



# آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.

۱. بزرگ‌ترین عدد طبیعی  $n$  که هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳ و ...  $۱۱n$  حداکثر سه مقسوم علیه اول داشته باشند چند است؟



۲. دوازده کشتی‌گیر در جام جهان‌پهلوان تختی شرکت کرده‌اند. ممکن است دو کشتی‌گیر چند بار با هم مبارزه کنند. کسی که پنج بار ببازد از دور رقابت‌ها حذف می‌شود. در این جام حداکثر چند کشتی برگزار می‌شود؟ (توجه کنید که کشتی تساوی ندارد.)

۳. نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۱۱ نفره اعدادی صحیح از صفر تا ۲۰ است. فرض کنید میانگین نمرات ۱۸ و میانگین نمرات ۱۹ است؛ کم‌ترین نمره کلاس حداقل چند می‌تواند باشد؟ (میانگین ۱۱ نمره، نمره‌ای است که پس از مرتب کردن نمرات به ترتیب نزولی، در رتبه ششم قرار می‌گیرد.)



۴. قیمت سهام شرکت «نوسان‌سازان شدید» دچار نوسانات شدیدی شده است! در ابتدای ورود شرکت به بازار بورس، هر سهم آن هزار ریال قیمت‌گذاری شد. پس از یک روز، قیمت هر سهم یک ریال کاهش پیدا کرد. سپس به مدت دو روز، هر روز یک ریال افزایش یافت. سپس به مدت سه روز، هر روز یک ریال کاهش یافت و الی آخر. بعد از گذشت ۳۶۵ روز از ورود شرکت به بازار بورس قیمت هر سهم چند ریال است؟

۵. به ازای چند عدد صحیح  $a$ ، معادله  $x^2 + ax + ۱۳۸۹ = ۰$  ریشه‌ای صحیح دارد؟

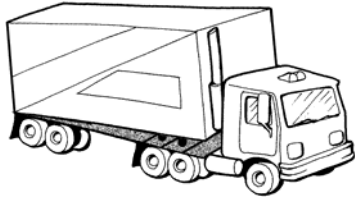


# آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور

۶. فرض کنید  $n$  کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد که برای  $m$  از ۲ تا ۶،  $\sqrt[m]{n}$  عددی طبیعی است.  $n$  چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۷. طول محفظه کامیونی ۴ متر و عرض و ارتفاع آن ۲ متر است. مقداری آب در محفظه کامیون جمع شده که در حالت افقی بودن محفظه، ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است. راننده می‌خواهد برای

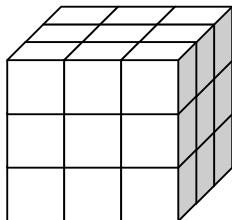


جلوگیری از زنگ زدن محفظه، آن را بالا بیاورد طوری که سطح تماس آب با بدنه کم‌ترین مقدار ممکن شود. سقف و در محفظه بسته است. او باید محفظه را چند درجه بالا بیاورد؟ (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)

۸. کوچکترین عدد  $n$  که  $17^n$  مقسوم‌علیه  $\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1 \times 2 \times \dots \times n}$  باشد، چند است؟



۹. سه رادار بر روی زمین طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌های آن‌ها از هم ۶، ۸ و ۱۰ کیلومتر است. در یک لحظه، هر سه فاصله هواپیمایی تا خود را ۱۳ کیلومتر گزارش می‌کنند. ارتفاع هواپیما تا سطح زمین چند کیلومتر است؟ زمین را مسطح فرض کنید. (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)



۱۰. مکعبی به ضلع سه در نظر بگیرید که به مکعب‌های به ضلع یک تقسیم شده است. چند خط وجود دارد که با وجه پایینی مکعب بزرگ زاویه ۴۵ درجه می‌سازد و دست‌کم از مرکز دو تا از مکعب‌های کوچک می‌گذرد؟



# آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور

دانش آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج گزینه‌ای پاسخ دهید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.

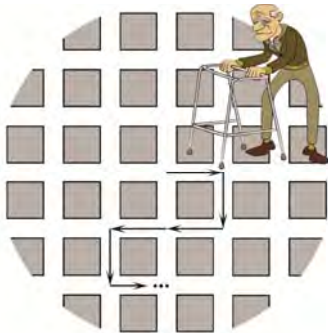
۱. در متوازی الاضلاع  $ABCD$  داریم  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . این متوازی الاضلاع را حول رأس  $A$  به اندازه  $60^\circ$  دوران می‌دهیم. دوران یافته نقاط  $B, C$  و  $D$  را به ترتیب  $B', C'$  و  $D'$  می‌نامیم.

