

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

پنجشنبه ۱۳۹۱/۶/۳۰

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۱. جهت‌گذاری بی‌دور

برای هر گراف ساده بی‌جهت G ، $f(G)$ عبارت است از تعداد روش‌های جهت‌دار کردن یال‌های G به طوری که گراف حاصل، دور جهت‌دار نداشته باشد. مثلاً $f(K_3) = 6$.
برای هر رأس v از گراف G ، منظور از $G - v$ گرافی است که از حذف کردن رأس v و تمام یال‌های متصل به آن به دست می‌آید.

الف) ثابت کنید اگر G گرافی با رئوس v_1, v_2, \dots, v_n باشد

$$f(G) \leq f(G - v_1) + \dots + f(G - v_n)$$

و همه گراف‌هایی را بیابید که برای آن‌ها تساوی رخ می‌دهد. (۲۰ نمره)

ب) برای هر یال e از G که u, v دو سر آن باشند، $G - e$ گرافی است که از حذف کردن یال e به دست می‌آید و G / e گرافی است که در آن u, v و یال‌های متصل به آن‌ها را حذف کرده و رأس z را به جای آن‌ها قرار می‌دهیم و آن را به رأسی وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر دست‌کم یکی از u, v در G به آن متصل باشد.

ثابت کنید برای هر یال e از G داریم: $f(G) = f(G - e) + f(G / e)$. (۴۰ نمره)

ج) ثابت کنید برای هر $\alpha > 1$ ، گراف G و یک یال e از آن وجود دارد که $\frac{f(G)}{f(G - e)} < \alpha$.

(۴۰ نمره)

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

پنجشنبه ۱۳۹۱/۶/۳۰

مدت امتحان ۱۰۵ دقیقه

۲. نابرابری محدب

فرض کنید S شکلی محدب در صفحه با مساحت ۱۰ باشد. وترى به طول ۳ در S در نظر بگیرید و A و B را دو نقطه روی این وتر بگیرید که آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند. برای نقطه متغیر X در $S - \{A, B\}$ ، A' و B' را به ترتیب تقاطع نیم خط‌های AX و BX با مرز S تعريف کنید. S' را مجموعه X ‌هایی بگیرید که به ازای آن‌ها داشته باشیم $AA' > \frac{1}{3}BB'$. ثابت کنید مساحت S' دست کم ۶ است.

(یک شکل در صفحه محدب گفته می‌شود اگر برای هر دو نقطه آن، پاره خط واصل آن‌ها کاملاً درون شکل باشد. در یک شکل محدب منظور از یک وتر، پاره خطی است که رئوسش روی مرز باشد.)

(۱۰۰ نمره)

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

پنجشنبه ۱۳۹۱/۶/۳۰

مدت امتحان ۵۰ دقیقه

۳. فی اویلر نزولی

ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ اعداد طبیعی $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ وجود دارند که
 $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \dots > \varphi(a_n)$ ، تعداد اعداد طبیعی کمتر از n است که نسبت به
آن اول هستند. (۱۰۰ نمره)

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

پنجشنبه ۱۳۹۱/۶/۳۰

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۴. سکه‌های تقلبی

n کیسه داریم که داخل هر کدام ۱۰۰ سکه است. همه سکه‌ها ۱۰ گرمی هستند به جز سکه‌های یکی از کیسه‌ها که ۹ گرمی هستند. یک ترازوی یک کفه‌ای داریم که وزن اشیاء را تا حداکثر یک کیلوگرم به‌طور دقیق نشان می‌دهد. دست‌کم چند بار وزن کردن لازم است تا بتوانیم کیسه متفاوت را پیدا کنیم. (۱۰۰ نمره)

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

جمعه ۱۳۹۱/۶/۳۱

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۵. چندجمله‌ای‌های دوری

چندجمله‌ای سه متغیره P را دوری می‌نامیم هرگاه $P(x, y, z) = P(y, z, x)$. ثابت کنید چندجمله‌ای‌های سه متغیره دوری P_1, P_2, P_3, P_4 وجود دارند به طوری که برای هر چندجمله‌ای سه متغیره دوری P ، چندجمله‌ای چهار متغیره Q موجود باشد که

$$P(x, y, z) = Q(P_1(x, y, z), P_2(x, y, z), P_3(x, y, z), P_4(x, y, z)).$$

(۱۰۰ نمره)

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

جمعه ۱۳۹۱/۶/۳۱

مدت امتحان ۱۰۵ دقیقه

۶. مساحت چندضلعی محدب شبکه‌ای

الف) ثابت کنید $a > 0$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، n ضلعی محدب P در صفحه با رئوس شبکه‌ای وجود داشته باشد که مساحت P از an^3 بیش‌تر نباشد. (۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید $b > 0$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر n ضلعی محدب P در صفحه با رئوس شبکه‌ای، مساحت P از bn^2 کم‌تر نباشد. (۴۰ نمره)

ج) ثابت کنید $c, \alpha > 0$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر n ضلعی محدب P در صفحه با رئوس شبکه‌ای، مساحت P از $cn^{2+\alpha}$ کم‌تر نباشد. (۲۰ (۱ + α) نمره!)

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

جمعه ۱۳۹۱/۶/۳۱

مدت امتحان ۵۰ دقیقه

۷. یکی رو یکی زیر!

شهر پل آباد تعدادی اتوبان دارد. اتوبان‌ها خم‌های بسته‌ای هستند که با خود و یکدیگر تقاطع‌هایی به شکل چهارراه دارند. آقای پل‌دوست، شهردار شهر، تصمیم دارد جهت کاهش تصادفات، در هر تقاطع یک پل بسازد. او می‌خواهد به نحوی پل‌ها را بسازد که در هر اتوبان اتومبیل‌ها، یکی درمیان از زیر پل و روی پل عبور کنند. بر حسب تعداد اتوبان‌ها بگویید آیا این کار شدنی است؟ (۱۰۰ نمره)

موفق باشید.

به نام او
آزمون خلاقیت

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۱

جمعه ۱۳۹۱/۶/۳۱

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۸. مجموعه‌های اولیه

الف) آیا مجموعه نامتناهی S از اعداد طبیعی وجود دارد که $S \neq \mathbb{N}$ و برای هر n طبیعی که $n \notin S$ دقیقاً n عضو S نسبت به n اول باشند؟ (۳۰ نمره)

ب) آیا مجموعه نامتناهی S از اعداد طبیعی وجود دارد که برای هر $n \in S$ دقیقاً n عضو S نسبت به n اول باشند؟ (۷۰ نمره)

موفق باشید.