $n - ۱$ باشد داریم $n - ۱ \mid x + n - ۲$ پس دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: $x = n$.

در این حالت مشابه اثبات اعداد زوج می‌توان نتیجه گرفت اعداد متوالی و به صورت ۱، ۲، ...، n هستند.

حالت دوم: $x = ۱$

فرض کنید k بزرگ‌ترین عددی است که اعداد $n - ۱$و $n - ۲$ و ... و $n - k$ به طور متوالی قرار گرفته‌اند ($n - ۱ > k > ۲$). نشان می‌دهیم $k = \frac{n - ۱}{۲}$و عدد بعدیِ آن n است.

عدد بعدی را y بنامید. داریم$n - k \mid y + n - k + ۱$ که نشان می‌دهد $n - k \mid y + ۱$. از طرفی بنابر نحوه‌ی انتخابِ k، y با $n - k - ۱$ برابر نیست و چون $n - k < y + ۱$ پس $y = n$. حال اگر عدد دیگر مجاور n را z بگیریم داریم $n \mid z + (n - k)$. ادعا می‌کنیم $n - k \geq \frac{n + ۱}{۲}$. زیرا در غیر

این صورت z و $n-k$هر دو کمتر از $\frac{n}{۲}$ خواهند بود که با $n \mid z+(n-k)$ در تناقض است. پس $\frac{n+۱}{۲} \geq n-k$ و چون $n-k \mid n+۱$ پس $k = \frac{n-۱}{۲}$. حال چون مجموع اعدادِ مجاور n همان n است روشن است که عدد دیگر مجاور n باید $\frac{n-۱}{۲}$ باشد.

حال به طرز مشابه می‌توان ثابت کرد اعداد ۱ و ۲ و ... و $\frac{n-۳}{۲}$ و $\frac{n-۱}{۲}$ متوالی می‌آیند پس آرایشِ مورد نظر $۱,۲,\ldots\frac{n-۱}{۲},n,\frac{n+۱}{۲},\frac{n+۳}{۲},\ldots,n-۱$ است.

- نکته: اثبات حتی درست نحوه ی زوج و فرد قرار گرفتن نمره ای ندارد.

۳. راه‌حل اول. فرض کنید $t+۱=q^{\alpha}s$ که q عددی اول است و $(s,q)=۱$. (در واقع α بزرگترین توانی از q است که $t+۱$ را می شمارد)

حال $x_۰$ را طوری انتخاب کنید که $x_۰\equiv ۱$ (به پیمانه‌ی $q^{\alpha+۱}$) و $x_۰>t$. قرار دهید $n=x_۰^{\alpha}$. ادعا می کنیم این n جواب مسئله است.

توجه کنید برای هر i،

$n^i+t\equiv ۱+t\not\equiv ۰$ (به پیمانه ی $q^{\alpha+۱}$) ولی $n^i+t\equiv ۱+t\equiv ۰$ (به پیمانه ی q^{α})

فرض کنید به ازای i ای n^i+t توان کامل شود. (فرض خلف) در نتیجه r ای وجود دارد که $r>۱$ و

$n^i+t=y^r$ و چون نمای عدد اول q در تجزیه ی n^i+t به عوامل اول برابر با α است، α بر

r بخش‌پذیر است. در نتیجه $\alpha\geq ۲$ و $y^r=n^i+t=(x_۰^{i(\frac{\alpha}{r})})^r+t=z^r+t$. از همین تساوی نتیجه می‌شود که $y>z$.

حال توجه کنید،

$$z^r+t<z^r+x_۰\leq z^r+z\leq\left(z+۱\right)^r\leq y^r=z^r+t$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و این n کار می کند.

توجه کنید در اثبات نابرابری سوم از بسط دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن،

$$(z+۱)^r=z^r+rz^{r-۱}+\frac{r(r-۱)}{۲}z^{r-۲}+\ldots+rz+۱\geq z^r+z$$

(نابرابری بالا برای $r\geq ۲$ درست است)

راه‌حل دوم. دو حالت در نظر بگیرید.

