به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۱

۱- پاسخ : ۵ ؛ توجه کنید که در یک خانواده‌ی n نفری، n نفر زندگی می‌کنند! پس پاسخ سؤال این‌گونه محاسبه می‌شود:

$$\frac{2\times ۱۰}{۲\times ۱۰+۳\times ۳۰+۴\times ۳۰+۵\times ۱۰+۶\times ۲۰}=\frac{۲۰}{۴۰۰}=\%۵$$

۲- پاسخ : ۴ ؛ $(a+۱)(b+۱)=ab \Rightarrow ab+a+b+۱=ab \Rightarrow a=-(b+۱)$ پس اکنون داریم که

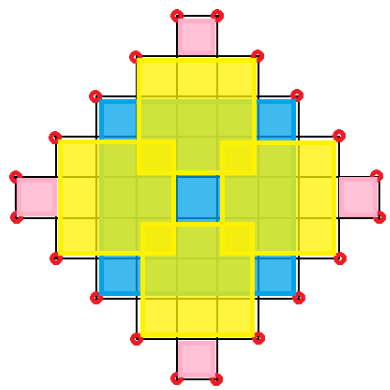
$$\frac{a^{۲}}{b}=\frac{(b+۱)^{۲}}{b}=۲+b+\frac{۱}{b}$$

و با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم: $۲+b+\frac{۱}{b}\geq ۲+۲\sqrt{b\times\frac{۱}{b}}=۴$ و این مقدار با قرار دادن $a=-۲$ و $b=۱$ به دست می‌آید.

۳- پاسخ : ۲ ؛ توجه کنید که عدد ۳ تنها می‌تواند کنار عدد ۱ قرار گیرد. عدد ۱ تنها می‌تواند کنار اعداد ۳ و ۲ قرار گیرد. عدد ۲ تنها می‌تواند کنار عددهای ۴و ۱ قرار گیرد و عدد ۴ تنها می‌تواند کنار عدد ۲ قرار گیرد. با این توضیحات اعداد ۳ و ۴ نمی‌توانند به عنوان رقم دوم یا سوم قرار گیرند، پس یکی از آن‌ها در جای‌گاه اول و دیگری در جای‌گاه چهارم است. اکنون با اندکی بررسی می‌فهمیم که در کل دو عدد خوب داریم: ۳۱۲۴ و ۴۲۱۳.

۴- پاسخ : ۵ ؛ عمود وارد از نقاط A و B بر خط CD را به ترتیب X و Y می‌نامیم. از آن‌جایی که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است، پس CY و DX برابر ۱ هستند. پس CD برابر ۱ + ۴ + ۱ = ۶ است. طبق قضیه‌ی تالس می‌دانیم $\frac{AB}{CD}=\frac{BE}{DE}$ پس مقدار خواسته‌شده برابر $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}$ است.

۵- پاسخ : ۹ ؛ گوشه‌های تیز شکل(نقاط قرمز) را در نظر بگیرید. تعداد این گوشه‌ها ۲۰ تا است و پس از پوشانده شدن شکل، این گوشه‌ها، توسط رئوس مهرها پوشانده می‌شوند. توجه کنید که به جز مهر مربعی ۵×۵ که می‌تواند ۴ تا گوشه را بپوشاند، دیگر مهرها حداکثر می‌توانند ۲ گوشه را بپوشانند. همچنین استفاده‌ی بیش از یک بار مهر ۵×۵ موجب رنگی شدن خانه‌ی جدیدی نمی‌گردد(چون تنها یک راه برای قرار دادن یک مهر ۵×۵ در جدول داریم). پس اگر n بار از مهرها استفاده کنیم تعداد گوشه‌های پوشانده شده از $۴ + ۲(n - ۱)$ بیشتر نیست. این مقدار باید حداقل ۲۰ باشد، پس n حداقل ۹ است. در شکل می‌بینیم که ۹ مهر برای این کار کافی نیز هست.



