به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

---

۱. راه‌حل اول. طبق اصل لانه‌کبوتری از ۱۳۹۰ مورچه، لااقل ۶۹۵ مورچه یک طرف خط مفروض قرار دارند. فرض کنید این طرف بالای خط باشد. در ادامه تنها آن مورچه‌هایی را درنظر می‌گیریم که در بالای خط قرار دارند.

محور x را در جهت خط و محور y را عمود بر آن انتخاب می کنیم و فرض کنید که (x_i, y_i) نمایش‌گر مختصات سر یک مورچه در بالای محور باشد. در این صورت برای دو مورچه‌ی مختلف i و j داریم که:

$$(x_i - x_j)^۲ + (y_i - y_j)^۲ \geq ۲^۲ = ۴ \Rightarrow (x_i - x_j)^۲ \geq ۴ - (y_i - y_j)^۲ \geq ۳$$

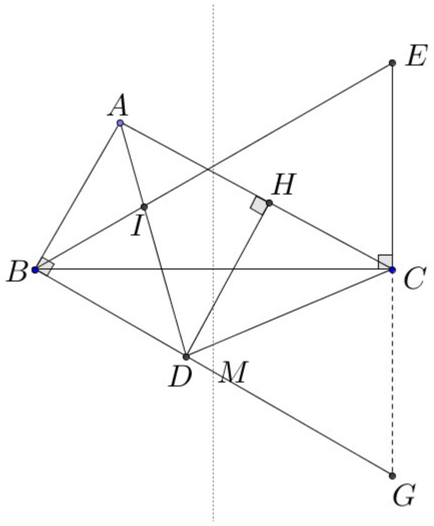
لذا برای هر دو مورچه‌ای در بالای خط داریم که $x_i - x_j \geq \sqrt{۳}$ پس اگر فرض کنیم که مورچه‌ها بر حسب مختصه x مرتب شده‌اند، یعنی: $x_۱ < x_۲ < x_۳ < \ldots < x_{۶۹۵}$ داریم که فاصله‌ی هر دو عضو متوالی از دنباله‌ی فوق لااقل $\sqrt{۳}$است پس $x_{۶۹۵} - x_۱ \geq \sqrt{۳} \times ۶۹۴ > ۱۲۰۰$ در نتیجه این دو مورچه در راستایx بیش از ۱۲ متر فاصله دارند پس کلاً فاصله‌ی آن‌ها بیش‌تر از ۱۲ متر است.

راه حل دوم. اگر به مرکز سر هر مورچه دایره‌ای به شعاع یک سانتی‌متر رسم کنیم، فرض مسئله معادل این می‌شود که هیچ دو دایره‌ای هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند و همگی خط مورد نظر را قطع می‌کنند(چرا؟) هم‌چنین این که همه‌ی دایره‌ها خط مورد نظر را قطع می‌کنند نتیجه می‌دهد که همه‌ی دایره‌ها به کلی داخل نواری به پهنای ۴ به مرکزیت خط قرار می‌گیرند.

با فرض خلف اگر فرض کنیم که سر همه‌ی مورچه‌ها درون طول ۱۰۰۰ سانتی‌متر قرار می گیرد می توان نتیجه گرفت که طول ۱۰۰۲ از نوار مورد نظر وجود دارد که همه دایره‌ها به کلی درون آن باشند. اما مساحت این ناحیه ۴۰۰۸ سانتی‌متر مربع است که از مجموع مساحت دایره‌های درون این ناحیه ($۱۳۹۰\pi \approx ۴۳۶۷$) کم‌تر است و این تناقض است.

توضیح: راه‌حل‌های دیگری نیز برای این مسئله وجود دارد که کران‌های به‌تری نیز می‌دهد.

