به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول سی‌اُمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۰

سؤالات کوتاه‌پاسخ بر اساس کد یک.

۱. تجزیه‌ی ۲۰۱۲ به عوامل اول به صورت $۲۰۱۲ = ۲^۲ \times ۵۰۳$ است که چون $ac = ۲۰۱۲$ پس باید دقیقاً یکی از a و c بر ۵۰۳ بخش‌پذیر باشد. حالت $۵۰۳ \big| c$ با توجه به این که $[b,c] = ۱۳۹۰$ و این که ۱۳۹۰ بر ۵۰۳ بخش‌پذیر نیست امکان ندارد. پس $۵۰۳ \big| a$ و لذا حالت‌های زیر را داریم.

الف. $a = ۵۰۳$ و $c = ۴$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$ بر $c = ۴$ بخش‌پذیر نیست امکان ندارد.

ب. $a = ۱۰۰۶$ و $c = ۲$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$، مقدار b برابر ۶۹۵ و یا ۱۳۹۰ است که چون a و b طبق فرض مسئله عامل مشترک ندارند تنها حالت $b = ۶۹۵$ قابل قبول است که در این حالت $a + b + c = ۱۷۰۳$.

پ. $a = ۲۰۱۲$ و $c = ۱$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$، b باید برابر ۱۳۹۰ باشد که با $(a,b) = ۱$ تناقض دارد.

بنابراین پاسخ مسئله ۱۷۰۳ است.

۲. در سفر اول مجبوریم به شکرستان برویم. در ۱۱ سفر بعدی، در سفرهای فرد به یکی از توابع شکرستان می‌رویم و در سفرهای زوج به شکرستان بازمی‌گردیم. پس تنها سفرهای فرد که شش‌تا هستند را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که دقیقاً یکی از این سفرها به سماقستان است. برای انتخاب این سفر از بین ۶ سفر ۶ حالت داریم. برای مقصد هر کدام از ۵ سفر دیگر هم ۲ گزینه‌ی نمکستان و فلفلستان وجود دارد. پس طبق اصل ضرب پاسخ مسئله $۶ \times ۲^۵ = ۱۹۲$ است.

۳. بیش‌ترین مقدار ممکن برای $۳ab + ۴bc$ برابر ۹۰۰ است. برای اثبات این حکم ابتدا یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم. برای هر دو عدد حقیقی x و y، $۴xy \leq (x+y)^۲$.

اثبات. $(x+y)^۲ - ۴xy = (x-y)^۲ \geq ۰$.

$$۳ab + ۴bc = ۴(a+c)b - ab \leq ۴(a+c)b \leq ((a+b)+c)^۲ = ۹۰۰$$

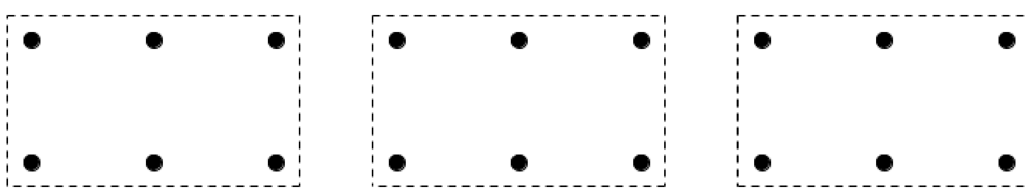
و تساوی زمانی است که $ab = ۰$ و $a + c = b = ۱۵$ و لذا $a = ۰$ و $b = c = ۱۵$.

۴. دقت کنید که اگر در چنین عبارتی مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر S باشد، عدد حاصل برابر $۲S - ۲۸$ خواهد بود.($۷ + \cdots + ۲ + ۱ = ۲۸$)

به علاوه دقت کنید اگر با یک ترکیب از مثبت و منفی‌ها به عددی مثبت برسیم، اگر به جای مثبت‌ها منفی و به جای منفی‌ها مثبت قرار دهیم به عددی منفی می‌رسیم و بالعکس. پس تعداد حالت‌هایی که به مثبت می‌رسیم دقیقاً برابر تعداد حالت‌هایی است که به منفی می‌رسیم. با این توضیحات باید تعداد حالت‌هایی را پیدا کنیم که به حاصل صفر می‌رسیم.

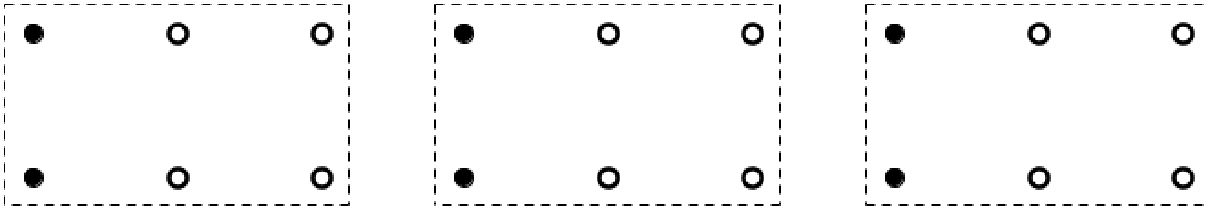
طبق توضیحات ابتدایی برای این که عدد حاصل برابر صفر شود باید مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر ۱۴ باشد. پس باید تعداد حالت‌های انتخاب چنین اعدادی را بشماریم. حال اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۷ باشد، باید مجموع اعداد دیگر برابر ۷ شود که حالت‌های ممکن $\{۱,۶\}$، $\{۲,۵\}$، $\{۳,۴\}$ و $\{۱,۲,۴\}$ است. اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۶ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۸ شود که حالت‌های ممکن $\{۵,۳\}$، $\{۱,۲,۵\}$ و $\{۱,۳,۴\}$ هستند و اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب‌شده ۵ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۹ شود که فقط حالت $\{۲,۳,۴\}$ این طور است. بنابراین در هشت حالت به حاصل صفر می‌رسیم و در غیر از این هشت حالت در نیمی از حالات به مثبت و در نیم دیگر به منفی می‌رسیم و چون تعداد کل علامت‌گذاری‌های ممکن $۲^۷$تا است، تعداد حالت‌های منجر به عدد مثبت $\frac{۲^۷-۸}{۲} = ۶۰$ است.