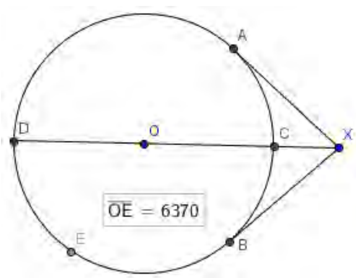
۶- پاسخ : ۴ ؛ توجه کنید که $y \neq -۱$ زیرا در غیر این صورت با توجه به عبارت دوم نتیجه می‌گیریم که $۱۱ = -۱$. اکنون با استفاده از عبارت دوم، داریم که: $\left(x+۱\right)\left(y+۱\right) = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{y+۱} - ۱ = \frac{۱۱-y}{y+۱}$ با جای‌گذاری x در عبارت اول داریم :

$$\left(\frac{۱۱-y}{y+۱}\right)^{۲} y + \frac{۱۱-y}{y+۱} y^{۲} = ۳۰ \Rightarrow \frac{۱۱-y}{y+۱} y \left(\frac{۱۱-y}{y+۱} + y\right) = ۳۰ \Rightarrow \left(\frac{۱۱-y}{y+۱}\right) y \left(\frac{۱۱+y^{۲}}{y+۱}\right) = ۳۰$$

$$\Rightarrow \left(۱۱-y\right)\left(۱۱+y^{۲}\right) y = ۳۰\left(y+۱\right)^{۲} \Rightarrow ۱۲۱y - ۱۱y^{۲} + ۱۱y^{۳} - y^{۴} = ۳۰y^{۲} + ۶۰y + ۳۰$$

$$\Rightarrow y^{۴} - ۱۱y^{۳} + ۴۱y^{۲} - ۶۱y + ۳۰ = ۰$$

ریشه‌های چندجمله‌ای به دست آمده برابر ۱، ۲، ۳ و ۵ است. پس ۴ جواب داریم.



۷- پاسخ : 1824 ؛ می‌توان صورت سؤال را مانند شکل زیر تفسیر کرد. پس از صورت سؤال داریم که : $XC = ۲۵۶ , OC = OD = ۶۳۷۰$ و سؤال از ما طول XA را می‌خواهد. طبق رابطه‌ی قوت نقطه‌ی X داریم:

$XA^۲ = XC.XD = ۲۵۶ \times \left(۲ \times ۶۳۷۰ + ۲۵۶\right)$ پس $XA = ۱۸۲۴$.

۸- پاسخ : ۲ ؛ اگر یکی از a یا b یا c یا d برابر یک باشد، تمام اعداد یک هستند و این خود یک جواب برای مسئله است. اکنون به دنبال دیگر جواب‌ها هستیم پس فرض می‌کنیم این اعداد همگی بزرگ‌تر مساوی ۲ اند. از ضرب سه رابطه داریم: $a^b b^c c^d d^a = a^۲ b^۲ c^۲ d^۲$ ولی چون فرض کردیم همه‌ی چهار عدد مسئله بزرگ‌تر مساوی ۲ هستند خواهیم داشت: $a^b b^c c^d d^a \geq a^۲ b^۲ c^۲ d^۲$. پس اکنون حالت تساوی رخ داده‌است و در نتیجه تمام اعداد ۲ هستند. این نیز یک جواب درست است. پس در کل ۲ جواب داریم.

۹- پاسخ : ۹۶۰ ؛ از خانه‌های سطر بالایی شروع می‌کنیم و روی هر خانه تعداد راه‌های رسیدن به خانه‌ی E را با شروع حرکت از آن خانه می‌نویسیم. همین کار را برای سطرهای پایینی هم انجام می‌دهیم. اگر برای خانه‌ی X، خانه‌هایی از سطر بالایی را در نظر بگیریم که می‌توان از X به آن‌ها رفت، طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن از X به E(با شروع حرکت از خود خانه‌ی X) برابر مجموع تعداد راه‌های رسیدن از خانه‌های بالایی آن خانه به E است. پس شکل زیر به دست می‌آید و جواب ۹۶۰ است.

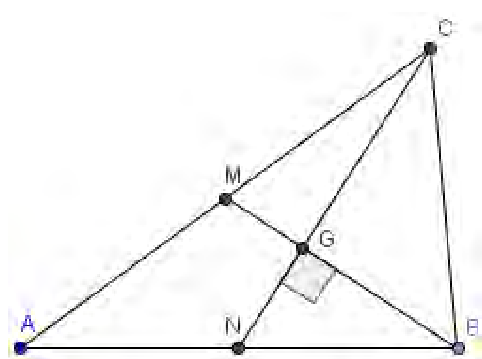
	E:۱	۱	۱	
	۳	۳	۳	۳
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۴۸	۴۸	۴۸	۴۸	
۹۶	۹۶		۴۸	۴۸
۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	
S:۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰

۱۰- پاسخ : ۳۷ ؛ فرض کنید که $a_۱ < a_۲ < a_۳ < a_۴ < \cdots < a_n$ اعدادی باشند که ویژگی سوال را دارا هستند و فرض کنید $a_۱ = Xb_۱^۲$. که X عددی خالی از مربع(یعنی بر هیچ مربع کاملی بخش‌پذیر نیست) است. اکنون توجه کنید که طبق ادعای سؤال می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $i \geq ۲$: $a_i = X \times b_i^۲$. و چون b_iها اعداد متمایز بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر مساوی $\sqrt{۱۳۹۱}$ هستند پس تعداد کل اعداد حداکثر $۳۷ = \left\lfloor\sqrt{۱۳۹۱}\right\rfloor$ است. حال توجه کنید که ۳۷ عدد $۱^۲$ و $۲^۲$ و ... و $۳۷^۲$ در شرایط سوال صدق می‌کنند. پس جواب سوال ۳۷ است.

۱۱- پاسخ : ۴ ؛ کافی است توجه کنید که $(x^y)^z = x^{y\times z}$ پس به سادگی و با استقرا می‌توان نشان داد که مقدار مورد نظر برابر $a^{a^{b-۱}}$ است.

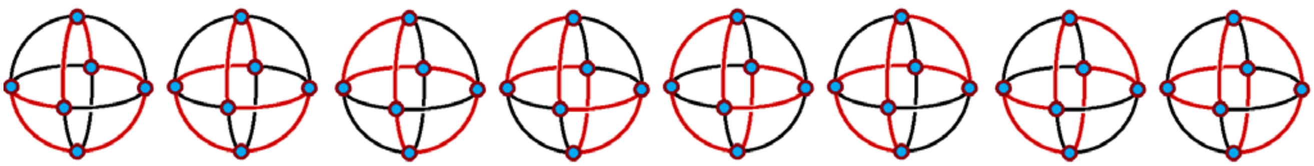
۱۲- پاسخ : ۱۳ ؛ با توجه به این که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت یک به دو قطع می‌کنند، دو مثلث MGN و BGC با نسبت یک به دو متشابه اند پس $MN = \frac{BC}{۲}$. حال با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

حال با جایگذاری مقادیر MC و NB داریم: $MC^۲ + NB^۲ = ۱۱^۲ + \left(\frac{۱۹}{۲}\right)^۲ = \frac{۴۸۴+۳۶۱}{۴} = \frac{۸۴۵}{۴}$ پس مقدار $BC^۲$ برابر $۱۶۹ = \frac{۴}{۵} \times \frac{۸۴۵}{۴}$ خواهد بود و بنابراین BC برابر ۱۳ است.



۱۳- پاسخ : ۳۲ ؛ به علت تقارنِ «نمکستان»ها، تعداد راه‌های رسیدن از «شکرستان» به «نمکستان شمالی» را حساب می‌کنیم و چهار برابر این عدد جواب مسأله خواهد بود. با حالت‌بندی کاملاً ساده به این نتیجه می‌رسیم که تمام راه‌های موجود دقیقاً ۸ راه (جهت‌دار) نمایش داده شده در شکل زیر هستند. پس ۳۲ حالت داریم.

(می‌توان برحسب این‌که نمکستان پشتی شهر چندم سفر است، حالت‌بندی را انجام داد.)

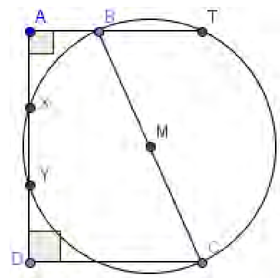


۱۴- پاسخ : ۱ ؛ فرض کنید برد f اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ و برد g اعداد $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ باشند. برد حاصل‌جمع حداکثر می‌تواند اعداد $a_i + b_j (i \leq n, j \leq m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی، باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، nبرابر باقی‌مانده‌ی $\left[\frac{x}{n}\right]$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که mn عدد متمایز خواهیم داشت.

برد حاصل ضرب حداکثر می‌تواند اعداد $a_i \times b_j (i \leq n, j \leq m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی دو به توان باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، دو به توان n برابر باقی‌مانده‌ی $\left[\frac{x}{n}\right]$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. به همان سادگی می‌توان دید که این mn عدد نیز متمایز اند.