۲. راه‌حل اول. مطابق شکل G را قرینه‌ی نقطه‌ی E نسبت به ضلع BC بگیرید. در این صورت BEG یک مثلث متساوی‌الساقین است($BE = BG$) که یک زاویه‌ی ۶۰ درجه دارد($\angle EBG = ۹۰^\circ - \frac{\angle ABC}{۲} = ۶۰^\circ$). پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر M را وسط ضلع BG از این مثلث بگیریم با توجه به این که در مثلث متساوی‌الساقین میانه همان ارتفاع است، $EM \perp BG$ و در نتیجه $\angle BEM = ۳۰^\circ$. پس کافی است نشان دهیم که $BD \leq BM$. برای این منظور توجه کنید که نقطه‌ی D روی نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle A$ است. پس اگر H پای عمود وارد از D بر AC باشد، $BD = DH$. اما از طرف دیگر با توجه به این که DH بر AC عمود است، $DH \leq DC$. پس در کل $BD \leq DC$. این نشان می‌دهد که D و B در یک طرف عمود منصف BC قرار دارند. اما می‌دانیم که عمود منصف BC، طبق قضیه‌ی تالس BG را در نقطه‌ی وسطش یعنی M قطع می‌کند. در نتیجه D روی پاره‌خط BM قرار دارد و لذا $DB \leq BM$ و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.



راه‌حل دوم. مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC که در این‌جا محل تقاطع BEو AD است را مطابق معمول با I نمایش می‌دهیم. α را برابر $\frac{۱}{۲}\angle BAC$ بگیرید. در این صورت داریم:

$$\angle IBD = ۹۰^\circ - \angle IBA = ۹۰^\circ - \frac{\angle CBA}{۲} = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$
$$\angle CEB = ۹۰^\circ - \angle CBE = ۹۰^\circ - \frac{\angle CBA}{۲} = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

بنابراین در دو مثلث BEC و BED، $\angle CEB = \angle EBD = ۶۰^\circ$ و BE ضلع مشترک هر دو است. از آن‌جا که $\angle EBC = ۳۰^\circ$ است، کافی است نشان دهیم که $BD \leq CE$ ولی می‌دانیم که $\frac{BD}{AB} = \tan\alpha$ و $\frac{EC}{BC} = \tan(۳۰^\circ)$. پس

$$\begin{aligned}
BD \leq CE \quad &\Leftrightarrow \quad AB\tan\alpha \leq BC\tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{AB}{BC}.\tan\alpha \leq \tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \tan\alpha\frac{\sin(۱۲۰^\circ - ۲\alpha)}{\sin(۲\alpha)} \leq \tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin(۱۲۰^\circ - ۲\alpha)}{۲\sin\alpha.\cos\alpha} \leq \tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(۱۲۰^\circ - ۲\alpha) \leq ۲\cos^۲\alpha.\tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \sin ۱۲۰^\circ.\cos(۲\alpha) - \sin ۱۲۰^\circ.\sin(۲\alpha) \leq (۱ + \cos(۲\alpha))\tan ۳۰^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad (\sin ۱۲۰^\circ - \tan ۳۰^\circ).\cos(۲\alpha) - \cos ۱۲۰^\circ.\sin(۲\alpha) \leq \tan ۳۰^\circ
\end{aligned}$$

حال برای نشان دادن این حکم معادل آخر از نامساوی کوشی‌شوارتز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&((\sin ۱۲۰^\circ - \tan ۳۰^\circ).\cos(۲\alpha) - \cos ۱۲۰^\circ.\sin(۲\alpha) \leq \tan ۳۰^\circ)^۲ \\
\leq \quad &((\sin ۱۲۰^\circ - \tan ۳۰^\circ).\cos(۲\alpha) - \cos ۱۲۰^\circ.\sin(۲\alpha) \leq \tan ۳۰^\circ)^۲ \\
= \quad &(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ + (\frac{-۱}{۲})^۲ = \frac{۳}{۳۶} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۳} = \tan^۲(۳۰^\circ)
\end{aligned}$$

۳. ابتدا نشان می‌دهیم که این دنباله اکیداً صعودی است. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که برای یک عدد طبیعی i، $a_i = a_{i+۱}$. حال برای یک عدد اول بزرگ مثل p، j را برابر $p - i$ قرار دهید. در این صورت $i + j$ اول است و تنها دو مقسوم‌علیه دارد. پس $a_i + a_j$ هم تنها دو مقسوم‌علیه دارد و در نتیجه اول است. اما $a_{i+۱} + a_j = a_i + a_j$ و لذا $a_{i+۱} + a_j$ هم اول بوده و در نتیجه دو مقسوم‌علیه دارد.