۵. چراغ‌ها را مطابق شکل زیر به سه دسته تقسیم می‌کنیم.

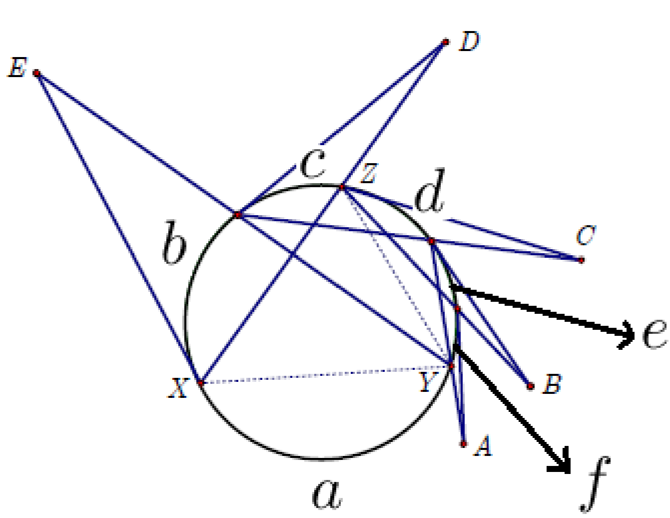


اگر در یک دسته بیش‌تر از ۴ چراغ خاموش باشد، پس یکی از دو چراغ وسطی این آن دسته خاموش است. توجه کنید از آن‌جا که این چراغ از پنج چراغ دیگرِ هم‌دسته‌اش فاصله‌ای کم‌تر از ۶۰ متر دارد، با این فرض که در هم‌سایگیِ ۶۰متریِ هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر قرار دارد تناقض دارد. پس در

هر دسته حداکثر چهار چراغ خاموش داریم و بنابراین در کل حداکثر ۱۲ چراغ می‌تواند خاموش باشد. شکل زیر مثالی برای ۱۲ چراغ را نمایش می‌دهد. (دایره‌های توخالی چراغ‌های خاموش هستند.)



۶. مانند شکل روبه‌رو کمان‌های را نام‌گذاری می‌کنیم. در این صورت معلومات سؤال معادل این خواهد بود که



$$e-f=۸^\circ, d-e=۱۴^\circ,$$
$$c-d=۲۰^\circ, b-c=۲۶^\circ,$$
$$a-b=۳۲^\circ$$

هم‌چنین می‌دانیم $a+b+c+d+e+f=۳۶۰^\circ$. حال همه‌ی زاویه‌ها را برحسب f می‌نویسیم و در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم.

$$f+(\overbrace{f+۸^\circ}^{e})+(\overbrace{f+۸^\circ+۱۴^\circ}^{d})+(\overbrace{f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ}^{c})+$$
$$(\overbrace{f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ+۲۶^\circ}^{b})+(\overbrace{f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ+۲۶^\circ+۳۲^\circ}^{a})=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶f+۲۴۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow f=۲۰^\circ \Rightarrow c=۶۲^\circ, b=۸۸^\circ$$
$$\Rightarrow \angle XYZ=\frac{b+c}{۲}=\frac{۶۲^\circ+۸۸^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

۷. توجه کنید که اگر تجزیه‌ی عدد طبیعی n به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول به شکل $p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن که با نماد $\mathrm{d}(n)$ نمایش می‌دهیم برابر $(\alpha_۱ + ۱)(\alpha_۲ + ۱)\cdots(\alpha_k + ۱)$ خواهد بود.

طبق فرض‌های صورت سؤال در مورد تعداد مقسوم‌علیه‌های این اعداد، a باید به شکل $p^۲$ و b باید به شکل $q^۳$ و یا rs باشد که p، q، r و s اعداد اول هستند و $r \neq s$. بنابراین ab باید به شکل $q^۳p^۲$ و یا $rsp^۲$ باشد. حال حالت‌های زیر متصور هستند.

الف. $ab = q^۳p^۲$. اگر $p = q$، $\mathrm{d}(ab) = ۶$ و اگر $p \neq q$، $d(ab) = ۱۲$ که هیچ‌کدام قابل قبول نیستند.

ب. $ab = rsp^۲$. اگر r، s و p سه عدد اول متمایز باشند، $\mathrm{d}(ab) = ۱۲$ که باز هم قابل‌قبول نیست. بنابراین p با یکی از r و s برابر است که می‌توان فرض کرد $p = r$. در این صورت $ab = sp^۳$ و لذا $\mathrm{d}(ab) = ۸$ که حالت مورد قبول است.