در مورد ترکیب توابع چون برد تابع f ، m عضوی است پس خروجی $f \circ g$ نیز حداکثر m عضو دارد. از طرفی چون تابع g حداکثر n خروجی دارد پس $f \circ g$ نیز نمی‌تواند بیش از n خروجی داشته باشد. پس حداکثر اعضای برد $\min\{m, n\}$ است. برای این حالت یک مثال می‌تواند این باشد که : f به اعداد ۱ تا n خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. همچنین g به اعداد ۱ تا m خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که این مثال حداکثر ادعا شده را می‌دهد. پس جواب گزینه‌ی ۱ است.

۱۵- پاسخ : ۲ ؛ از رابطه‌ی قوت داریم: $AX \times AY = AB \times AT = ۱ \times DC = q$ از طرفی $AX = YD$ پس: $AX + AY = AY + YD = AD = r$ و چون $(x - AX)(x - AY) = x^۲ - (AX + AY)x + AX \times AY$ پس پاسخ سوال $x^۲ - rx + q$ است.



۱۶- پاسخ : ۳ ؛ دقت کنید که اگر تعداد عوامل ۳ در صورت و مخرج کسر متفاوت باشد، بعد از ساده کردن دقیقاً یکی از صورت و مخرج بر ۳ بخش‌پذیر است و دیگری نیست و در نتیجه حاصل جمع آن‌ها نمی‌تواند بر ۳ بخشپذیر باشد. پس تنها باید کسرهایی را بررسی کنیم که صورت آن‌ها دو عامل ۳ دارد. این کسرها بعد از ساده کردن به شکل $\frac{n}{۱۰}$ در می‌آید که n بر ۳ بخش‌پذیر نیست. دقت کنید که ضرب صورت و مخرج کسر در عددی که بر ۳ بخشپذیر نیست ویژگی مورد نظر را تغییر نمی‌دهد پس کافی است این کسرها بررسی شوند. با بررسی این کسرها می‌بینیم که تنها سه کسر $\frac{۲}{۱۰}$، $\frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۱۰}$ و $\frac{۴}{۵} = \frac{۸}{۱۰}$ این خاصیت را دارا هستند. پس پاسخ مسئله برابر ۳ است.

۱۷- پاسخ : ۳۰۰ ؛ توجه کنید که در مرحله n، روی هر خانه، تعداد گشت‌های به طول n از مبدأ به آن خانه نوشته می‌شود. پس برای حل سوال باید تعداد گشت‌های از مبدأ به خانه‌ی (۱,۱) را حساب کنیم. این معادل شمارش تعداد دنباله‌های به طول ۶ از حروف U، R، D و L است که $R = L + ۱$ و $U = D + ۱$ و به علاوه حاصل‌جمع آن‌ها برابر شش است. توجه کنید که حروف U، R ، D و L نمایش‌گر بالا و راست و پایین و چپ هستند. پس سه حالت داریم.

حالت ۱. $L = ۰, R = ۱, D = ۲, U = ۳$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۶۰ = \frac{۶!}{۰!۱!۲!۳!}$ است.

حالت ۲. $L = ۱, R = ۲, D = ۱, U = ۲$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۱۸۰ = \frac{۶!}{۱!۲!۱!۲!}$ است.

حالت ۳. $L = ۲, R = ۳, D = ۱, U = ۰$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۶۰ = \frac{۶!}{۲!۳!۰!۱!}$ است.

پس در کل $۳۰۰ = ۶۰ + ۱۸۰ + ۶۰$ حالت داریم.

۱۸- پاسخ : ۲ ؛ فرض کنید اعداد ما $p < q < r < s$ باشند. داریم: $pq < pr < ps, qr < qs < rs$ پس دو حالت داریم:

حالت ۱: $pq = ۲, pr = ۸, ps = ۹, qr = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

و با توجه به این که $pq = ۲$ پس $p = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ و در نتیجه $q = ۲\sqrt{۲}$ ، $r = ۸\sqrt{۲}$ و $s = ۹\sqrt{۲}$.

حالت ۲: $pq = ۲, pr = ۸, qr = ۹, ps = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

و با توجه به این که $pq = ۲$ پس $p = \frac{۴}{۳}$ و در نتیجه $q = \frac{۳}{۲}$ ، $r = ۶$ و $s = ۲۴$.

