بسم الله الرحمن الرحیم

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۹۰

سؤال شماره ۱. دوازده‌وجهی منتظم

الف. ابتدا تعداد دوران‌های مختلفی که یک دوازده‌وجهی منتظم را به روی خودش منطبق می‌کند می‌شماریم. به دلیل تقارن یک دوازده‌وجهی می‌توان هر کدام از ۱۲ وجه آن را به وجه پایینی برد (فرض کنید ۱۲وجهی در حالتی در فضا قرار گرفته باشد که یک وجه آن افقی باشد). ضمناً با توجه به این که همه‌ی وجوه به شکل ۵ضلعی هستند، این وجه به ۵ طریق مختلف می‌تواند روی وجه پایینی قرار بگیرد. بنابراین $12 \times 5 = 60$ دوران مختلف برای یک دوازده‌وجهی داریم.
دقت کنید که یکی از این دوران‌ها، شکل را تغییر نمی‌دهد و همه‌ی رأس‌ها سر جای خود باقی می‌مانند، پس ۵۹ دوران داریم که وضعیت دوازده‌وجهی را تغییر می‌دهد. (البته می‌توان تعداد این ۶۰ دوران را با شمارش تعداد رأس‌ها و تعداد یال‌هایی که در هر رأس به هم می‌رسند و با توجه به این نکته که می‌توان با دوران هر رأس و یالی را به هر رأس و یال دیگری فرستاد هم محاسبه کرد.)
در ادامه یک رأس علامت‌دار از چندوجهی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم محاسبه کنیم که در چندتا از دوران‌ها یک رأس علامت‌دار بر این رأس منطبق می‌شود. دقت کنید که به ۱۰ طریق می‌توان یک رأس علامت‌دار از دوازده‌وجهی انتخاب کرد و هر کدام از این ۱۰ رأس هم می‌توانند به ۳ طریق مختلف روی این رأس مورد نظر قرار گیرند. اما باز هم در یکی از این حالت‌ها دوران مورد بحث هیچ تغییری در چندوجهی ایجاد نمی‌کند. پس در کل در $3 \times 10 - 1 = 29$ حالت یک رأس علامت‌دار روی این رأس قرار می‌گیرد.
حال با توجه به این که ۱۰ رأس علامت‌دار داریم، در همه‌ی دوران‌ها ۲۹۰ بار دو رأس علامت‌دار روی هم قرار می‌گیرند. بنا به اصل لانه کبوتری و با توجه به این که در کل ۵۹ دوران مختلف و نابدیهی داریم، دورانی وجود دارد که تعداد این منطبق‌شدن‌ها در آن از $\frac{290}{59}$ بیش‌تر نیست. از آن‌جا که $\frac{290}{59} < 5$، دورانی وجود دارد که تعداد این انطباق‌ها در آن حداکثر ۴ است و این همان حکم مسئله است.

ب. کافی است مثالی بزنیم که در آن نتوان دورانی یافت که با انجام آن، حداکثر سه نقطه‌ی علامت‌دار روی سه نقطه‌ی علامت‌دار قرار بگیرد. برای این منظور رئوس واقع بر دو وجه رو به روی هم را علامت می‌زنیم. فرض کنید دورانی از این شکل باشد که حداکثر سه رأس علامت‌دارش با رئوس علامت‌دار اولی منطبق باشد. در این صورت باید با هر دوران شکل یکی از دو وجه علامت‌دار شکل جدید حداکثر یک نقطه‌ی علامت‌دار از شکل اولیه را شامل باشد (چون اگر هر کدام از وجه‌ها حداقل دو رأس علامت‌دار را شامل باشند، حداقل چهار انطباق اتفاق افتاده است.)
اما دقت کنید یک جفت از وجه‌های روبه‌رو به هم در دوازده‌وجهی، حتماً یا شامل وجه پایینی و یا یکی از وجه‌های مجاور آن است. پس حداقل دو انطباق در وجه پایینی وجود دارد. با استدلال مشابه می‌توان نشان داد که حداقل دو انطباق هم در وجه بالایی داریم. بنابراین در هر دورانی حداقل چهار انطباق رئوس علامت‌دار اتفاق افتاده و اثبات حکم به اتمام می‌رسد.

سؤال شماره ۲. چندجمله‌ای‌های ریش‌ریش!

الف. برای هر عدد طبیعی $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ تعریف می‌کنیم:

$$P_i(x) = \big(x - i\big)\big(x - (k+i)\big) \cdots \big(x - ((n-1)k + i)\big)$$

به وضوح ضرایب $P_i(x)$ همه صحیح هستند و این چندجمله‌ای دقیقاً یک ریشه‌ی ساده بین $\frac{1}{2}$ و $k + \frac{1}{2}$ دارد، پس علامت‌های $P_i(\frac{1}{2})$ و $P_i(k + \frac{1}{2})$ متفاوت است. به همین ترتیب برای هر $0 \leq j \leq n-1$، علامت $P_i(jk + \frac{1}{2})$ و $P_i((j+1)k + \frac{1}{2})$ مختلف هست.