بنابراین b به شکل ps است و لذا $b^۲ = p^۲s^۲$ و این نتیجه می‌دهد که تعداد مقسوم‌علیه‌های $b^۲$ برابر ۹ است.

۸. برای انتخاب خانه‌ای از سطر اول که مهره در آن قرار می‌گیرد ۴ حالت داریم. با انتخاب مهره‌ی سطر اول در یکی از خانه‌های سطر دوم نمی‌توان مهره قرار داد، پس برای انتخاب خانه‌ای که مهره‌ی سطر دوم در آن قرار می‌گیرد ۳ حالت داریم. به همین ترتیب برای انتخاب خانه‌هایی از سطر سوم و چهارم که مهره در آن‌ها قرار می‌گیرد به ترتیب ۲ و ۱ حالت داریم. پس پاسخ مسئله برابر است با $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$.

۹. اگر پای عمود وارد از C بر ضلع AB را H بنامیم، مثلث AHC مثلثی قائم‌الزاویه‌ای با وتر به طول $۱۴\sqrt{۳}$ است که $\angle CAH = ۶۰^\circ$. پس

$$AH = AC.\cos(\angle CAH) = AC.\cos(۶۰^\circ) = ۱۴\sqrt{۳} \times \frac{۱}{۲} = ۷\sqrt{۳} = AB$$

و لذا B همان نقطه‌ی H است و این یعنی مثلث ABC خود قائم‌الزاویه است ($\angle B = ۹۰^\circ$) و طبق قضیه‌ی فیثاغورس $BC = \sqrt{۱۴^۲ \times ۳ - ۷^۲ \times ۳} = ۷\sqrt{۹} = ۲۱$.

حال طول YZ را برحسب BX محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث YZS داریم:

$$YZ^۲ = ZS^۲ + YS^۲ = BX^۲ + (YX - ZB)^۲$$

طبق قضیه‌ی تالس و از آن‌جا که $YX \parallel AB$، $\frac{YX}{AB} = \frac{CX}{BC}$ و لذا $YX = ۷\sqrt{۳}\frac{۲۱-BX}{۲۱} = \frac{۲۱-BX}{\sqrt{۳}}$.

از طرف دیگر با توجه به این که $\angle ZXB = ۳۰^\circ$ و $\frac{ZB}{BX} = \tan(\angle ZXB) = \tan(۳۰^\circ) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ به دست می‌آوریم که $ZB = \frac{BX}{\sqrt{۳}}$.

با جای‌گذاری دو رابطه‌ی اخیر در عبارت مربوط به YZ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&YZ^۲ = BX^۲ + (\frac{۲۱ - ۲BX}{\sqrt{۳}})^۲\\
\Rightarrow\ & ۳YZ^۲ = ۷BX^۲ - ۸۴BX + ۴۴۱ = ۷(BX^۲ - ۱۲BX + ۳۶) + ۱۸۹\\
\Rightarrow\ & YZ^۲ = \frac{۷}{۳}(BX - ۶)^۲ + \frac{۱۸۹}{۳} \geq \frac{۱۸۹}{۳}
\end{aligned}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $YZ^۲$ برابر $\frac{۱۸۹}{۳}$ است و زمانی به این مقدار می‌رسیم که $BX = ۶$ باشد.

۱۰. اعدادی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر هستند که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۶، یکی از اعداد ۰، ۲، ۳ و ۴ باشد، معادلاً به فرم $۶k$، $۶k + ۲$، $۶k + ۳$ و یا $۶k + ۴$ باشد. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{\substack{(n,۶)\neq ۱\\ ۱\leq n\leq ۱۲۰}} x^n\\
&= \sum_{۱\leq ۶k\leq ۱۲۰} x^{۶k} + \sum_{۱\leq ۶k+۲\leq ۱۲۰} x^{۶k+۲} + \sum_{۱\leq ۶k+۳\leq ۱۲۰} x^{۶k+۳} + \sum_{۱\leq ۶k+۴\leq ۱۲۰} x^{۶k+۴}\\
&= \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۶} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۲} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۳} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۴}\\
&= (x^۶ + x^۲ + x^۳ + x^۴)(\sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k})\\
&= x^۲(۱ + x + x^۲ + x^۴)(۱ + x^۶ + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴})
\end{aligned}$$

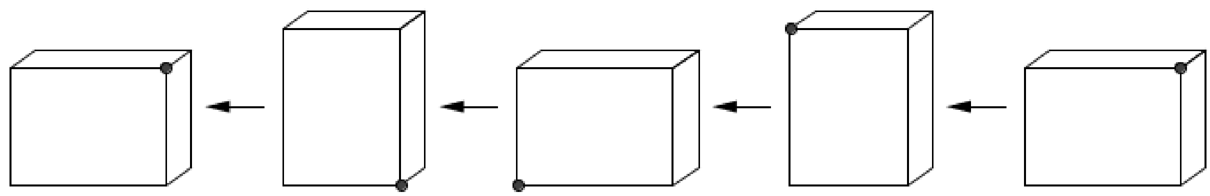
حال دقت کنید که همه‌ی جملات عبارت $x^۶ + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴}$ نامنفی هستند و لذا

$$۱ + x^۶ + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴} > ۰$$

و بنابراین این چندجمله‌ای ریشه‌ی حقیقی ندارد. از طرف دیگر $x^۲ + x + ۱$ یک چندجمله‌ای درجه دوم است که همواره مقدار آن مثبت است و با توجه به نامنفی بودن $x^۴$، $x^۴ + x^۲ + x + ۱$ هم همواره مثبت است و ریشه‌ی حقیقی ندارد. پس تنها ریشه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ همان صفر است.