یک) $t+۱$ توان کامل نباشد. قرار دهید $n=t(t+۱)^۲+۱$. ادعا می کنیم این n کار می‌کند. فرض کنید برای k ای n^k+t توان کامل شود. در نتیجه با تعریف $y=t(t+۱)^۲$،

$$(t\left(t+۱\right)^۲+۱)^k+t=y^k+ky^{k-۱}+\ldots+ky+t+۱=(t+۱)(b\left(t+۱\right)+۱)$$

(به ازای b مناسبی)

به وضوح $t+۱$ و $b\left(t+۱\right)+۱$ نسبت به هم اول‌اند و ضربشان توان کامل است. پس بایستی هریک توان کامل باشند که خلاف فرض اولیه ما است.

دو) $t+۱$ توان کامل باشد. قرار دهید $t+۱=m^r$ که m توان کامل نیست. (برای این کار r را بیش‌ترین توان ممکن انتخاب کنید) قرار دهید $n_۰=t(t+۱)^۲+۱$ و $n=n_۰^r$. همین n جواب مسئله است.

فرض کنید به ازای k,c,d ای $n^k+t=c^d$. مشابه روش کار در حالت (یک) نتیجه می‌گیریم $t+۱$ توان d ام کامل است. پس با توجه به این که $t+۱$ توان r ام کامل نیز هست و r بیش‌ترین نمای ممکن است، r بر d بخش‌پذیر است. پس $r=ld$ و

$$t=c^d-n^k=c^d-n_۰^{kld}=$$
$$\left(c-n_۰\right)\left(c^{d-۱}+c^{d-۲}n_۰^{kl}+\ldots+n_۰^{kl\left(d-۱\right)}\right)\geq n_۰>t$$

که تناقض است.

مواردی که اثبات آن ها نمره ای در بر ندارد:

- اثبات برای حالت خاص $t=۴k+۱$ یا $t=۸k+۳$ و از این قبیل.
- اثبات برای حالت خاصی که $t+۱$ عامل اولی مانند p داشته باشد که $t+۱$ بر $p^۲$ بخش پذیر نباشد.

اشتباهات رایج:

- اثبات این‌که n ای وجود دارد که برای هر i ای، n^i+t توان i ام کامل نیست. در حالی که باید ثابت می‌شد n^i+t توان j ام کامل نیست حتی برای $i\neq j$.
- معرفیِ n بدون اثبات این‌که نسبت به t اول است.

۴. راه‌حل الف) با استفاده از برهان خلف نشان می دهیم چنین زیر مجموعه‌هایی یافت نمی‌شود.
فرض کنید این‌طور نباشد و بتوان اعداد طبیعی را به زیرمجموعه های دو عضوی $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... افراز کرد طوری که حاصل جمع اعضای A_i برابر $۱۳۹۱ + i$ باشد. اگر $A_i = \{a_i, b_i\}$ باشد آنگاه چون a_i و b_i اعداد طبیعی‌اند و $a_i + b_i = ۱۳۹۱ + i$ پس $a_i, b_i < ۱۳۹۱ + i$. داریم:

$$i \leq ۱۳۹۱ \rightarrow a_i, b_i < ۱۳۹۱ + i \leq ۱۳۹۱ + ۱۳۹۱ = ۲ \times ۱۳۹۱$$

پس همه ی اعضای $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... ، $A_{۱۳۹۱}$ از ۲×۱۳۹۱ کمتر هستند، یعنی حداکثر $۲ \times ۱۳۹۱ - ۱$ عدد را می‌توان در این ۱۳۹۱ مجموعه قرار داد که با فرض اولیه مبنی بر افراز به مجموعه‌های دوعضوی، که در نتیجه‌ی آن ۲×۱۳۹۱ عدد در این ۱۳۹۱ مجموعه قرار می‌گیرد، تناقض دارد. این تناقض نشان می‌دهد فرض اولیه نادرست بوده و اعداد طبیعی را نمی‌توان به زیرمجموعه‌های دوعضوی با شرایط خواسته‌شده‌ی مسئله افراز کرد.