بنابراین اگر $Q(x)$ مجموع تعدادی از P_iها باشد، با توجه به این که علامت P_iها در دو سر بازه‌ی $[jk + \frac{1}{2}, (j+1)k + \frac{1}{2}]$ برای هر $0 \leq j \leq n-1$ مختلف است، علامت Q هم در دو سر این بازه مختلف است و در نتیجه Q هم ریشه‌ای در درون این بازه دارد. در نهایت با توجه به این که درجه‌ی Q برابر n است و n بازه به شکل گفته شده داریم، همه‌ی ریشه‌های Q حقیقی هستند.

ب. بله، چنین خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌ها وجود دارد.

نشان می‌دهیم می‌توان اعداد طبیعی مناسب $c_1 < c_2 < \cdots$ یافت که چندجمله‌ای‌های

$$P_n(x) = x^{2n+1} - c_n(x-1)(x-2)\cdots(x-2n), \quad \forall n \geq 1$$

خاصیت‌های مورد نظر مسئله را داشته باشند.

c_nها را به صورت استقرایی تعریف می‌کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم $c_1 = 1$. فرض کنید $c_1, \ldots, c_{n-1}$ مشخص شده باشند، به گونه‌ای که $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ عامل مشترکی نداشته باشند و برای هر $\emptyset \subsetneq A \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$ همه‌ی ریشه‌های $\sum_{j \in A} P_j(x)$ حقیقی باشند. حال c_n را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که برای هر $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (A در این‌جا می‌تواند تهی هم باشد)، همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ی

$$f_A(x) = x^{2n+1} - c_n(x-1)(x-2)\cdots(x-2n) + \sum_{j \in A} P_j(x)$$

حقیقی باشند. $M_n > 0$ را عددی حقیقی بگیرید که برای هر $x \in [0, 2n+1]$ و هر $1 \leq j \leq n-1$، $|P_j(x)| < M_n$.

ادعا می‌کنیم که اگر c_n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، یعنی به طور دقیق‌تر اگر $c_n > 2^{2n}\Big((2n+1)^{2n+1} + (n-1)M_n\Big)$ انتخاب شود، داریم:

$$f_A(\frac{1}{2}) < 0, f_A(\frac{5}{2}) < 0, \ldots, f_A(2k + \frac{3}{2}) < 0, \ldots, f_A(2n + \frac{1}{2}) < 0$$

$$f_A(\frac{3}{2}) > 0, f_A(\frac{7}{2}) > 0, \ldots, f_A(2k + \frac{1}{2}) > 0, \ldots, f_A(2n - \frac{1}{2}) > 0$$

در این صورت طبق قضیه‌ی مقدار میانی f_A در هر یک از بازه‌های $(\frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2} - 1)$، $(\frac{1}{2} + 2, \frac{1}{2} - 2)$،... و $(2n - \frac{1}{2}, 2n + \frac{1}{2})$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد. پس f_Aها هر کدام حداقل $2n$ ریشه‌ی حقیقی دارند. از آن‌جا که همه‌ی f_A درجه فرد هستند و تعداد ریشه‌های حقیقی یک چندجمله‌ای درجه فرد همیشه عددی فرد است، همه‌ی $2n+1$ ریشه‌ی f_A حقیقی خواهد بود.

برای اثبات ادعای بالا، توجه کنید که برای هر $0 \leq k \leq n$، داریم:

$$f_A(2k + \frac{1}{2}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2k + \frac{1}{2})^{2n+1} - c_n(2k + \frac{1}{2} - 1)(2k + \frac{1}{2} - 2)\cdots(2k + \frac{1}{2} - 2n) + \sum_{j \in A} P_j(2k + \frac{1}{2}) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2k + \frac{1}{2})^{2n+1} + \sum_{j \in A} P_j(2k + \frac{1}{2}) < c_n(2k + \frac{1}{2} - 1)(2k + \frac{1}{2} - 2)\cdots(2k + \frac{1}{2} - 2n)$$

چون در حاصل‌ضرب $(۲k+\frac{۱}{۲}-۱)(۲k+\frac{۱}{۲}-۲)\cdots(۲k+\frac{۱}{۲}-۲n)$ تعداد زوجی از پرانتزها منفی است، مقدار کل حاصل‌ضرب مثبت خواهد بود. پس نابرابری بالا معادل است با این‌که:

$$c_n > \frac{(۲k+\frac{۱}{۲})^{۲n+۱} + \sum_{j\in A} P_j(۲k+\frac{۱}{۲})}{\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۱\right|\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۲\right|\cdots\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۲n\right|} \qquad (*)$$