نسبت  $\frac{CC'}{AC}$  چه قدر است؟

- (الف)  $\frac{4}{5}$  (ب)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (ج)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$  (د)  $\frac{6}{5}$  (ه) ۱

۲. به ازای چند عدد طبیعی  $k$ ، عدد  $\frac{596+k}{700-k}$  نیز طبیعی است؟

- (الف) ۲۴ (ب) ۲۵ (ج) ۳۷ (د) ۴۹ (ه) ۵۰



۳. آقای فراموش‌کار، ۹۲ ساله، ساعت ۷ صبح از منزل خود که در چهارراه مرکزی شهر است خارج شده و تا کنون که ساعت ۱۰ شب است به منزل برنگشته است. خیابان‌های شهر، افقی و عمودی هستند و فاصله هر دو چهارراه مجاور یک کیلومتر است. می‌دانیم که نامبرده در هر ساعت از چهارراهی به چهارراه مجاورش می‌رود. اکنون او در چند چهارراه ممکن است باشد؟

(الف) ۲۴۰ (ب) ۲۵۶ (ج) ۴۸۰ (د) ۴۸۱ (ه) ۹۶۹

۴. یک جعبه شکلات یازده ردیف یازده تایی دارد. شکلات‌های موجود را هر طور قرار دهیم در بیش‌تر ردیف‌های افقی، بیش‌تر خانه‌ها خالی است. تعداد شکلات‌ها حداکثر چند تا است؟

- (الف) ۳۵ (ب) ۳۶ (ج) ۶۶ (د) ۸۵ (ه) ۸۶

۵. در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{B} = 45^\circ$  و  $\hat{C} = 30^\circ$ . نقاط  $P, D$  و  $E$  را، به ترتیب، روی اضلاع  $BC, AB$  و  $AC$  طوری انتخاب می‌کنیم که  $PE \perp AC$ ،  $PD \perp AB$  و

$DE \parallel BC$ . نسبت  $\frac{PB}{PC}$  چند است؟

- (الف)  $\frac{1}{2}$  (ب)  $\frac{3}{4}$  (ج)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (د)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  (ه)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



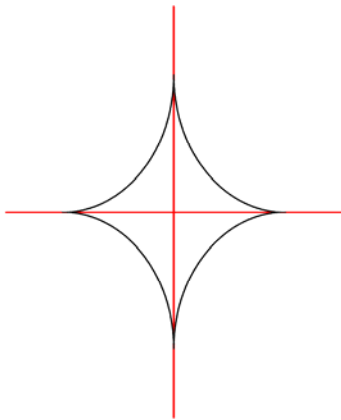
# آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور

۶. کوچک‌ترین عدد گویای مثبت است که بسط اعشاری  $q^3$  به شکل  $abcabcabc\dots$  است

که  $a, b, c$  و ارقامی از بین  $0, 1, 2, \dots, 9$  هستند.  $a + b + c$  چند است؟

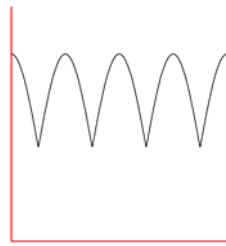
- (الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۷ (د) ۱۸ (ه) ۲۷



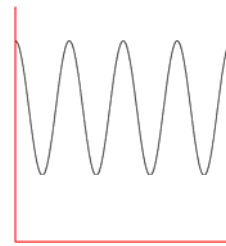
۷. متحرکی از نقطه  $(1, 0)$  شروع کرده و با سرعت ثابت در جهت

مثلثاتی، روی شکل روبه‌رو حرکت می‌کند. نمودارِ مجموع

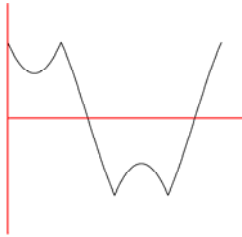
مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  آن بر حسب زمان، شبیه کدام گزینه است؟



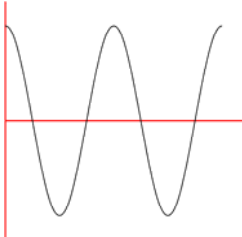
(ب)



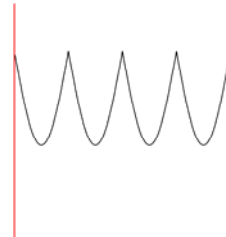
(الف)



(ه)



(د)



(ج)