ب) با ارائه‌ی روشی برای ساخت این مجموعه‌ها نشان می‌دهیم جواب مثبت است.

روش به این صورت است که در مرحله‌ی i-ام، a_i، کوچک‌ترین عددی که تا به حال در هیچ مجموعه‌ای قرار نگرفته و $b_i = ۱۳۹۱ + i^۲ - a_i$ را در مجموعه‌ی A_i قرار می‌دهیم. در مراحل زیر نشان می‌دهیم مجموعه‌های حاصل شرایط مسئله را داراست.

آ. همه ی اعداد طبیعی در حداقل یکی از این مجموعه‌ها قرار می گیرد، در غیر این صورت، فرض کنید a کوچک‌ترین عددی باشد که در هیچ مجموعه‌ای نیامده و در مرحله‌ی i-ام همه‌ی اعداد کوچک‌تر از a انتخاب شده باشند، در این صورت طبق روش فوق در مرحله i عدد a انتخاب می‌شود. پس فرض اولیه نادرست بوده و همه‌ی اعداد طبیعی در این مجموعه‌ها پوشانده می‌شوند.

بـ. در مراحل زیر ثابت می‌کنیم هیچ عددی در بیش از یک مجموعه نیامده و بدین ترتیب ثابت می‌شود خروجیِ این روش افرازی است که مورد نظر سوال است.

لم. $a_i \leq ۲i - ۱$.
اثبات. تا پیش از مرحله ی i-ام، $۲i - ۲$ عدد در مجموعه ها قرار گرفته‌اند، پس دست کم یکی از اعداد کمتر یا مساوی $۲i - ۱$ انتخاب نشده است در نتیجه $a_i \leq ۲i - ۱$.

۱. با توجه به اینکه در هر مرحله a_i کوچک‌ترین عددی است که تا به حال در هیچ مجموعه‌ای نیامده پس a_i با هیچ‌کدام از $۲i-۲$ عدد قبلی برابر نیست و هم‌چنین $a_i > a_j$ که $j < i$ باشد.

$$b_i = ۱۳۹۱ + i^۲ - a_i \geq ۱۳۹۱ + (i-۱)^۲ > ۲i - ۱ \geq a_i$$

۲. اگر $i > j$ آنگاه:

$$b_i = ۱۳۹۱ + i^۲ - a_i \geq ۱۳۹۱ + i^۲ - ۲i + ۱ = ۱۳۹۱ + (i-۱)^۲ > b_j > a_j$$

بدین ترتیب ثابت شده است که هیچ دو عدد در یک مجموعه یا در مجموعه‌های متفاوت با یکدیگر برابر نیستند در نتیجه هر مجموعه دقیقا دو عضوی است و هیچ عددی در بیش از یک مجموعه نیامده است.

۵. راه‌حل اول. ابتدا فرض کنید $Q(b,d) = P(۰,b,۰,d)$ در این صورت $Q(b,d) \geq ۰$ اگر و تنها اگر چندجمله ای $x^۴ + bx^۲ + d$ دارای چهار ریشه‌ی حقیقی باشد و این مورد هم برقرار است اگر و تنها اگر $x^۲ + bx + d$ دارای دو ریشه حقیقی نامنفی باشد

(چرا که

$$x^۲ + bx + d = (x-\alpha)(x-\beta) \Rightarrow x^۴ + bx^۲ + d = (x^۲-\alpha)(x^۲-\beta)$$

و $x^۲ - \alpha$ به عوامل خطی تجزیه می شود اگر و تنها اگر $\alpha \geq ۰$) حال ثابت می کنیم $x^۲ + bx + d$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی نامنفی است اگر وتنها اگر $d \geq ۰, b \leq ۰, b^۲ - ۴d \geq ۰$.

فرض کنید $\alpha, \beta \geq ۰$ ریشه های $x^۲ + bx + d$ باشند در این صورت:

$$x^۲ + bx + d = (x-\alpha)(x-\beta) = x^۲ - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

و بنابراین $b = -(\alpha+\beta) \leq ۰, d = \alpha\beta \geq ۰$ و چون چندجمله دارای ریشه بود پس $b^۲ - ۴d \geq ۰$.