اما اگر $c_n > ۲^{۲n}\Big((۲n+۱)^{۲n+۱} + (n-۱)M_n\Big)$ باشد، از آن‌جا که:

$$\left(۲k+\frac{۱}{۲}\right)^{۲n+۱} < (۲n+۱)^{۲n+۱}$$

$$\sum_{j\in A} P_j(۲k+\frac{۱}{۲}) \leq \sum_{j\in A} |P_j(۲k+\frac{۱}{۲})| < (n-۱)M_n$$

$$\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۱\right|\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۲\right|\cdots\left|۲k+\frac{۱}{۲}-۲n\right| > \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲n}$$

نابرابری $(*)$ نتیجه می‌گردد. اثبات این که $f_A(۲k+\frac{۳}{۲}) < ۰$ نیز کاملاً مشابه است.

تنها باید نشان دهیم که می‌توان c_n را به گونه‌ای انتخاب کرد که P_n با هیچ‌یک از P_jها برای $j<n$ عامل مشترک نداشته باشد. برای این منظور لم ساده‌ی زیر را به کار می‌گیریم.

لم. اگر c و c' دو عدد حقیقی و متمایز باشند، آن‌گاه دو چندجمله‌ای زیر ریشه‌ی مشترک ندارند.

$$f(x) = x^{۲n+۱} - c(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۲n), \qquad g(x) = x^{۲n+۱} - c'(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۲n)$$

اثبات. اگر $x_۰$ ریشه‌ی مشترک این دو چندجمله‌ای باشد، ریشه‌ی $f(x)-g(x)$ نیز هست. یعنی

$$(c'-c)(x_۰-۱)(x_۰-۲)\cdots(x_۰-۲n) = ۰$$

حال چون $c \neq c'$، باید $x_۰$ عضو مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۲n\}$ باشد، اما هیچ یک از اعضای این مجموعه ریشه‌ی $f(x)$ و یا $g(x)$ نیستند. پس این دو چندجمله‌ای نمی‌توانند ریشه‌ی مشترک داشته باشند. $\square$

با توجه به این لم چون تعداد ریشه‌های P_j برای $j<n$ متناهی است، حداکثر برای متناهی مقدار c_n، P_n تعریف شده با استفاده از c_n با یکی از P_jها ریشه‌ی مشترک (عامل مشترک) دارد. پس می‌توان c_n را عددی غیر از این متناهی مقدار انتخاب کرد که ریشه‌ی مشترکی با P_jهای قبلی نداشته باشد.

بنابراین دنباله‌ی P_jهایی که به این شکل به صورت استقرایی معرفی می‌شود، همگی تکین و با ضرایب صحیح هستند، دوبه‌دو عامل مشترکی ندارند و همه‌ی ریشه‌های هر مجموع متناهی از آن‌ها حقیقی است. به این ترتیب اثبات حکم به پایان می‌رسد.

سؤال شماره ۳. چهارضلعی لق

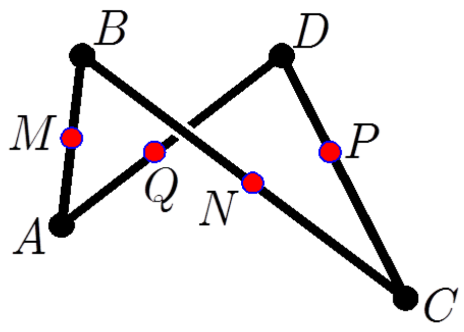
فرض کنید چهارضلعی که این چهار میله‌ی فلزی در فضا می‌سازند را با $ABCD$ نمایش دهیم و نقطه‌های مشخص‌شده روی اضلاع AB، BC، CD و DA را به ترتیب M، N، P و Q بنامیم. صفحه‌ی گذرنده از این چهار نقطه را π می‌نامیم. a، b، c و d را به ترتیب فاصله‌ی A، B، C و D تا صفحه‌ی π بگیرید. به سادگی داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{a}{b}, \frac{BN}{NC}=\frac{b}{c}, \frac{CP}{PD}=\frac{c}{d}, \frac{DQ}{QA}=\frac{d}{a} \Rightarrow \frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CP}{PD}\frac{DQ}{QA}=۱$$

حال فرض کنید میله‌ها تغییر وضعیت بدهیم. π' را صفحه‌ای بگیرید که در این وضعیت جدید از نقطه‌های M، N و P عبور می‌کند. این بار فاصله‌ی A، B، C و D تا π' را به ترتیب با a'، b'، c' و d' نمایش می‌دهیم. بنابراین مشابه بالا داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{a'}{b'}, \frac{BN}{NC}=\frac{b'}{c'}, \frac{CP}{PD}=\frac{c'}{d'}$$

با توجه به این که حاصل‌ضرب $\frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CP}{PD}\frac{DQ}{QA}$ برابر ۱ است، $\frac{DQ}{QA}=\frac{d'}{a'}$ خواهد بود و در نتیجه Q هم باید روی صفحه‌ی π' واقع باشد.