۸. بزرگ‌ترین عدد حقیقی  $M$  را طوری بیابید که برای هر  $a, b \in [0, 1]$  داشته باشیم

$$a^2 + b^{1389} \geq Mab$$

- (الف) صفر (ب)  $2^{-1386}$  (ج) ۱ (د)  $\frac{1391}{1389}$  (ه) ۲

۹. دانش‌آموزی می‌خواهد کتاب‌های ریاضی، فیزیک، ادبیات و عربی اول و دوم دبیرستان را در هشت

هفته، در هر هفته یک کتاب، مرور کند. او باید کتاب سال دوم هر موضوع را زمانی مطالعه کند که

کتاب سال اول آن موضوع را قبلاً خوانده باشد. این کار به چند روش ممکن است؟

- (الف) ۷۰ (ب) ۵۷۶ (ج) ۲۵۲۰ (د) ۲۰۱۶۰ (ه) ۴۰۳۲۰

۱۰. برای چند زوج مرتب  $(a, b)$  از اعداد طبیعی که  $1 \leq a, b \leq 10$ ، معادله  $x^2 = ax - b$

ریشه‌ای در  $[0, 1]$  دارد؟

- (الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۲۰ (د) ۴۵ (ه) ۶۲



# آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور

۱۱. عدد  $۲۱۰۳۱۵^{۱۲}$  روی تخته نوشته شده است. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد (غیر از خودش) را در نظر گرفته و آن را از عدد روی تخته کم می‌کنیم و حاصل را به جای عدد روی تخته می‌نویسیم. همین کار را با عدد جدید انجام می‌دهیم. پس از چند بار به عدد ۱ می‌رسیم؟ (مثلاً اگر در ابتدا عدد ۷ روی تخته می‌بود، پس از ۴ مرحله به عدد ۱ می‌رسیدیم: ۶، ۳، ۲ و ۱).

الف) ۳۳ (ب) ۴۵ (ج) ۵۶ (د) ۶۸ (ه) ۸۰

۱۲. سه ساعت داریم که اولی سالم است، دومی هر ساعت، ۷ دقیقه و سومی هر ساعت ۱۱ دقیقه جلو می‌افتد. اگر ساعت‌ها در ظهر امروز به درستی تنظیم شوند بعد از گذشت چند ساعت، هر دو ساعت خراب، ۶ ساعت جلوتر از ساعت سالم را نشان می‌دهند؟

الف) ۱۸ (ب) ۷۷ (ج) ۱۸۰ (د) ۳۶۰ (ه) ۷۲۰

۱۳. فرض کنید  $f(abc) = ab + bc + ca$  که  $\overline{abc}$  نمایش در مبنای ۱۰ است. دقت کنید ممکن است برخی از  $a$ ،  $b$  و  $c$  صفر باشند. مثلاً  $f(۲۳) = ۰ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۰ = ۶$ . مجموع  $f(۰) + f(۱) + \dots + f(۹۹۹)$  چند است؟

الف) ۲۴۳ (ب) ۶۹۳۰ (ج) ۶۰۷۵۰ (د) ۱۲۱۵۰۰ (ه) ۴۹۹۵۰۰

۱۴. کاغذی مربعی به ضلع  $۲۰\text{cm}$  از یکی از اضلاع به وسط یک میز بزرگ چسبیده و می‌تواند حول آن ضلع دوران بکند. دو طرف این کاغذ کاملاً جوهری شده است و به هر جایی که مالیده شود آن را جوهری می‌کند. می‌خواهیم تنها با تا کردن و خم کردن کاغذ و مالیدن و تکان دادن آن بیش‌ترین سطح ممکن از میز را رنگی کنیم. حداکثر چند سانتی‌متر مربع از میز را می‌توان رنگی کرد؟

الف)  $۲۰۰\pi + ۴۰۰$  (ب)  $۳۰۰\pi + ۲۰۰$  (ج)  $۴۰۰\pi$  (د)  $۶۰۰\pi$  (ه)  $۶۰۰\pi - ۴۰۰$

۱۵. فرض کنید  $H$  محل برخورد ارتفاع‌های مثلث  $ABC$  باشد. از  $H$  خطی به موازات ضلع  $AC$  رسم می‌کنیم تا ضلع  $BC$  را در نقطه  $D$  قطع کند. نقطه  $E$  را روی دایره محیطی مثلث بین  $A$  و  $C$  طوری انتخاب می‌کنیم که  $\widehat{HDB} = \widehat{EDC}$ . اگر  $DH = ۱$ ،  $HB = ۳$  و  $BA = ۸۹$ ، چه قدر است  $AE$ ؟

الف) ۳۰ (ب)  $\frac{۸۹}{۳}$  (ج)  $\frac{۸۶}{۳}$  (د)  $\frac{۸۵}{۳}$  (ه)  $\frac{۴۵}{۲}$