حال بر عکس فرض کنید $d \geq ۰, b \leq ۰, b^۲ - ۴d \geq ۰$ بنابراین $x^۲ + bx + d$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است فرض کنید این ریشه ها α, β باشند در این صورت مانند قبل $b = -(\alpha+\beta), d = \alpha\beta$ حال $d \geq ۰$ بنابراین α, β دارای علامت مخالف نیستند، بنابراین اگر $\alpha < ۰$ آن‌گاه $\beta \leq ۰$ و در نتیجه $b = -(\alpha+\beta) > ۰$ که خلاف فرض ماست پس داریم $\alpha, \beta \geq ۰$ وآن‌چه می‌خواستیم ثابت شد.

حال داریم

$$Q(b,d)\geq ۰ \Leftrightarrow b^{۲}-۴d\geq ۰, b\leq ۰, d\geq ۰ \quad (۱)$$

حال برای هر $b<۰$ چندجمله‌ای تک متغیره‌ی $Q_b(y)$ که $Q_b(y)=Q(b,y)$ برای $۰\leq y\leq \frac{b^{۲}}{۴}$ نامنفی و برای $y<۰$ منفی است و چون هر چندجمله‌ای تابعی پیوسته است پس $Q_b(۰)=۰$ پس چندجمله‌ای $L(b)=Q(b,۰)$ برای هر $b<۰$ برابر صفر شده است و این یعنی این چندجمله‌ای دارای بی نهایت ریشه است و بنابراین همه جا صفر است و این یعنی $L(۱)=Q(۱,۰)=۰$ بنابراین طبق (۱) باید داشته باشیم $۱\leq ۰$ پس به تناقض رسیدیم پس حکم مسأله ثابت شد.

راه‌حل دوم. چندجمله‌ای های به شکل $(x^{۲}+sx+t)(x^{۲}+ux+v)$ را در نظر بگیرید. این چندجمله‌ای دارای چهار ریشه‌ی حقیقی است اگر و تنها اگر هر یک از $x^{۲}+sx+t$ و $x^{۲}+ux+v$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشند و این اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $s^{۲}-۴t\geq ۰, u^{۲}-۴v\geq ۰$.

توجه کنید که

$$(x^{۲}+sx+t)(x^{۲}+ux+v)=x^{۴}+(s+u)x^{۳}+(t+su+v)x^{۲}+(sv+tu)x+tv$$

پس اگر $P(a,b,c,d)$ چند جمله‌ای با خاصیت گفته شده در فرض موجود باشد داریم:

$$P(s+u,t+su+v,sv+tu,tv)\geq ۰ \Leftrightarrow s^{۲}-۴t\geq ۰, u^{۲}-۴v\geq ۰$$

پس اگر $Q(s,t,u,v)=P(s+u,t+su+v,sv+tu,tv)$ آن‌گاه

$$Q(s,t,u,v)\geq ۰ \Leftrightarrow s^{۲}-۴t\geq ۰, u^{۲}-۴v\geq ۰ \quad (۱)$$

حال شبیه راه‌حل قبل عمل می‌کنیم:

اگر $m^{۲}-۴n\geq ۰$ در این صورت چندجمله‌ای تک متغیره $Q_{m,n,k}(x)=Q(m,n,k,x)$ برای $x\leq \frac{k^{۲}}{۴}$ نامنفی و برای $x>\frac{k^{۲}}{۴}$ منفی است و بنابراین مثل راه‌حل قبل داریم

$Q_{m,n,k}(\frac{k^۲}{۴}) = Q(m, n, k, \frac{k^۲}{۴}) = ۰$. حال اگر $m \neq ۰$ چندجمله‌ای $P_{m,k}(y) = Q(m, y, k, \frac{k^۲}{۴})$ برای هر $y \leq \frac{m^۲}{۴}$ برابر صفر شده است و بنابراین بی نهایت ریشه دارد، پس برای هر y حقیقی $Q(m, y, k, \frac{k^۲}{۴}) = ۰$ پس به طور مثال باید $Q(۱, ۱, ۰, ۰) = ۰$ پس طبق (۱) باید $۰ \geq ۴ - ۱^۲ = -۳$ که این ما را به تناقض می‌رساند و حکم مسأله ثابت می‌شود.