سؤال شماره ۴. پله‌برقی هوش‌مند

در هر لحظه تعداد افرادی که در آن زمان روی پله‌برقی هستند را در نظر بگیرید. حال بازه‌های زمانی را مشخص کنید که در هر کدام از آن‌ها تعداد افرادی که در لحظه از آن بازه روی پله‌برقی هستند، مقدار ثابتی باشد. فرض کنید k بازه‌ی $I_1, I_2, \dots, I_k$ دارای این خاصیت باشند. از نمادهای t_i و a_i به ترتیب برای نمایش طول بازه‌ی iام و تعدادی افرادی که در بازه iام روی پله‌برقی هستند، استفاده می‌کنیم. واضح است که زمان کل برای انتقال همه‌ی افراد $\sum_{i=1}^{k} t_i$ است. هم‌چنین می‌دانیم:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{1-\alpha} t_i = nl$$

چرا که هر فرد مسافت l را طی می‌کند، پس مجموع مسافت‌های طی‌شده توسط همه‌ی افراد از یک طرف برابر nl است. از طرف دیگر از آن‌جا که در بازه‌ی I_i، a_i نفر هر کدام به اندازه‌ی $t_i a_i^{-\alpha}$ جابه‌جا می‌شود، مجموع جابه‌جایی‌های همه‌ی افراد برابر سمت چپ عبارت بالا خواهد بود.

در ادامه دو حالت را در نظر می‌گیریم:

- $\alpha \geq 1$. از آن‌جا که a_iها طبیعی هستند(منطقی نیست که در یک بازه‌ی زمانی هیچ کسی روی پله‌برقی نباشد!)، $a_i \geq 1$ و چون $\alpha \geq 1$، $a_i^{1-\alpha} \leq 1$. پس داریم:

$$nl = \sum_{i=1}^{k} a_i^{1-\alpha} t_i \leq \sum_{i=1}^{k} t_i$$

پس زمان مورد نیاز حداقل برابر nl است. برای رسیدن به این زمان باید افراد یکی یکی سوار پله‌برقی شوند($a_i = 1$)، یعنی هر نفر به محض پیاده شدن نفر قبلش سوار شود.

- $\alpha < 1$. چون $a_i \leq n$ و $\alpha < 1$، $a_i^{1-\alpha} \leq n^{1-\alpha}$ و در نتیجه

$$nl = \sum_{i=1}^{k} a_i^{1-\alpha} t_i \leq n^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{k} t_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} t_i \geq n^{\alpha} l$$

پس در این حالت حداقل زمان برابر $n^{\alpha} l$ است و برای رسیدن به این زمان باید همه‌ی n نفر، هم‌زمان سوار پله‌برقی شوند. (سرعت برابر $n^{-\alpha}$ است و چون کل مسافت برابر l است، زمان لازم برابر $n^{\alpha} l$ می‌شود.)

سؤال شماره ۵. اعداد اول طلایی

الف. t را تعداد اعداد اول طلایی کم‌تر یا مساوی ۱۳۹۰^n بگیرید. باید نشان دهیم $t \geq n$. S را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۱۳۹۰^n بگیرید که همه‌ی عوامل اولشان در مجموعه‌ی $\{q_۱, q_۲, \dots, q_t\}$ باشند. به وضوح هر عضو S می‌تواند به شکل $a^۲b$ نوشته شود که a و b دو عدد طبیعی هستند و b خالی از مربع است. به وضوح $a \leq \sqrt{۱۳۹۰^n} = ۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}}$. در مورد b هم می‌دانیم که $b = q_۱^{\alpha_۱} q_۲^{\alpha_۲} \cdots q_t^{\alpha_t}$ که هر α_i برابر ۰ یا ۱ است. پس a و b به ترتیب $۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}}$ و ۲^t حالت دارند و بنابراین $|S| \leq ۲^t ۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}}$.

از طرف دیگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ که $۱ \leq i \leq ۱۳۹۰^{\frac{۲}{۳}n}$، داریم:

$$a_i \leq i^{۱/۵} \leq ۱۳۹۰^{\frac{۲}{۳}n \times ۱/۵} = ۱۳۹۰^n$$

توجه کنید که تمام عوامل اول a_i عضو مجموعه‌ی $\{q_۱, q_۲, \dots, q_t\}$ هستند و لذا برای هر $۱ \leq i \leq ۱۳۹۰^{\frac{۲}{۳}n}$، $a_i \in S$ و این یعنی S حداقل $[۱۳۹۰^{\frac{۲}{۳}}]$ عضو دارد.