پس $i+j+1=p+1$ هم اول است که امکان ندارد.
حال i و j را برابر 2^{p-2} که p یک عدد اول است قرار دهید. در این صورت $i+j=2^{p-1}$، p مقسوم‌علیه دارد. پس $2a_i$ هم باید p مقسوم‌علیه داشته باشد. حال اگر تجزیه‌ی $2a_i$ به عوامل اول به صورت $2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)=p$$

پس تنها یکی از α_i+1ها می‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد و آن‌هم ناچاراً α_1+1 است. پس $\alpha_1=p-1$ و در نتیجه $a_i=a_{2^{p-2}}=2^{p-2}$. حال دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح داریم که در بی‌نهایت عدد صحیح مثل k، $a_k=k$ شده است. در این صورت این دنباله مجبور است برای هر عددی این خاصیت را داشته باشد. پس تنها دنباله‌ای که در این خاصیت صدق می‌کند دنباله‌ی اعداد طبیعی است.

۴. فرض کنید اعداد حقیقی $a_1,a_2,\ldots,a_n$ شرط مسئله را برآورده کنند. در این صورت

$$20=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=n$$

پس $n\geq 21$. می‌خواهیم نشان دهیم که $n=22$ جواب است. برای این منظور فرض کنید

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{21}$$

تعدادی عدد حقیقی در بازه‌ی $(-1,1)$ باشند که $a_1+a_2+\cdots+a_{21}=0$ و $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{21}^2=20$. حال دقت کنید که $a_1\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{21}}{21}\leq a_{21}$. پس $a_1\leq 0\leq a_{21}$. از طرفی با توجه به این که ۲۱ کوچک‌ترین عدد ممکن با این خاصیت است هیچ‌کدام از a_iها نمی‌توانند صفر باشند. بنابراین عدد طبیعی مشخص k وجود دارد که

$$-1<a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_k<0<a_{k+1}\leq\cdots\leq a_{21}<1$$

اگر $k\leq 10$، آن‌گاه برای هر $k+1\leq i\leq 21$ باید $0<a_i<1$ باشد و در نتیجه $0<a_i^2<a_i$. حال داریم:

$$\begin{aligned}
20 &= a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{21}^2=(a_1^2+\cdots+a_k^2)+(a_{k+1}^2+\cdots+a_{21}^2)\\
&< (a_1^2+\cdots+a_k^2)+(a_{k+1}+\cdots+a_{21})\\
&< (a_1^2+\cdots+a_k^2)+(-a_1-a_2-\cdots-a_k)\\
&< 2k\leq 20
\end{aligned}$$

که یک تناقض است. اگر هم $k\geq 11$، با در نظر گرفتن دنباله‌ی $-a_i$ به جای a_i و تکرار استدلال بالا به تناقض می‌رسیم. پس n نمی‌تواند برابر ۲۱ باشد و لذا $n\geq 22$. برای $n=22$ هم دنباله‌ی زیر شرایط خواسته شده را دارد.

$$a_1=a_2=\cdots=a_{11}=-a_{12}=-a_{13}=\cdots=-a_{22}=\sqrt{\frac{11}{10}}$$

پس پاسخ مسئله ۲۲ است.

۵. با استقرا روی n نشان می‌دهیم که حداکثر تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان برابر $2n-1$ است. برای این تعداد روز اگر رنگ‌های مختلف را با شماره‌های $1,2,\ldots,n$ نمایش دهیم، دنباله‌ی زیر از رنگ‌ها که

طول آن برابر $۲n-۱$ است به وضوح خاصیت خواسته شده را دارد.

$$(۱,۲,\dots,n-۱,n,n-۱,\dots,۱)$$

در حالت $n=۱$ حکم کاملاً بدیهی است. حال فرض کنید که حکم برای اعداد کم‌تر از n درست باشد و می‌خواهیم حکم را در حالت n نتیجه بگیریم.

فرض کنید روز اول رنگین‌کمان R باشد و در k روز با شماره‌های $R_۱,R_۲,\dots,R_k$ این رنگ را داشته است.(طبیعتاً $R_۱=۱$ است!)

حال هر کدام از بازه‌های $(R_۱,R_۲)$، $(R_۲,R_۳)$،...، $(R_{k-۱},R_k)$ و $(R_k,\dots)$ را در نظر بگیرید.(منظور از بازه‌ی $(R_i,R_{i+۱})$ روزهای بین روز R_iام و $R_{i+۱}$ام است.) اگر پرنده در روز در دو بازه‌ی مختلف دارای یک رنگ باشد، فرض مسئله در مورد این دو روز و سر و ته بازه‌ی شامل روز اول به هم می‌خورد. بنابراین بازه‌های مختلف رنگ‌های مختلف دارند.