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

جسم به شکل زیر روی زمین غلطیده:



(دقت کنید که نسبت عمق مکعب که برابر ۶ است به دلیل راحتی در رسم رعایت نشده است و ضمناً نقطه‌ی پررنگ در شکل‌های بالا محل نقطه‌ی A را در هر گام مشخص می‌کند.)

در هر مرحله مکعب مستطیل حول ضلع پایین سمت چپ چرخیده است. پس

در چرخش اول نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۵ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۲\pi\times۵}{۴} = \frac{۵}{۲}\pi$ را طی کرده است.

در چرخش دوم نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۴ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۲\pi\times۴}{۴} = ۲\pi$ را طی کرده است.

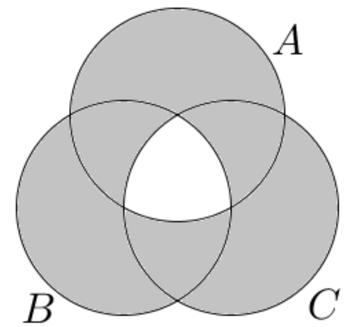
در چرخش سوم نقطه‌ی A، ثابت مانده و بنابراین مسافتی طی نکرده است.

در چرخش چهارم نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۳ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۲\pi\times۳}{۴} = \frac{۳}{۲}\pi$ را طی کرده است.

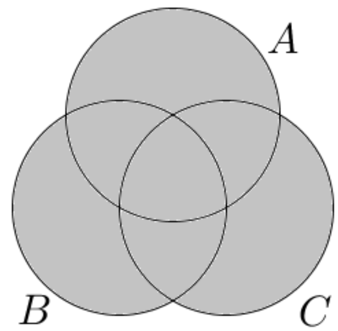
بنابراین در کل این نقطه مسافت $\frac{۵}{۲}\pi + ۲\pi + \frac{۳}{۲}\pi = ۶\pi$ را طی کرده است.

۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

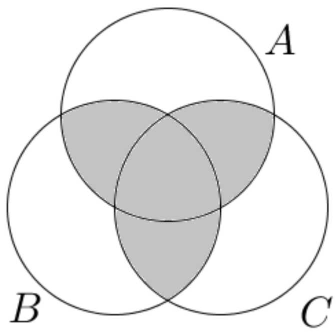
از نمودار ون برای حل این سؤال استفاده می‌کنیم.



گزینه‌ی الف



گزینه‌ی ب



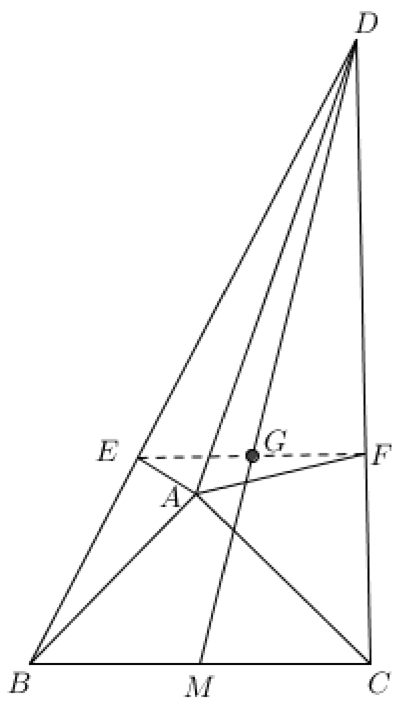
گزینه‌ی ج و د

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر حاصل‌ضرب اعداد دو دسته برابر A باشد، $A^{۲} = ۱ \times ۲ \times \times \cdots \times ۳۰ = ۳۰!$. اما در $۳۰!$ تنها یک عامل ۲۳ وجود دارد، پس امکان ندارد که $۳۰!$ مربع کامل باشد. بنابراین چنین عملی ممکن نیست.

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با توجه به این که پاره‌خط‌های AE و AF نیم‌ساز هستند، $\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{FC}$ و بنا بر قضیه‌ی تالس $EF \parallel BC$. حال چون EF از مرکز ثقل مثلث BCD می‌گذرد نتیجه می‌گیریم $\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{GM} = \frac{۲}{۱}$ (M وسط ضلع BC است.) و بنابراین $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{EB} = ۲$. پس $AD = ۲AB = ۲۰$.



۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = x^4 - (x+1)^2 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)$$

عبارت $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ همواره مثبت است پس علامت چندجمله‌ای صورت سؤال با علامت چندجمله‌ای $x^2 - x - 1$ یک‌سان است. عبارت $x^2 - x - 1$ یک سهمی است که دارای دو ریشه‌ی $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ است، پس برای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه‌ی بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ریشه‌ی کوچک‌تر یعنی $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ که اجتماع دو نیم‌خط است، مقدار چندجمله‌ای نامنفی است.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

چون مقدار عبارت طبیعی شده و با توجه به این که صورت کسر مثبت است، مخرج کسر هم باید مثبت باشد و بنابراین $a > b$. از طرف دیگر دقت کنید که $a - b \Big| a + b$ معادل این است که $a - b \Big| 2b$.