در نهایت به آسانی می‌توان دید: $۱ - ۱۳۹۰^{\frac{۲}{۳}} \leq ۱۳۹۰^{\frac{۱}{۲}} \times ۲$ و بنابراین

$$۲^n \times ۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}} = (۲ \times ۱۳۹۰^{\frac{۱}{۲}})^n \leq (۱۳۹۰^{\frac{۲}{۳}} - ۱)^n \leq ۱۳۹۰^{\frac{۲}{۳}n} - ۱ \leq |S| \leq ۲^t \times ۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}}$$

پس $t \geq n$ و اثبات این قسمت به پایان می‌رسد.

ب. اثبات این قسمت هم بسیار شبیه به قسمت (الف) است. این بار t را تعداد اعداد اول طلایی کم‌تر یا مساوی $۱۳۹۰^{۲n}$ بگیرید. در این‌جا هم باید نشان دهیم $t \geq n$. باز هم مشابه قبل S را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی $۱۳۹۰^{۲n}$ بگیرید که همه‌ی عوامل اولشان طلایی و کم‌تر مساوی q_t باشند.

دقت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت $a^۴b^۲c$ نوشت که a، b و c طبیعی و b و c دو عدد طبیعی و خالی از مربع باشند. در این‌جا برای a حداکثر $\sqrt[۴]{۱۳۹۰^{۲n}} = ۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}}$ و برای b و c هم حداکثر ۲^t حالت ممکن است (با استدلال شبیه به قسمت (الف)). پس $|S| \leq ۲^{۲t} \times ۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}}$.

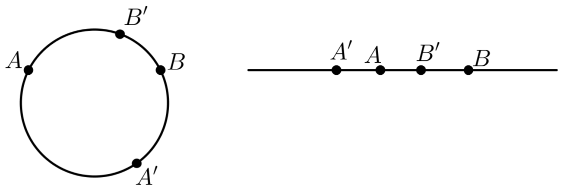
در این حالت اگر i عددی طبیعی و کم‌تر یا مساوی $۱۳۹۰^{\frac{۵}{۶}n}$ باشد، $a_i \leq i^{۲/۴} \leq ۱۳۹۰^{\frac{۵}{۶}n \times ۲/۴} = ۱۳۹۰^{۲n}$. ضمناً همه‌ی عوامل اول a_iها برای $i \leq ۱۳۹۰^{\frac{۶}{۶}n}$ طلایی هستند و در نتیجه $a_i \in S$. پس داریم:

$$۲^{۲n} \times ۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}} = (۴ \times ۱۳۹۰^{\frac{۱}{۲}})^n \leq (۱۳۹۰^{\frac{۵}{۶}} - ۱)^n \leq ۱۳۹۰^{\frac{۵}{۶}n} - ۱ \leq |S| \leq ۲^{۲t} \times ۱۳۹۰^{\frac{n}{۲}}$$

که با توجه به این که $۱ - ۱۳۹۰^{\frac{۵}{۶}} \leq ۱۳۹۰^{\frac{۱}{۲}} \times ۴$، نابرابری‌ها برقرار هستند. این نابرابری‌ها نتیجه می‌دهند، $t \geq n$ و اثبات این قسمت از مسئله هم به پایان می‌رسد.

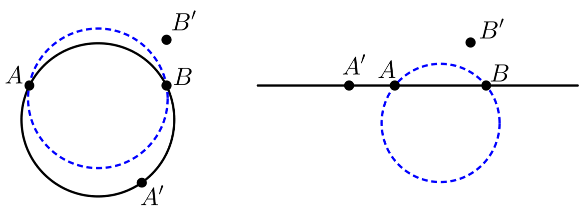
سؤال شماره ۶. دوایر درگیر

ادعا می‌کنیم که شرط لازم و کافی مفید(!) این است که هر چهار نقطه روی یک دایره و یا یک خط واقع باشند و به علاوه A و B، A' و B' را روی این دایره و یا خط از هم جدا کنند.

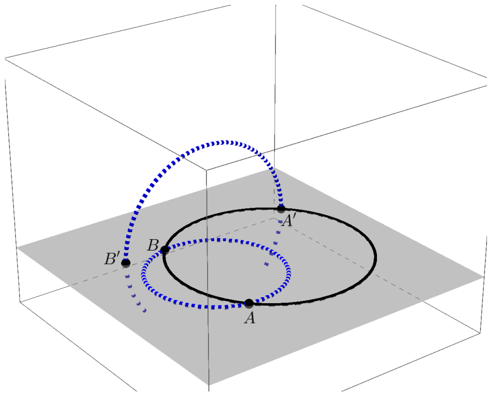


برای اثبات لازم بودن این خاصیت، ابتدا نشان می‌دهیم که چهار نقطه باید در یک صفحه واقع باشند، سپس ثابت می‌کنیم که باید هم‌دایره و یا هم‌خط باشند و در انتها نشان می‌دهیم روی این دایره و یا خط باید A' و B' در یک طرف A و B نباشند.

