به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

چهارم اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۱	امتحان اول (روز اول)	زمان: چهار ساعت و نیم

۱. تمام اعداد طبیعی $n \geq ۲$ را بیابید که برای هر i, j طبیعی که $i, j < n$، اعداد $i + j$ و $\binom{n}{i} + \binom{n}{j}$ دارای زوجیت یک‌سانی باشند.

۲. فرض کنید ω دایره‌ی محیطی مثلث حاده‌الزاویه ABC باشد. D را وسط کمان BAC از ω و I را مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC بگیرید. فرض کنید DI ضلع BC را در E و دایره ω را برای بار دوم در F قطع کند. از E خطی موازی AI رسم می‌کنیم تا AF را در P قطع کند. ثابت کنید EP زاویه‌ی BPC را نصف می‌کند.

۳. n را یک عدد طبیعی بگیرید. زیرمجموعه‌ی S از نقاط صفحه دارای خاصیت‌های زیر است:

الف) نمی‌توان n خط در صفحه یافت که هر عضو S روی حداقل یکی از این خطوط قرار داشته‌باشد.

ب) برای هر $X \in S$، n خط در صفحه یافت می‌شود که هر عضو $S - \{X\}$ روی حداقل یکی از این خطوط قرار داشته‌باشد.

حداکثر تعداد اعضای S را بیابید.

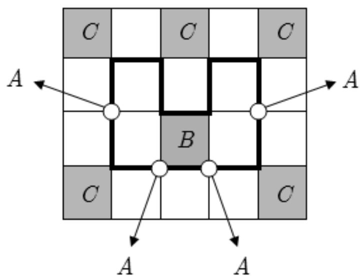
موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

پنجم اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۱	امتحان اول (روز دوم)	زمان: چهار ساعت و نیم

۴. $m+۱$ خط افقی و $n+۱$ $(m,n \geq ۴)$ خط عمودی را به گونه‌ای در صفحه رسم کرده‌ایم که یک جدول $m \times n$ ایجاد شده است. مسیری بسته را روی پاره‌خط‌های این جدول در نظر بگیرید که خودش را قطع نمی‌کند و از همه‌ی $(m-۱)(n-۱)$ رأس داخلی جدول عبور می‌کند (هر رأس محل تلاقی دو خط است.) و از هیچ‌کدام از رئوس بیرونی نمی‌گذرد. فرض کنید A تعداد رئوس داخلی جدول باشد که مسیر از آن‌ها مستقیم عبور کرده است، B تعداد خانه‌هایی از جدول باشد که تنها دو یال مقابل آن‌ها در مسیر مورد استفاده قرار گرفته باشد و C تعداد خانه‌هایی باشد که هیچ یالی از آن‌ها در مسیر استفاده نشده باشد. (مثلاً در شکل بالا $A=۴$، $B=۱$، $C=۵$، $m=۴$ و $n=۵$) ثابت کنید:



$$A = B - C + m + n - ۱$$

۵. تابع $f:\mathbb{R}^{\geq ۰} \to \mathbb{R}^{\geq ۰}$ دارای این خاصیت است که برای هر $a,b \in \mathbb{R}^{\geq ۰}$

$$i) \quad f(a) = ۰ \Leftrightarrow a = ۰$$

$$ii) \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

$$iii) \quad f(a+b) \leq ۲\max\{f(a), f(b)\}$$

ثابت کنید برای هر $a,b \in \mathbb{R}^{\geq ۰}$ داریم $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$.

۶. پنج‌ضلعی $ABCDE$ در دایره ω محاط شده است. فرض کنید $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d, \omega_e$ به ترتیب قرینه‌های ω نسبت به AB, BC, CD, DE, EA باشد. محل برخورد دوم ω_a, ω_e را A' بنامید. نقاط B', C', D', E' نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید:

$$۲ \leq \frac{S(A'B'C'D'E')}{S(ABCDE)} \leq ۳$$

$S(X)$ نشان‌دهنده‌ی مساحت شکل X است.

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

۲۳ اردی‌بهشت‌ماه ۱۳۹۱	امتحان دوم (روز اول)	زمان: چهار ساعت و نیم

۱. آیا می‌توان $\binom{n}{۲}$ عدد طبیعی متوالی را روی یال‌های گراف کامل nرأسی قرار داد طوری که به ازای هر مسیر (یا دور) به طول سه با یال‌های a, b, c (یال b بین a و c) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک عدد یال a و عدد یال c، عدد یال b را بشمارد؟

۲. $g(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداقل ۲ و با ضرایب حقیقی مثبت است. تمام توابع $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای اعداد $x, y \in \mathbb{R}^+$ داشته باشیم:

$$f(f(x) + g(x) + ۲y) = f(x) + g(x) + ۲f(y)$$

۳. $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. دایره‌های $\omega_۱, \omega_۲$ را طوری در نظر بگیرید که $\omega_۱$ بر پاره‌خط‌های AB, AD و $\omega_۲$ بر پاره‌خط‌های BC, CD مماس باشد. فرض کنید دایره‌ای وجود دارد که بر خط‌های AD, DC مماس است و با $\omega_۱, \omega_۲$ نیز مماس خارج است. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که بر خطوط AB, BC مماس است و با $\omega_۱, \omega_۲$ مماس خارج است.