و توجه کنید که هر دوی این جواب‌ها درست هستند.

۱۹- پاسخ : ۳ ؛

مثال نقض برای گزینه‌ی ۱ : از آنجایی که همیشه $p_i \geq ۲$ ، f هیچ عددی نمی‌تواند ۲ باشد.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۲ : $f(۳) = ۱ = f(۲)$. پس f یک به یک نیست.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۴ : $m = ۴, n = ۸ \Rightarrow f(۴)f(۸) = ۴ \times ۹ = ۳۶ > ۲۵ = f(۳۲)$

مثال نقض برای گزینه‌ی ۵ : $m = ۲, n = ۲ \Rightarrow f(۲)f(۲) = ۱ \times ۱ = ۱ < ۴ = f(۴)$

دلیل درستی گزینه‌ی ۳ : خروجی تابع نمی‌تواند از یک عامل اول تنها یکی داشته باشد زیرا توان هر r_i، p_i است و اعداد اول(p_i ها)، بزرگتر مساوی دو هستند. حال ادعا می‌کنیم که این شرط کافی نیز هست یعنی اعداد به شکل $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}\ (r_i \geq ۲)$ دقیقا در برد هستند. اثبات ادعا: فرض کنید بخواهیم خروجی تابع عدد $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}\ (r_i \geq ۲)$ باشد. توجه کنید که هر عدد بزرگتر مساوی ۲ را می‌توان به صورت جمع مضارب نامنفی از ۲ و ۳ نوشت پس فرض کنید $r_i = ۲a_i + ۳b_i$. اکنون توجه کنید که خروجی تابع برای $۲^{p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}}۳^{p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_k^{b_k}}$ برابر

$p_k^{۲a_1+۳b_1} p_2^{۲a_2+۳b_2} \dots p_k^{۲a_k+۳b_k}$ است که این همان مقدار مورد نظر است. همچنین چون اعداد معرفی شده نسبت به ضرب بسته‌اند، گزینه‌ی ۳ درست است.

۲۰- پاسخ : ۴ ؛ اگر چرخ را ۶ بار ۶۰ درجه بچرخانیم، میله هر بار مقدار ثابتی را جارو می‌کند و در نهایت یک دور کامل می‌زند. پس از ۳۶۰ درجه چرخش، دایره‌ی بزرگی به شعاع $۱۰۰\sqrt{۲}$ ایجاد خواهد شد. درون این دایره، دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ است که خود چرخ بوده و در نتیجه جارو نمی‌شود. پس مساحت جارو شده برابر

است. حال توجه کنید که این مساحت برای ۶ بار چرخش است. پس مساحت جارو شده پس از طی ۶۰ درجه $\frac{۳۱۴}{۶}$ است و نزدیکترین عدد صحیح به این مساحت ۵۰ است.

۲۱- پاسخ : ۵۲ ؛ می‌دانیم $a_{n+۲} = \max\{a_{n+۱} - ۱, a_n + ۱\}$ پس $a_n \leq a_{n+۲} - ۱$. با چند بار استفاده از این رابطه داریم: $a_۴ \leq a_۶ - ۱ \leq a_۸ - ۲ \leq \cdots \leq a_{۱۰۰} - ۴۸ \leq ۵۲$. $a_۴ = \max\{a_۳ - ۱, a_۲ + ۱\}$ پس $a_۳ \leq ۵۳$ و چون $a_n \leq a_{n+۲} - ۱$ پس $a_۱ \leq a_۳ - ۱ \leq ۵۲$. پس ثابت کردیم که اولین عضو دنباله کم‌تر مساوی ۵۲ است. حال برای این کران بالا مثال می‌آوریم: $a_{۲n+۱} = ۵۲ + n$ و $a_{۲n} = ۵۱ + n$.

۲۲- پاسخ : ۵ ؛ ادعا می‌کنیم که احسان هر گونه بازی کند حسام می‌تواند بازی را ببرد. برای اثبات ادعا این الگوریتم را برای حسام ارایه می‌دهیم. (این الگوریتم را می‌توان نوعی تقلید دانست.)