- اگر این چهار نقطه هم‌صفحه نباشند، خط گذرنده از AB و خط گذرا از $A'B'$ متنافر هستند (متقاطع و یا موازی نیستند). بنابراین می‌توان صفحه‌ای گذرنده از A و B مثل π و صفحه‌ای گذرنده از A' و B' مثل π' یافت که π و π' با هم موازی باشند (یعنی در فضا اشتراکی نداشته باشند). به وضوح دو دایره یکی در صفحه‌ی π و دیگری در صفحه‌ی π' نمی‌توانند با هم درگیر باشند. پس این حالت امکان ندارد و چهار نقطه باید هم‌صفحه باشند.
- حال فرض کنید که چهار نقطه در یک صفحه واقع هستند و B' روی دایره‌ی محیطی مثلث ABA' قرار ندارد (اگر A، B و A' هم‌خط باشند، به جای دایره‌ی محیطی خط گذرنده از این سه نقطه را در نظر می‌گیریم). در این حالت می‌توان دایره‌ی محیطی (یا خط واصل) را کمی تغییر داد و دایره‌ی جدیدی به دست آورد که هنوز از A و B بگذرد و وضعیت A' و B' نسبت به آن یک‌سان باشد؛ یعنی یا هر دو نقطه درون این دایره باشند و یا هر دو بیرون آن واقع باشند.



در این صورت این دایره‌ی تغییریافته و دایره‌ی عمود بر صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ها و به قطر $A'B'$ درگیر نیستند (دو دایره‌ی به صورت خط‌چین در شکل پایین) و این تناقض نشان می‌دهد که باید چهار نقطه هم‌دایره و یا هم‌خط باشند.



- فرض کنید روی این دایره (یا خط) A' و B' در یک سمت A و B واقع باشند. در این‌جا هم کاملاً مشابه قسمت قبلی این دایره (یا خط) گذرنده از نقطه‌ها را اندکی تغییر می‌دهیم تا دایره‌ی جدیدی به دست آید که از A و B بگذرد و هر دو A' و B' درون یا بیرون آن واقع باشند. شبیه قسمت قبل این دایره‌ی تغییریافته و دایره‌ی عمود بر صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ها و به قطر $A'B'$ درگیر نیستند.

در ادامه نشان می‌دهیم که شرط بیان‌شده کافی هم هست. برای این منظور فرض کنید چهار نقطه‌ی A، B، A' و B' خواص یادشده را دارا هستند و می‌خواهیم نشان دهیم که هر دو دایره‌ی گذرنده از A و B مثل C و هر دایره‌ی گذرنده از A' و B' مثل C' درگیر هستند. صفحات شامل C و C' را به ترتیب π و π' بنامید.

- اگر نقطه‌ها هم‌خط باشند، هر دوی πو π' شامل خط گذرنده از نقطه‌ها هستند. $C' \cap \pi$ شامل یک نقطه درون C و یک نقطه بیرون C (در π) است و بنابراین C و C' درگیر هستند.

- اگر نقطه‌ها روی یک دایره واقع باشند، M را محل تقاطع AB و $A'B'$ و l را خط اشتراک π و π' بگیرید. در این صورت حتماً $M \in l$ و $MA.MB = MA'.MB'$. M درون C است، پس خط l دایره‌ی C را در دو نقطه مثل X و Y قطع می‌کند که M بین X و Y قرار دارد. به طریق مشابه خط l دایره‌ی C' را در دو نقطه مثل X' و Y' قطع می‌کند که M بین X' و Y' هم واقع است. فرض کنید X و X' در یک طرف M باشند. داریم:
$$MX.MY = MA.MB = MA'.MB' = MX'.MY'$$

پس اگر $MX \leq MX'$، آن‌گاه $MY \geq MY'$ و بالعکس. بنابراین نقاط $C' \cap \pi = \{X', Y'\}$ یا در دو طرف متفاوت C (در π) قرار دارند و یا هر دو روی C واقع‌اند و این یعنی C و C' درگیر هستند.

سؤال شماره ۷. تابع پیش‌گو

همان طور که در راه‌نمایی صورت سؤال اشاره شده است، ابتدا تابع f را برای زیرمجموعه‌های متناهی از اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم. اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ مجموعه‌ای متناهی باشد، $f(A)$ برابر بزرگ‌ترین عضو این مجموعه تعریف می‌کنیم. به راحتی می‌توان دید که این تعریف f شرط پیش‌گو بودن برای مجموعه‌های متناهی را برآورده می‌سازد (چرا که اگر $x > \max\limits_{a\in A} a$، $f(A\cup\{x\}) = x$).