حال مسئله را بر حسب مقادیر مختلف b حالت‌بندی می‌کنیم.

$b = 1$، $a - 1 \Big| 2$ پس $a - 1 \in \{1, 2\}$ و لذا $a \in \{2, 3\}$. دو حالت دارد.

$b = 2$، $a - 2 \Big| 4$ پس $a - 2 \in \{1, 2, 4\}$ و لذا $a \in \{3, 4, 6\}$. سه حالت دارد.

$b = 3$، $a - 3 \Big| 6$ پس $a - 3 \in \{1, 2, 3, 6\}$ و لذا $a \in \{4, 5, 6, 9\}$. چهار حالت دارد.

$b = 4$، $a - 4 \Big| 8$ پس $a - 4 \in \{1, 2, 4, 8\}$ و لذا $a \in \{5, 6, 8\}$. سه حالت دارد.

$b = 5$، $a - 5 \Big| 10$ پس $a - 5 \in \{1, 2, 5, 10\}$ و لذا $a \in \{6, 7, 10\}$. سه حالت دارد.

$b = 6$، $a - 6 \Big| 12$ پس $a - 6 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ و لذا $a \in \{7, 8, 9, 10\}$. چهار حالت دارد.

$b = 7$، $a - 7 \Big| 14$ پس $a - 7 \in \{1, 2, 7, 14\}$ و لذا $a \in \{8, 9\}$. دو حالت دارد.

$b = 8$، $a - 8 \Big| 16$ پس $a - 8 \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$ و لذا $a \in \{9, 10\}$. دو حالت دارد.

$b = 9$، $a - 9 \Big| 18$ پس $a - 9 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ و لذا $a \in \{10\}$. یک حالت دارد.

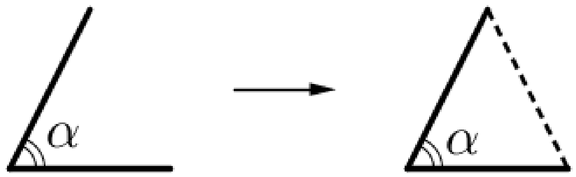
$b = 10$، $a - 10 \Big| 20$ پس $a - 10 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ که چنین حالتی برای a امکان ندارد.

پس در کل به $24 = 1 + 2 + 2 + 4 + 3 + 3 + 4 + 3 + 2$ حالت می‌توان این دو عدد را انتخاب کرد.

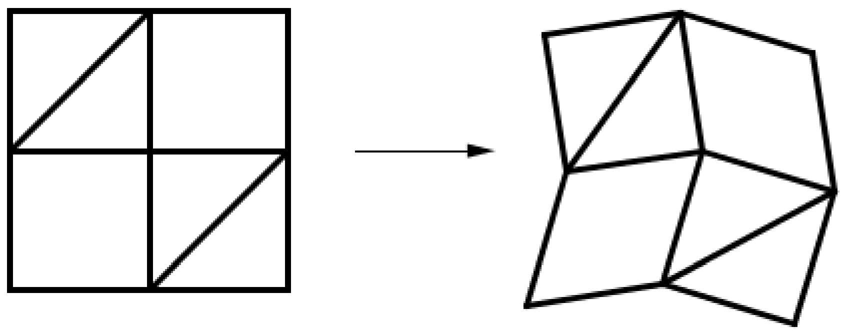
۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

ابتدا توجه کنید که مثلث‌ها نمی‌توانند تغییر شکل بدهند و در نتیجه زوایای درون هر مثلث ثابت هستند. از طرف دیگر اگر در یک لولا زاویه‌ی لولا ثابت باشد، با استفاده از قواعد هم‌نهشتی مثلث‌ها می‌توان نشان داد

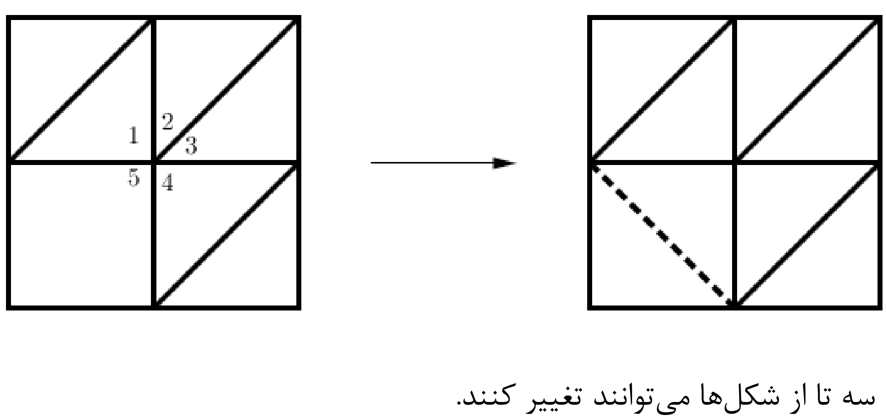
که کل لولا باید ثابت بماند، پس می‌توان ضلع مقابل لولا را اضافه کرد، طوری که در انعطاف‌پذیری شکل تغییری ایجاد نشود. یعنی در شکل زیر اگر α ثابت باشد، می‌توان چوبی در روبه‌روی این زاویه‌ی α اضافه کرد، به گونه‌ای که به صورت سمت راست در آید.