راه‌حل سوم. رض کنید α, β, δ اعدادی حقیقی باشند در این صورت چندجمله‌ای $(x - \alpha)(x - \beta)((x - \delta)^۲ + \varepsilon)$ برای هر $\varepsilon \neq ۰$ دارای چهار ریشه حقیقی نیست اما برای $\varepsilon = ۰$ دارای چهار ریشه‌ی حقیقی است پس اگر

$$x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx + d = (x - \alpha)(x - \beta)((x - \delta)^۲ + \varepsilon)$$

آن‌گاه $P(a, b, c, d) < ۰$ اگر $\varepsilon \neq ۰$ و $P(a, b, c, d) \geq ۰$ اگر پس $\varepsilon = ۰$ پس مانند قبل نتیجه می‌گیریم که اگر $x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ دارای چهار ریشه‌ی حقیقی باشد و یک ریشه‌ی مضاعف در این صورت $P(a, b, c, d) = ۰$ حال راه‌حل را مانند راه‌حل قبلی می‌توانیم به اتمام برسانیم.

- توجه کنید که در واقع در راه‌حل قبل هم با اثبات $Q(m, n, k, \frac{k^۲}{۴}) = ۰$ برای $m^۲ - ۴n \geq ۰$ دقیقا همان حکم بالا را ثابت کرده بودیم.

۶. راه‌حل اول. ثلث BDT متساوی‌الساقین به رأس B است. بنابراین داریم $B\hat{D}T = \frac{۱}{۲}\hat{B}$. به‌طور مشابه $C\hat{D}S = \frac{۱}{۲}\hat{C}$. بنابراین

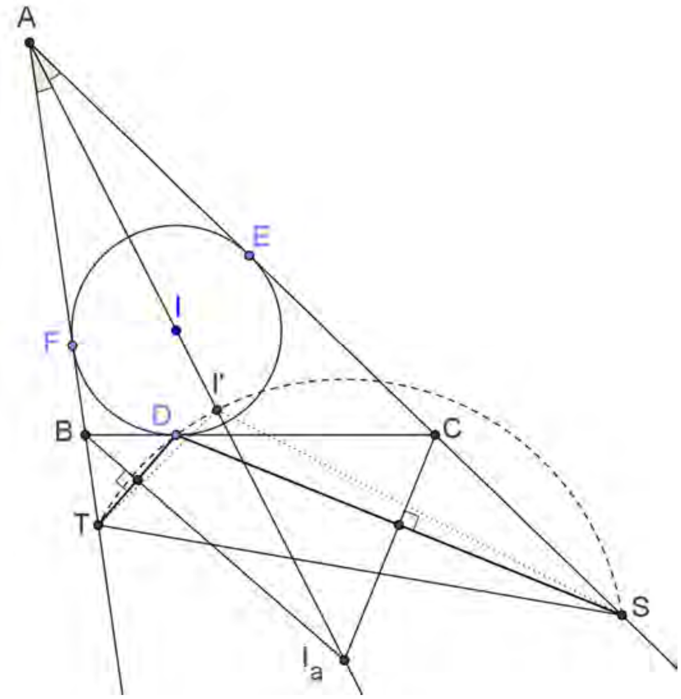
$$T\hat{D}S = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}\hat{B} - \frac{۱}{۲}\hat{C} = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\hat{A}.$$

اگر مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABC و ATS را به‌ترتیب I و I' بنامیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & I'TS = \frac{۱}{۲}\hat{T}, \quad I'\hat{S}T = \frac{۱}{۲}\hat{S} \\ & \Rightarrow T\hat{I'}S = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}\hat{T} - \frac{۱}{۲}\hat{S} = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\hat{A}. \end{aligned}$$

بنابراین $T\hat{D}S = T\hat{I'}S$ و چون I' و D هردو یک طرف خط TS هستند، چهارضلعی $TDI'S$ محاطی است. مرکز دایره‌ی محیطی این چهارضلعی همان محل برخورد عمودمنصف‌های TD و SD است که همان نیم‌سازهای خارجی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ از مثلث ABC هستند. پس مرکز این دایره همان مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC متناظر با رأس A است که آن را I_a می‌نامیم.