در ادامه سعی می‌کنیم این تابع f را به همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی گسترش دهیم. برای این منظور یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی به این صورت تعریف می‌کنیم که دو زیرمجموعه‌ی $A, B \subseteq \mathbb{N}$ را "نزدیک به هم" می‌گوییم هرگاه با اضافه و یا کم‌کردن تعدادی متناهی عدد طبیعی بتوان از یکی به دیگری رسید. این تعریف معادل آن است که زیرمجموعه‌ی $A\Delta B$ متناهی باشد.

با توجه به خواص زیر از تفاضل متقارن مجموعه‌ها (Δ) می‌توان دید که نزدیک بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی تعریف می‌کند.

$$\begin{cases} A\Delta A = \emptyset \\ A\Delta B = B\Delta A \\ A\Delta C \subseteq (A\Delta B)\cup(B\Delta C) \end{cases}$$

این رابطه‌ی هم‌ارزی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی را به کلاس‌های هم‌ارزی افراز می‌کنند. از هر کلاس هم‌ارزی این رابطه یک زیرمجموعه را انتخاب می‌کنیم[1]. فرض کنید عنصر انتخاب‌شده از کلاس شامل A را با S_A نمایش دهیم.

برای هر $A \neq S_A$، تعریف می‌کنیم $f(A) = \max(A\Delta S_A)$. توجه کنید که $A\Delta S_A$ متناهی است، پس بزرگ‌ترین عضوی برای آن وجود دارد. $f(S_A)$ را هم برابر هر مقدار دل‌خواهی تعریف می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم که این تابع جدید، برای هر زیرمجموعه‌ی A از اعداد طبیعی پیش‌گو است. x را یک عدد طبیعی بگیرید که $x \notin A$. در این صورت A و $A\cup\{x\}$ نزدیک به هم هستند و بنابراین در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند. پس $S_A = S_{A\cup\{x\}}$ و لذا داریم:

$$f(A\cup\{x\}) = f(A\Delta\{x\}) = \max(A\Delta\{x\}\Delta S_A) = \max((A\Delta S_A)\Delta\{x\}$$

پس اگر $x > \max(A\Delta S_A)$، $f(A\cup\{x\}) = x$ و بنابراین اثبات ادعا به پایان می‌رسد.

(توجه کنید که اگر به عنوان نماینده‌ی کلاس هم‌ارزی زیرمجموعه‌های متناهی، مجموعه‌ی تهی را انتخاب کنیم، $f(A) = \max(A\Delta\emptyset) = \max(A)$ و بنابراین این تابع گسترشی از تابعی است که در ابتدای راه‌حل برای زیرمجموعه‌های متناهی معرفی شد، خواهد بود.)

[1] برای این کار از اصلی به نام اصل انتخاب استفاده می‌کنیم.

سؤال شماره ۸. دنباله‌های پوشاننده

الف. تصاعدهای بیان‌شده در صورت مسئله را با $S_1, S_2, \dots, S_n$ نمایش می‌دهیم ($S_j = \{a_j + td_j : t = 0, 1, 2, \dots\}$). فرض کنید هیچ‌یک از $a_1, \dots, a_k$ به پیمانه‌ی p با r هم‌نهشت نباشند. حال تصاعد حسابی $S = \{r+tp : t = 0, 1, 2, \dots\}$ را در نظر بگیرید. این تصاعد با هیچ‌کدام از $S_1, \dots, S_k$ اشتراکی ندارد و بنابراین با $S_{k+1}, \dots, S_n$ پوشیده می‌شود. با استفاده از قضیه‌ی باقی‌مانده چینی می‌دانیم که $S \cap S_{k+1}, \dots, S \cap S_n$ تصاعدهایی با قدر نسبت (به ترتیب) $pd_{k+1}, \dots, pd_n$ هستند. حال تابع $f : S \to \{0, 1, \dots\}$ را با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x-r}{p}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت مجموعه‌های $f(S \cap S_{k+1}), \dots, f(S \cap S_n)$ تصاعدهایی حسابی با قدر نسبت $d_{k+1}, \dots, d_n$ هستند. از آن‌جا که S با $S_{k+1}, \dots, S_n$ پوشیده می‌شد و f تابعی پوشا است، این مجموعه‌ها هم $\mathbb{N} \cup \{0\}$ را می‌پوشانند که با کوتاه‌بودن (مینیمال بودن) $d_1, d_2, \dots, d_n$ تناقض دارد.

ب. فرض کنید $p_1, \dots, p_k$ همه‌ی عوامل اول $d_1, \dots, d_n$ باشند و تعریف کنید $I_i = \{j : p_i | d_j\}$. فرض کنید اعداد طبیعی با تصاعدهای $S_j = \{a_j + td_j : t = 0, 1, 2, \dots\}$ پوشانده شده اند. ادعا می‌کنیم که حداقل یکی از خانواده‌های $\Theta_i = \{S_j : j \in I_i\}$ اعداد طبیعی را می‌پوشانند و این یعنی یکی از I_iها خود دنباله‌ای پوشاننده است.

فرض کنید برای هر i، تصاعدهای Θ_i همه‌ی اعداد طبیعی را نپوشانند و r_i یافت شود که توسط تصاعدهای Θ_i پوشیده نمی‌شود. تعریف کنید $D_i = \prod\limits_{p_i | d_j} d_j$. طبق قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چینی عدد طبیعی مثل r وجود دارد که برای هر i، $r \equiv r_i \pmod{D_i}$. بنابراین r با هیچ یک از تصاعدها پوشیده نمی‌شود که با پوشاننده بودن تناقض دارد. بنابراین ادعا به طور کامل ثابت شد.

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $d_i = p^{r_i}$. ادعا می‌کنیم دنباله‌ی d_iها یک دنباله‌ی پوشاننده است، اگر و تنها اگر $\sum\limits_i \frac{1}{d_i} \geq 1$ و به علاوه این دنباله‌ی پوشاننده، کوتاه (مینیمال) هم هست، اگر و تنها اگر $\sum\limits_i \frac{1}{d_i} = 1$.

- فرض کنید اعداد طبیعی را طبق بالا با تصاعدهای S_i پوشانده‌ایم. برای هر N طبیعی، S_j حداکثر $\frac{N}{d_j} + 1$تا از اعداد $\{1, 2, \dots, N\}$ را می‌پوشاند. پس اگر d بزرگ‌ترین عدد در بین d_jها باشد، $\sum_j \frac{N+d}{d_j} \geq N$ و لذا $\sum_j \frac{1}{d_j} \geq \frac{N}{N+d}$ و چون N دل‌خواه است باید داشته باشیم $\sum_j \frac{1}{d_j} \geq 1$.

- حال برعکس فرض کنید $\sum_j \frac{1}{d_j} \geq 1$. با استقرا روی n نشان می‌دهیم که d_jها تشکیل یک دنباله‌ی پوشاننده می‌دهند. اگر $n = 1$ باشد که حکم واضح است. اگر $n > 1$، n_j را برابر تعداد p^jها در بین $d_1, d_2, \dots, d_n$ تعریف کنید. فرض کنید $n_0 = 0$ (اگر $n_0 \neq 0$ عدد یک هم در بین d_iها هست و لذا حتماً یک دنباله‌ی پوشاننده داریم). در این صورت حتماً قدر نسبتی مثل p^s وجود دارد که حداقل p بار در بین d_iها ظاهر شده است $n_s \geq p$، زیرا اگر چنین نباشد برای هر j، $n_j \leq p - 1$ و لذا
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{p^k} < (p-1)(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots) = (p-1)(\frac{1}{p-1}) = 1$$
حال می‌توان pتا از p^sها را از $d_1, \dots, d_n$ حذف کرد و به جای آن یک p^{s-1} قرار داد. با این تغییر مجموع $\sum \frac{1}{d_j}$ ثابت می‌ماند. پس طبق فرض استقرا می‌توان اعداد طبیعی را با تصاعدهای حسابی با این قدر نسبت‌های جدید پوشاند. اگر تصاعد با قدر نسبت p^{s-1} در میان این تصاعدها را به p تصاعد با قدر نسبت p^s تقسیم کنیم، تصاعدهایی با قدر نسبت‌های داده شده یافته‌ایم که اعداد طبیعی را پوشانده‌اند و حکم این بخش هم ثابت می‌شود.

- اگر d_iها دنباله‌ای کوتاه نباشند به وضوح باید $\sum \frac{1}{d_i} > 1$ زیرا با حذف یکی از آن‌ها باز هم مجموع بیش‌تر یا مساوی یک است.

- برای طرف دیگر فرض کنید $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ و $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} > 1$. داریم $\sum_{i=1}^{n} \frac{d_n}{d_i} > d_n$ و چون همه‌ی $\frac{d_n}{d_i}$ها اعداد طبیعی هستند، باید $\frac{d_n}{d_i} \geq 1 + d_n$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_n}{d_i} \geq 1 + d_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq 1 + \frac{1}{d_n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{d_i} \geq 1$$

که طبق قسمت‌های قبلی این نتیجه می‌دهد $d_1, \ldots, d_{n-1}$ هم پوشاننده است و این یعنی می‌توانیم d_n را از اعضای دنباله حذف کنیم طوری که اعضای باقی‌مانده مجدداً پوشاننده باشند و بنابراین دنباله‌ی اولیه کوتاه (مینیمال) نبوده است.