توجه کنید که سومین شکل (از سمت راست) را می‌توان با حرکت دادن به صورت زیر تغییر داد. پس سه شکل اول قابل انعطاف هستند.



اما در شکل چهارم با توجه به توضیحات بالا که مثلث‌ها ثابت هستند، زاویه‌های شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ ثابت هستند. بنابراین زاویه‌ی ۵ هم باید ثابت باشد. پس با توجه به توضیحات بالا می‌توان تکه‌چوبی را بدون تغییر در انعطاف‌پذیری به شکل اضافه کرد طوری که همه‌ی چندضلعی‌های شکل مثلث شوند و به این ترتیب شکل غیرقابل انعطاف است.



پس در کل سه تا از شکل‌ها می‌توانند تغییر کنند.

۸. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به نامساوی حسابی، هندسی می‌دانیم که $a^۲ + b^۲ = \left|a\right|^۲ + \left|b\right|^۲ \geq ۲\left|ab\right|$، پس ناحیه‌ی مورد سؤال زیرمجموعه‌ی $\{(x,y) : \left|y\right| < \frac{x}{۲}\}$ است. از طرف دیگر اگر $x = \sqrt{a}.\sin\theta$ و $y = \sqrt{a}.\cos\theta$ باشد، $(x^۲ + y^۲, xy) = (a, \frac{۱}{۲}a\sin(۲\theta))$ و $\frac{۱}{۲}a\sin(۲\theta)$ برای مقادیر مختلف θ، کل بازه‌ی $[-\frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}]$ را می‌پوشاند. پس در کل مجموعه‌ی مورد نظر، $\{(x,y) : \left|y\right| < \frac{x}{۲}\}$ است.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید بعد از گذشت n ثانیه ملخ خورده شود. اگر وزغ بعد از خوردن ملخ به جای این که سرجای خود بایستد، با همان حرکت‌های ملخ خود را به جای نخستین ملخ برساند، n حرکت قبل از خوردن ملخ انجام داده و بعد از خوردن او هم n حرکت دیگر انجام داده است، پس در کل $۲n$ حرکت کرده است. بالعکس اگر وزغ با $۲n$ حرکت ۲متر را طی کند، می‌توان n حرکت اول را حرکات وزغ و n حرکت بعدی را برعکس حرکات ملخ در نظر گرفت. در واقع ما تناظری بین تعداد راه‌های خورده شدن ملخ توسط وزغ و راه طی کردن مسیر ۲ متر با تعداد زوجی حرکت توسط وزغ برقرار کرده‌ایم. پس باید تعداد زوج حرکت‌هایی را بشماریم که وزغ در آن ۲ متر به جلو می‌رود. اگر به جای ۲۵ و ۵۰ سانتی‌متر، طول حرکات را ۱ و ۲ و کل مسیر را ۸ بگیریم، باید تعداد زوج‌حرکت‌هایی را بشماریم که در آن ۸ واحد طی می‌شود. تعریف می‌کنیم:

$O_n =$ تعداد فرد حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.

$E_n =$ تعداد زوج حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.

با توجه به حرکات وزغ که در هر مرحله یک یا دو واحد طی می‌کند به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$E_{n+۱} = O_n + O_{n-۱}$$
$$O_{n+۱} = E_n + E_{n-۱}$$

و هدف یافتن $E_۸$ است. به کمک جدول زیر و با توجه به این که $E_۱ = ۰$ و $O_۱ = O_۲ = E_۲ = ۱$ این محاسبه را انجام می‌دهیم.

n	۱	2	3	4	5	6	7	8
O_n	1	1	1	3	4	6	11	17
E_n	0	1	2	2	4	7	10	**17**

پس پاسخ عدد ۱۷ است.

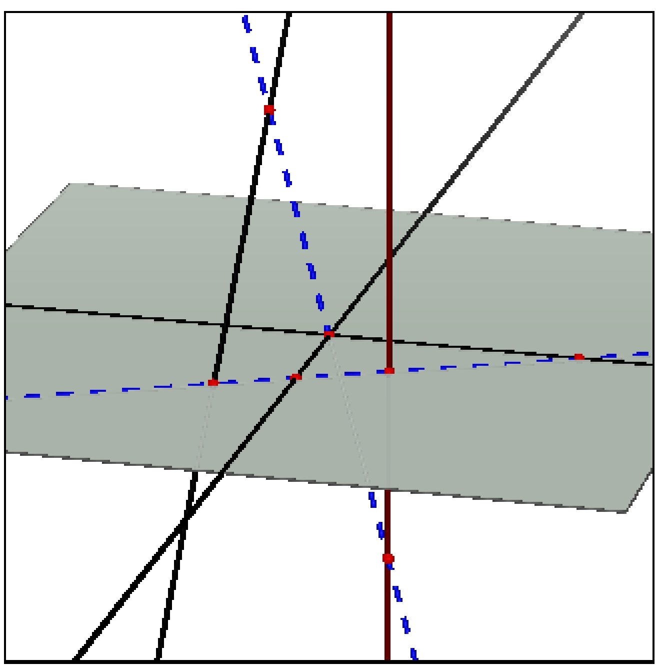
۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید l_1، l_2، l_3 و l_4 ۴ خط صورت سؤال باشند که l_1 و l_2 در نقطه‌ی P متقاطع هستند. اگر خط l هر چهار خط را قطع کند با توجه به این که l_1 و l_2 را هم قطع می‌کند یا باید از نقطه‌ی P بگذرد یا در صفحه‌ی شامل l_1 و l_2 که صفحه‌ای یک‌تاست قرار دارد.

اگر چنین خطی که از نقطه‌ی P می‌گذرد موجود باشد، خطی یک‌تاست زیرا در غیر این صورت اگر l و l' دو خط با این خاصیت باشند، با توجه به این که هر دو شامل نقطه‌ی P هستند در یک صفحه قرار می‌گیرند و چون l_3 و l_4 با هر دو خط تقاطع دارند، آن‌ها نیز باید در همین صفحه باشند که در این صورت باید با هم متقاطع یا موازی باشند که خلاف فرض ماست.

اگر چنین خطی با در صفحه‌ی شامل l_1 و l_2 باشد، از آن‌جا که اشتراک این صفحه با l_3 و l_4 حداکثر در یک نقطه است.(اگر بیش‌تر از یک نقطه اشتراک داشته باشد کل خط باید در این صفحه باشد که باعث می‌شود با l_1 و l_2 موازی و یا متقاطع شود که خلاف فرض است.) پس باید خط l از این دو نقطه بگذرد و بنابراین خط مورد نظر در این حالت هم یک‌تا است.

پس در کل حداکثر دو خط می‌توان داشت. می‌توان مطابق شکل زیر خط‌ها را با توجه توضیحات بالا به گونه‌ای طراحی کرد که دو خط متقاطع با هر چهارتای آن‌ها موجود باشند.(خطوط قطعه‌قطعه دو خط مورد نظر هستند.)



۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند که $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰$ و $x > ۰$، در این صورت $y < ۰$ زیرا اگر $y \geq ۰$، $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ > ۰$ که به وضوح تناقض است.
حال دقت کنید که

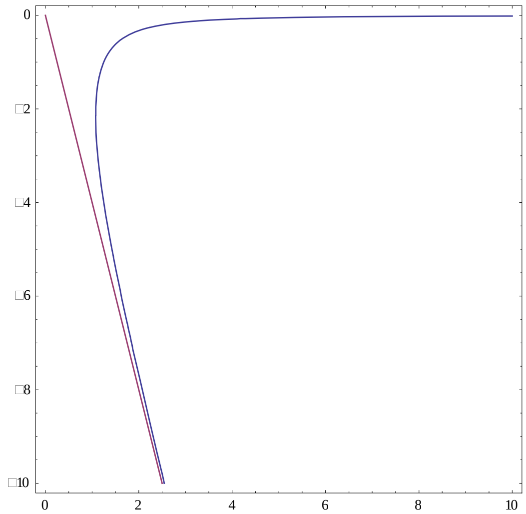
$$xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰ \Rightarrow (\frac{y}{x})^۲ + ۴(\frac{y}{x}) = \frac{-۵}{x^۳} < ۰ \Rightarrow (\frac{y}{x} + ۴)(\frac{y}{x}) < ۰$$

حال چون $\frac{y}{x} < ۰$، $\frac{y}{x} + ۴ > ۰$ و معادلاً $y > -۴x$. پس $a \geq -۴$.
حال ادعا می‌کنیم $a = -۴$. برای این منظور نشان می‌دهیم برای هر $-۴ < a < ۰$ می‌توان $x \in \mathbb{R}^+$ و $y \in \mathbb{R}^-$ یافت که $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰ (\star)$ و ضمناً $y = ax$.

اگر $y = ax$ را در رابطه‌ی $(\star)$ جای‌گزین کنیم، داریم:

$$a^۲x^۳ + ۴ax^۳ + ۵ = ۰ \Leftrightarrow x^۳ = \frac{-۵}{a(۴ + a)} \Leftrightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{-۵}{a(۴ + a)}}$$

که چون $-۴ < a < ۰$، عدد x که در بالا به دست آمده مثبت است و زوج x و $y = ax$ در رابطه‌ی $(\star)$ صدق می‌کنند. پس بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a همان -۴ است.
توضیح: در شکل زیر مجموعه نقاطی در ناحیه‌ی چهارم مختصات که در رابطه‌ی $(\star)$ صدق می‌کنند و هم‌چنین نمودار خط $y = -۴x$ را می‌بینید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید تمام نمودار در این ناحیه در بالای این خط قرار دارد.



۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

طبق رابطه‌ی صورت سؤال $x+y=z(xy-۲)$ و چون x، y و z طبیعی و در نتیجه مثبت هستند، $xy-۲$ هم طبیعی است و به علاوه $(\star)$ $xy-۲\big|x+y$ و لذا $xy-۲\le x+y$. ادعا می‌کنیم که یکی از x و y کم‌تر از ۳ است. به برهان خلف فرض کنید $x,y\ge ۳$. حال داریم:

$$xy-۲\le x+y \Rightarrow xy-x-y\le ۲ \Rightarrow (x-۱)(y-۱)=xy-x-y+۱\le ۳$$

که رابطه‌ی آخر با توجه به این که $x-۱\ge ۲$ و $y-۱\ge ۲$ امکان ندارد.

حال مسئله را بر حسب x و y حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول. $x=۱$. طبق $(\star)$ باید $y-۲\big|y+۱$، معادلاً $y-۲\big|۳$ و لذا $y-۲\in\{-۳,-۱,۱,۳\}$. این حالت در نهایت با توجه به طبیعی بودن x، y و $xy-۲$ منجر به جواب‌های $(۱,۳,۴)$ و $(۱,۵,۲)$ می‌شود. (منظور از سه‌تایی $(۱,۵,۲)$، $x=۱$، $y=۵$ و $z=۲$ است!)

حالت دوم. $x=۲$. در این حالت طبق رابطه‌ی $(\star)$ باید $۲y-۲\big|y+۲$ که این نتیجه می‌دهد $۲y-۲\big|(۲y-۲)-۲(y+۲)$ و لذا $y-۱\big|۳$. بنابراین $y-۱\in\{-۳,-۱,۱,۳\}$. این حالت در نهایت توجه به طبیعی بودن x، y و $xy-۲$ منجر به جواب‌های $(۲,۲,۲)$ و $(۲,۴,۱)$ می‌شود.

حالت سوم. $y=۱$. کاملاً شبیه حالت اول به جواب‌های $(۳,۱,۴)$ و $(۵,۱,۲)$ منجر می‌شود. (دقت کنید که به دلیل تقارن رابطه‌ی صورت سؤال نسبت به x و y اگر (x,y,z) جواب باشد، (y,x,z) هم جواب است.)

حالت چهارم. $y = ۲$. این حالت هم مشابه حالت دوم به $(۲,۲,۲)$ و $(۴,۲,۱)$ منجر می‌شود که جواب $(۲,۲,۲)$ تکراری است. پس در کل مسئله ۷ جواب دارد.

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

یک برنامه‌ریزی غذایی برای تعدادی روز در رستوران را "متنوع" می‌نامیم اگر غذای هر دو روز متوالی متفاوت باشد. حال a_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزیِ متنوع برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر نیز متفاوت باشد. به همین ترتیب b_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزیِ متنوع رستوران برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر یک‌سان باشد. با این ادبیات هدف ما در مسئله یافتن $a_۷$ است.

دقت کنید که اگر یک برنامه‌ریزی متنوع برای n روز داشته باشیم که غذای روز اول و آخر آن یک‌سان باشد، با حذف روز nاُم از برنامه به یک برنامه‌ریزی متنوع برای $n - ۱$ روز می‌رسیم که غذای روز اول و آخر آن متفاوت است. یعنی $b_n = a_{n-۱}$.

از طرف دیگر $a_n + b_n$ تعداد کل روش‌های برنامه‌ریزی متنوع برای رستوران است(با این تفاوت که هیچ رابطه‌ای بین غذای روز اول و آخر نداریم). در یک برنامه‌ریزی متنوعِ n روزه، برای انتخاب غذای روز اول سه حالت داریم. بعد از انتخاب غذای روز اول، برای انتخاب غذای روزهای بعد هر کدام ۲ حالت خواهیم داشت(غذای هر روز باید با غذای روز قبلش متفاوت باشد). پس تعداد کل چنین برنامه‌ریزی‌هایی $۳ \times \underbrace{۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲}_{n-۱}$ است و این یعنی $a_n + b_n = ۳ \times ۲^{n-۱}$. حال داریم:

$$a_n + b_n = ۳ \times ۲^{n-۱} \overset{a_n = b_{n-۱}}{\Rightarrow} a_n = ۳ \times ۲^{n-۱} - a_{n-۱}$$
$$a_n = ۳ \times ۲^{n-۱} - (۳ \times ۲^{n-۲} - a_{n-۲}) = ۳ \times ۲^{n-۲} + a_{n-۲}$$

با توجه به این رابطه‌ی بازگشتی برای $a_۷$ داریم:

$$a_۷ = ۳ \times ۲^۵ + a_۵ = ۳ \times (۲^۵ + ۲^۳) + a_۳ = ۳ \times (۲^۵ + ۲^۳ + ۲^۱) + a_۱$$

که $a_۱ = ۰$(در برنامه‌ریزی برای یک روز حتماً غذای روز اول و آخر یکی می‌شود!) و در نتیجه $a_۷ = ۳ \times ۴۲ = ۱۲۶$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با جمع و تفریق کردن دو رابطه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^۲ + y = xy^۲ \\ y^۲ + x = yx^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ + (x+y)(۱ - xy) = ۰ & (\mathrm{I}) \\ x^۲ - y^۲ + (x-y)(xy - ۱) = ۰ & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

با استفاده از (II) خواهیم داشت:

$$(x-y)(x+y+xy-۱) = ۰$$

پس $x = y$ و یا $x + y = ۱ - xy$. اگر $x + y = ۱ - xy$ با توجه به (I) باید داشته باشیم $x^۲ + y^۲ + (x+y)^۲ = ۰$ که این نتیجه می‌دهد $x = y = ۰$. پس در هر صورت $x = y$:

$$x = y \Rightarrow x + x^۲ = x^۳ \Rightarrow x(x^۲ - x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

پس دست‌گاه معادلات، ۳ جواب حقیقی دارد.

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.