اگر دایره‌ی به مرکز I_a و شعاع I_aD را ω بنامیم، I' همان تقاطع ω با خط AI_a است. هم‌چنین I_a و D در دو طرف TS قرار دارند (چون $T\hat{D}S > ۹۰^\circ$ و I_a مرکز دایره‌ی محیطی مثلث TDS است) در حالی که I'، D و I در یک طرف TS قرار دارند. پس I' روی نیم‌خط I_aI است که خط‌المرکزین دایره‌ی محاطی و ω است. پس برای اثبات این‌که I' داخل یا روی دایره‌ی محاطی است، کافی است ثابت کنیم $I_aI - r \le I_aI' \le I_aI + r$ که در آن r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است. اما $r = I_aD$ و $I_aI' = I_aD$. پس نامساوی‌های فوق تبدیل می‌شوند به $I_aI - ID \le I_aD \le I_aI + ID$ که همان نامساوی مثلث در مثلث I_aID است و حکم ثابت می‌شود.



راه‌حل دوم. فرض کنید E' نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ATS با ضلع AS باشد. با توجه به این که زاویه‌ی II' با ضلع AC برابر با $\frac{A}{۲}$ است، خواهیم داشت $EE' = II'\cos(\frac{A}{۲})$. پس کافی است ثابت کنیم $EE' \leq r\cos(\frac{A}{۲})$. می‌دانیم

$$\begin{aligned} AE &= \frac{۱}{۲}(AB + AC - BC), \\ AE' &= \frac{۱}{۲}(AT + AS - TS) = \frac{۱}{۲}\big((AB + BD) + (AC + CD) - TS\big). \end{aligned}$$

توجه کنید که $AE' > AE$، زیرا دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC کاملاً داخل مثلث ATS است و بنابراین شعاع دایره‌ی محاطی داخلی ATS بیشتر از r است. بنابراین $EE' = BC - \frac{۱}{۲}TS$. پس کافی‌است ثابت کنیم $BC - \frac{۱}{۲}TS \leq r\cos\frac{A}{۲}$. اما اگر M را تقاطع EF با AI بگیریم، داریم

$$r\cos\frac{A}{۲} = IE\sin M\hat{I}E = EM = \frac{۱}{۲}EF.$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $۲BC - TS \leq EF$. داریم $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS} = ۲\overrightarrow{BC}$ زیرا

$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS} = (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) + (\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CS})$$

و $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CS} = ۰$. بنابراین

$$۲BC = \left|۲\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS}\right| \leq \left|\overrightarrow{FE}\right| + \left|\overrightarrow{TS}\right| = FE + TS$$

و حکم ثابت می‌شود.

نکاتی که نوشتن آن‌ها نمره ندارد:

- حل مسئله در حالتی که $AB = AC$.
- تنها دو فرمول $AE = p - a$ و $AE' = p' - TS$.
- معادل کردن حکم مسئله با یک نامساوی بر حسب شعاع دایره‌ی محاطی مثلث ATS.
- $BI \parallel TD$ و $CI \parallel SD$.
- $F\hat{D}T = E\hat{D}S = ۹۰^\circ$.
- اثبات این که I' داخل مثلث TDS نیست.
- نوشتن فرمولی برای AI و AI' بر حسب اضلاع و TS و $\cos\frac{۱}{۲}\hat{A}$ و انجام کارهای مقدماتی روی این فرمول‌ها (از جمله جایگذاری کردن TS با مقدار آن با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها).