بسمه تعالی

آزمون انتخاب تیم ملی المپیاد ریاضی

دوشنبه، ۱۹ اردیبهشت ۱۳۸۹ | امتحان اول (روز اول) | زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

---

۱. در مثلث حادهٔ الزاویه ABC زاویه B از زاویه C بزرگتر است. M را وسط ضلع BC بگیرید. پای ارتفاع های وارد بر اضلاع AB و AC را به ترتیب D و E و وسط MD و ME را به ترتیب L و K می نامیم. اگر KL خطی که از A به موازات BC رسم می شود را در T قطع کند، نشان دهید $TA = TM$.

۲. به ازای چه اعداد طبیعی $n > ۲$، اعداد طبیعی $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ که همگی با هم برابر نیستند وجود دارند که دنباله‌ی

$$a_۱a_۲, a_۲a_۳, \dots, a_na_۱$$

یک تصاعد حسابی غیر ثابت باشد؟

۳. n نقطه روی یک دایره قرار دارد $(n > ۱)$. منظور از یک "بازه" کمانی از دایره است که دو سر آن از نقاط فوق باشد. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از بازه‌های فوق باشد به طوری که هر عضو از $\mathcal{F}$ مشمول در حداکثر یک عضو دیگر $\mathcal{F}$ است. یک بازه را ماکزیمال می‌نامیم اگر مشمول در هیچ بازه‌ی دیگری نباشد. اگر m تعداد اعضای ماکزیمال $\mathcal{F}$ باشد و a تعداد اعضای غیر ماکزیمال $\mathcal{F}$ باشد ثابت کنید:

$$m + \frac{a}{۲} \leq n$$

موفق باشید

بسمه تعالی

آزمون انتخاب تیم ملی المپیاد ریاضی

سه‌شنبه، ۲۰ اردیبهشت ۱۳۸۹ | امتحان اول (روز دوم) | زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

---

۱. مجموعه‌ی متناهی A از اعداد طبیعی را خوب می‌نامیم اگر شرایط زیر را داشته باشد:

i) برای هر سه عضو متمایز $a, b, c \in A$ داریم: $(a, b, c) = ۱$.

ii) برای هر دو عضو متمایز $b, c \in A$ وجود دارد $a \in A$ که $a \neq b, c$ و $a|bc$.

تمام مجموعه‌های خوب را بیابید.

۲. تمام توابع پوشای $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که به ازای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم:

$$f(x + f(x) + ۲f(y)) = f(۲x) + f(۲y)$$

۳. ω دایره‌ای به مرکز O داده شده است. از نقطه‌ی T خارج ω مماس‌های TB و TC را به آن رسم می‌کنیم. K و H به ترتیب روی پاره‌خط‌های TB و TC قرار دارند.

الف) B' و C' به ترتیب روبه‌رو قطری‌های B و C در ω هستند. K' و H' به ترتیب روی نیمسازهای $\angle CBO$ و $\angle BCO$ قرار دارند طوری که KK' و HH' بر BC عمودند. ثابت کنید K و H' و B' هم‌خطند اگر و تنها اگر H و K' و C' هم‌خط باشند. (۲ نمره)

ب) اگر دو دایره داخل مثلث TBC وجود داشته باشند که در نقطه‌ی J بر یکدیگر و نیز هردو بر ω مماس باشند و هم‌چنین در K بر TB و در H بر TC مماس باشند و I محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های BKJ و CHJ باشد، ثابت کنید I مرکز دایره‌ی محاطی مثلث OBC است. (۵ نمره)

بسمه تعالی

آزمون انتخاب تیم ملی المپیاد ریاضی

پنج‌شنبه، ۲۲ اردیبهشت ۱۳۸۹ | امتحان دوم (روز اول) | زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

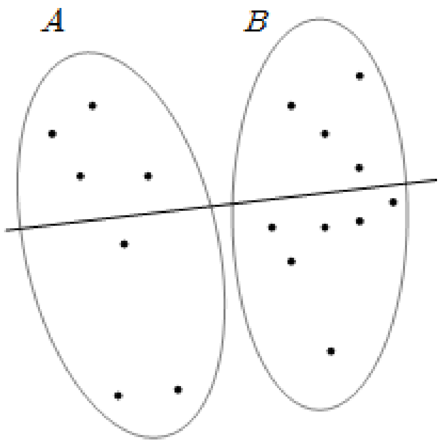
---

۱. مکان هندسی نقاطی مانند P داخل یک مثلث متساوی الاضلاع را بیابید که مجموع جذرهای فواصل P تا دو ضلع مثلث برابر جذر فاصله‌ی P تا ضلع سوم باشد.

۲. n نقطه در صفحه داریم که همگی روی یک خط نیستند. خط l در صفحه را "دانا" می‌نامیم اگر بتوان این n نقطه را به دو مجموعه مثل A و B افراز کرد به طوری که مجموع فواصل نقاط مجموعه‌ی A از l برابر با مجموع فواصل نقاط مجموعه‌ی B از l باشد.

الف) ثابت کنید از هر نقطه در صفحه حداقل دو خط دانا می‌گذرد. (۲ نمره)

ب) ثابت کنید بی‌نهایت نقطه در صفحه وجود دارد که از هریک از آن‌ها حداقل $n+۱$ خط دانا می‌گذرد. (۵ نمره)



۳. برای عدد گویای x ، $<x>$ را فاصله‌ی x تا نزدیکترین عدد صحیح به آن بگیرید. برای اعداد صحیح x ثابت کنید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^n <۲^{-n}x>^۲ = |x|$$

موفق باشید

بسمه تعالی

آزمون انتخاب تیم ملی المپیاد ریاضی

جمعه، ۲۳ اردیبهشت ۱۳۸۹ | امتحان دوم (روز دوم) | زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

---

۱. کمترین k حقیقی را بیابید، به طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d داشته باشیم:

$$\sqrt{(a^۲+۱)(b^۲+۱)(c^۲+۱)}+\sqrt{(b^۲+۱)(c^۲+۱)(d^۲+۱)}$$
$$+\sqrt{(c^۲+۱)(d^۲+۱)(a^۲+۱)}+\sqrt{(d^۲+۱)(a^۲+۱)(b^۲+۱)}$$
$$\geq ۲(ab+bc+cd+da+ac+bd)-k$$

۲. نقطه‌ی M روی کمان AB (که شامل C نیست) از دایره‌ی محیطی مثلث ABC تغییر می‌کند. دایره‌ی ω_M در M بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC ودر N_M بر ضلع AC مماس است. نقطه‌ی T_M روی کمان AC (که شامل B نیست) به گونه‌ای قرار گرفته است که BT بر ω_M مماس است. $T_M N_M$ دایره‌ی محیطی ABC را در K_M قطع می‌کند ثابت کنید نیمساز $\angle BK_MT_M$ از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

۳. تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ به گونه‌ایست که برای هر a, b طبیعی، عبارت $af(a)+bf(b)+۲ab$ مربع کامل است. ثابت کنید برای هر a طبیعی $f(a)=a$.

موفق باشید