C_i را برابر تعداد رنگ‌هایی بگیرید که رنگین کمان در بازه‌ای که از روز R_i شروع می‌شود به خود می‌گیرد. طبق نتیجه‌ی بالا باید $\sum_{i=۱}^{k} C_i = n-۱$ باشد. با توجه به این که $C_i<n$ است، طبق فرض استقرا تعداد روزهای بازه‌ای که از R_i شروع می‌شود حداکثر برابر $۲C_i-۱$ است. تنها دقت کنید که تعداد روزهای بازه‌ی آخر ممکن است برابر صفر باشد که در این صورت تعداد کل روزهای عمر رنگین‌کمان حداکثر $k+\sum_{i-۱}^{k-۱}(۲C_i-۱)=۲n-۱$ است. در غیر این صورت که این تعداد ناصفر باشد تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان حداکثر $k+\sum_{i=۱}^{k}(۲C_i-۱)=۲n-۲<۲n-۱$ است.

۶. فرض کنید که M وسط ضلع BC و a عمود منصف این ضلع باشد. X را نقطه‌ی تقاطع a و l بگیرید و به علاوه فرض کنید $\angle MXE=\alpha$،$\angle ABC=\beta$ و $\angle ACB=\gamma$ باشد. Y را نقطه‌ای روی پاره‌خط DE بگیرید که $EY=EC$ و Z قرینه‌ی نقطه‌ی Y نسبت به عمود منصف BC باشد.(پس Z روی خط l' است.) در این صورت به وضوح چهارضلعی $BCYZ$ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و در نتیجه یک چهارضلعی محاطی است. K را نقطه‌ی تقاطع دوم (غیر از Z) دایره‌ی محیطی این چهارضلعی با خط l' بگیرید.(اثبات در حالتی که این دایره بر l' مماس باشد کاملاً مشابه است. در این حالت K همان Z خواهد بود.) ادعا می‌کنیم که با این شرایط $D'B=D'K$ است.

$$\angle CED = ۳۶۰^\circ - (\angle MCE + \angle CMX + \angle MXE) = ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \gamma + ۹۰^\circ + \alpha) = ۹۰^\circ + \gamma - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \angle CYE = \frac{۱۸۰^\circ - \angle CED}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - \gamma + \alpha}{۲} = ۴۵^\circ - \frac{\gamma}{۲} + \frac{\alpha}{۲} \quad (۱)$$

حال از آن‌جا که مثلث ZXY متساوی‌الساقین است، $\angle XYZ = ۹۰^\circ - \angle MXE = ۹۰^\circ - \alpha$ (۲).

$$(۱),(۲) \quad \Rightarrow \quad \angle CYZ = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \alpha) - (۴۵^\circ - \frac{\gamma}{۲} - \frac{\alpha}{۲}) = ۴۵^\circ + \frac{\gamma}{۲} + \frac{\alpha}{۲}$$

چهارضلعی $CYKZ$ با توجه به نحوه‌ای که K را معرفی کردیم محاطی است و در نتیجه $\angle CKZ = \angle CYZ = ۴۵^\circ + \frac{\gamma}{۲} + \frac{\alpha}{۲}$. پس

$$\begin{aligned} \angle CKE' &= ۱۸۰^\circ - \angle CKZ = ۱۳۵^\circ - \frac{\gamma}{۲} - \frac{\alpha}{۲} && (۳) \\ \angle CE'K &= ۳۶۰^\circ - (\angle MCE' + \angle XMC + \angle MXE') \\ &= ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \gamma + ۹۰^\circ + ۱۸۰^\circ - \alpha) = \alpha + \gamma - ۹۰^\circ && (۴) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\angle KCE\prime &= ۱۸۰^\circ - (\angle CE\prime K + \angle CKE\prime) \overset{(۳),(۴)}{=} ۱۸۰^\circ - (\alpha + \gamma - ۹۰^\circ + ۱۳۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} - \frac{\gamma}{۲}) \\ &= ۱۳۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} - \frac{\gamma}{۲} = \angle CKE' \\ &\Rightarrow \angle KCE' = \angle CKE'\end{aligned}$$

پس نشان دادیم که مثلث $CE'K$ یک مثلث متساوی‌الساقین است و در نتیجه $CE' = KE'$. به طریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد که $BD' = KD'$ و بنابراین در کل $D'E' = D'K + KE' = BD' + CE'$ و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.