الگوریتم: اگر احسان مهره‌ای قرار داد، مهره‌ای کنار آن مهره قرار بده و اگر احسان مهره‌ای را بالا برد، مهره‌ای که کنار مهره‌ی حرکت داده شده بود را بالا ببر. با این الگوریتم پس از هر حرکت حسام، سطرها یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی می‌شوند. پس احسان در هنگام حرکتش یا باید یک سطر را نیمه‌پر کند که حسام می‌تواند الگوریتم را اجرا کند و یا باید یک خانه از یک سطر پر را یک واحد بالا(به سطر تمام خالی بالایی) ببرد و در این حالت نیز حسام می‌تواند طبق الگوریتم حرکت خود را انجام دهد. پس برای هر حرکت احسان، حسام یک حرکت تضمین شده دارد که وضعیت بازی را مناسب برای حرکات بعدی

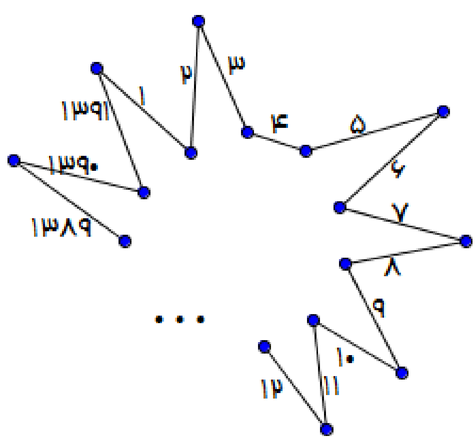
می‌کند. چون بازی بالاخره تمام می‌شود پس در نهایت کسی بدون حرکت می‌ماند. این فرد حسام نیست پس احسان است! پس حسام بازی را می‌برد.

۲۳- پاسخ : ۱۰ ؛ ب.م.م x و y را برابر d می‌گیریم. x' و y' را حاصل تقسیم x و y بر d می‌گیریم. پس داریم:

$x^{۲} + y^{۱}$

و چون $y \geq x \Rightarrow y' \geq x'$ پس $(dx' - y') = ۰ \Rightarrow y' = dx'$ و چون x' و y' نسبت به هم اول هستند، نتیجه می‌گیریم $x' = ۱ , y' = d$. پس جواب‌ها دقیقاً d و $d^{۲}$ ها هستند که ۱۰ تا از این جواب‌ها در بازه‌ی ۱ تا ۱۰۰ هستند.

۲۴- پاسخ : ۱۳۹۰ ؛ یک ضلع را در نظر بگیرید. دو سر این ضلع در چند ضلعی دو زاویه‌ی داخلی داریم. این ضلع «ناجور» است اگر و تنها اگر یکی از این دو زاویه بیش‌تر از ۱۸۰ درجه و یکی از این دو زاویه کم‌تر از ۱۸۰ درجه باشد. در غیر این صورت هر دو ضلع کناری در یک طرف پاره‌خط قرار می‌گیرند. اکنون ادعا می‌کنیم که نمی‌توان ۱۳۹۱ضلعیِ ناجور داشت. زیرا اگر تمام ضلع‌ها ناجور باشند، زوایا یکی در میان کم‌تر و بیش‌تر از ۱۸۰ درجه هستند و چون ۱۳۹۱ فرد است این موضوع امکان ندارد. مثال برای ۱۳۹۰ را در زیر مشاهده کنید:



۲۵- پاسخ : ۱۴ ؛ هنگامی که دایره‌ی nاُم را اضافه می‌کنیم حداکثر در $۲\left(n - ۱\right)$ نقطه با دیگر دایره‌ها برخورد دارد. از طرفی هر دایره که اضافه می‌کنیم به تعداد کمان‌هایش ناحیه‌ها را زیاد می‌کند. پس دایره‌ی اول دو ناحیه ایجاد می‌کند. دایره‌ی دوم دو ناحیه‌ی جدید اضافه می‌کند. دایره‌ی سوم حداکثر $۴ = ۲ \times ۲$ ناحیه‌ی اضافه ایجاد می‌کند و دایره‌ی چهارم

حداکثر $۶ = ۳ \times ۲$ ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌کند. پس در کل حداکثر $۱۴ = ۶ + ۴ + ۲ + ۲$ ناحیه خواهیم داشت. توجه کنید هر گونه که ۴ دایره روی کره بگذاریم که هر دوتایی متقاطع باشند و هیچ سه تایی در یک نقطه به هم نرسند ۱۴ ناحیه خواهیم داشت.