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

۲۴ اردی‌بهشت‌ماه ۱۳۹۱ | امتحان دوم (روز دوم) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. برای اعداد حقیقی و مثبت a,b,c که $ab+bc+ca=۱$، نشان دهید:

$$\sqrt{۳}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \leq \frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}$$

۵. دو نقطه‌ی A و B روی دایره‌ی ω به مرکز O قرار دارند طوری که $۶۰^\circ < A\hat{O}B < ۱۲۰^\circ$. C را مرکز دایره‌ی محیطی مثلث AOB بگیرید. خطی از C بگذرانید که با OC زاویه‌ی ۶۰° بسازد و مماس‌های رسم شده از A و B بر ω را به‌ترتیب در M و N قطع کند. فرض کنید دایره‌های محیطی مثلث‌های CAM و CBN، ω را به‌ترتیب در Q و R و یکدیگر را در P قطع کنند. ثابت کنید $OP \perp QR$.

۶. زیرمجموعه‌ی B از اعداد طبیعی را وفادار می‌نامیم اگر عددهای طبیعی $i \leq j$ موجود باشند که $B=\{i,i+۱,\dots,j\}$. هم‌چنین برای هر $C \subseteq \mathbb{N}$، $Q(C)$ را مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های وفادار C بگیرید.

حال برای هر زیر مجموعه‌ی $A=\{a_۱<a_۲<\dots<a_k\}$ از $\{۱,۲,\dots,n\}$ قرار می‌دهیم:

$$g(A)=\max_{B\in Q(A)}\left|B\right| \quad و \quad f(A)=\max_{۱\leq i\leq k-۱} a_{i+۱}-a_i$$

و تعریف می‌کنیم:

$$G(n)=\sum_{A\subseteq\{۱,۲,\dots,n\}} g(A) \quad و \quad F(n)=\sum_{A\subseteq\{۱,۲,\dots,n\}} f(A)$$

ثابت کنید $m\in\mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر عدد طبیعی $m<n$ داریم $F(n)>G(n)$.

(منظور از $\left|A\right|$ تعداد اعضای مجموعه‌ی A است و اگر $\left|A\right| \leq ۱$، $f(A)$ را صفر می‌گیریم.)

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

۲۶ اردی‌بهشت‌ماه ۱۳۹۱	امتحان سوم (روز اول)	زمان: چهار ساعت و نیم

۱. یک ۲^k ضلعی منتظم به مرکز O در نظر بگیرید و اضلاع آن را به ترتیب ساعت‌گرد $l_۱, l_۲, \ldots, l_{۲^k}$ بنامید. O را نسبت به $l_۱$ قرینه کنید. سپس نقطه‌ی حاصل را نسبت به $l_۲$ قرینه کنید و این کار را متوالیاً تا آخرین ضلع انجام دهید. ثابت کنید فاصله‌ی نقطه‌ی نهایی از O کمتر از محیط ۲^k ضلعی مذکور است.

۲. آیا ۲۰۰۰ عدد حقیقی (نه لزوماً متمایز) وجود دارند که همگی صفر نباشند و هر ۱۰۰۰ تا از آن‌ها را ریشه‌های یک چندجمله‌ای تکین درجه ۱۰۰۰ قرار دهیم، ضرایب این چندجمله‌ای (به جز ضریب $x^{۱۰۰۰}$) جای‌گشتی از ۱۰۰۰ عدد دیگر شوند؟

۳. همه‌ی اعداد صحیح x, y را بیابید که:

$$(y^۳ + xy - ۱)(x^۲ + x - y) = (x^۳ - xy + ۱)(y^۲ + x - y)$$

موفق باشید.

به نام او

آزمون انتخابی تیم المپیاد ریاضی

۲۷ اردی‌بهشت‌ماه ۱۳۹۱	امتحان سوم (روز دوم)	زمان: چهار ساعت و نیم

۴. p یک عدد اول فرد است. چندجمله‌ای $f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ با ضرایب صحیح را i-مانده گوییم هرگاه $\sum_{p-1|j}^{p} a_j \equiv i$. نشان دهید $\{f(0), f(1), \dots, f(p-1)\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانه‌ی p است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای‌های $(f(x)), (f(x))^2, \dots, (f(x))^{p-2}$ ، 0-مانده و چندجمله‌ای $(f(x))^{p-1}$، 1- مانده باشد.

۵. n عددی طبیعی است. فرض کنید A, B دو مجموعه‌ی n عضوی از نقاط صفحه باشد که هیچ سه نقطه‌ای از آن‌ها هم‌خط نیستند. $T(A)$ را تعداد خط‌های شکسته‌ای متشکل از $n-1$ پاره‌خط بگیرید که خودش را قطع نمی‌کند و رئوس آن همان اعضای A است. $T(B)$ هم به طور مشابه تعریف می‌شود. اگر اعضای B رئوس یک n ضلعی محدب باشند ولی اعضای A این طور نباشند، ثابت کنید $T(B) < T(A)$.

۶. مرکز دایره‌ی محیطی مثلث حاده الزاویه‌ی ABC را O بنامید. فرض کنید نقاط A'، B' و C' به‌ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB باشند طوری که دایره‌های محیطی مثلث‌های $AB'C'$، $BC'A'$ و $CA'B'$ از O بگذرند. محور اصلی دایره‌ی به مرکز B' و شعاع $B'C$ و دایره‌ی به مرکز C' و شعاع $C'B$ را l_A بنامید. خطوط l_B و l_C را هم به‌طور مشابه تعریف کنید. ثابت کنید خطوط l_A، l_B و l_C مثلثی تشکیل می‌دهند که مرکز ارتفاعی آن بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC منطبق است.

موفق باشید.