بسم الله الرحمن الرحیم

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۸۹

سؤال شماره ۱. چندجمله‌ای دو متغیره

درجه‌ی P را با d نشان می‌دهیم. در نتیجه با توجه به فرضیات مسئله، d حداقل ۱ است، Q یک چندجمله‌ای همگن (یعنی درجه‌ی همه‌ی تک‌جمله‌ای‌های آن برابر است) از درجه‌ی d است و (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه‌ی غیر از مبدأ در صفحه هستند.

لم. فرض کنید $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ و $P(x_0, y_0) \neq 0$. در این‌صورت برای اعداد مثبت به اندازه‌ی کافی بزرگ r، $P(rx_0, ry_0)$ با $Q(x_0, y_0)$ هم‌علامت است.

اثبات. قرار دهید $R = P - Q$. در این‌صورت درجه‌ی همه‌ی جملات R از d کم‌تر است. به راحتی می‌توان نشان داد که عدد مثبت K وجود دارد که برای هر عدد مثبت $r > 1$،

$$|R(rx_0, ry_0)| < Kr^{d-1}.$$

از طرفی بنابر همگن بودن Q، $Q(rx_0, ry_0) = r^d Q(x_0, y_0)$. پس برای $r > 1$ داریم:

$$\begin{aligned} P(rx_0, ry_0) &= Q(rx_0, ry_0) + R(rx_0, ry_0) \\ &> r^d Q(x_0, y_0) - Kr^{d-1} = r^{d-1}(rQ(x_0, y_0) - K). \end{aligned}$$

درنتیجه اگر $Q(x_0, y_0)$ مثبت باشد و r از $\frac{K}{Q(x_0, y_0)}$ و ۱ بزرگ‌تر باشد، $P(rx_0, ry_0)$ هم مثبت است. همین‌طور برای $r > 1$:

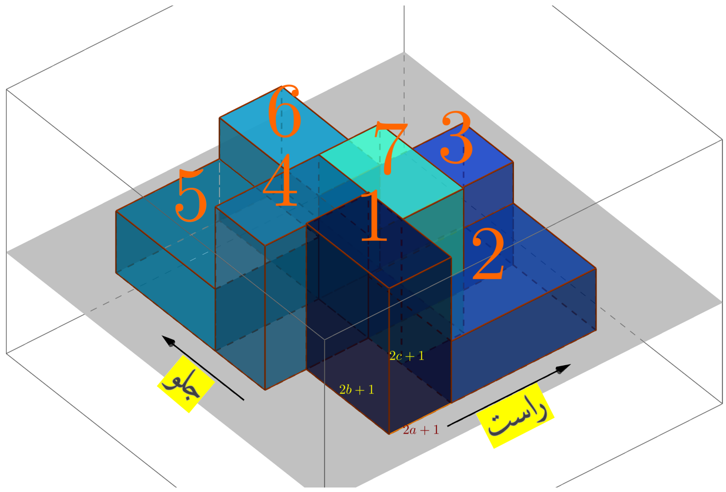
$$P(rx_0, ry_0) < r^{d-1}(rQ(x_0, y_0) + K).$$

پس اگر $Q(x_0, y_0)$ منفی باشد و r از $-\frac{K}{Q(x_0, y_0)}$ و ۱ بزرگ‌تر باشد، $P(rx_0, ry_0)$ هم منفی است. درنتیجه در هر دو صورت حکم لم برقرار است. $\square$

حال اگر لم بالا را برای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که برای اعداد به اندازه‌ی کافی بزرگ M، دو نقطه به صورت (rx_1, ry_1) و (sx_2, sy_2) روی دایره‌ی به شعاع M حول مبدأ پیدا می‌شود که مقدار P در یکی از آن‌ها مثبت و در دیگری منفی است. وقتی از نقطه‌ی اول روی یک کمان این دایره به سمت نقطه‌ی دوم حرکت می‌کنیم، مقدار P از یک عدد مثبت شروع می‌شود و نهایتاً به یک عدد منفی می‌رسد. پس با توجه به پیوستگی مقادیر P، مقادیر P همه‌ی اعداد مابین مقدار اولیه و مقدار نهایی -از جمله صفر- را پوشش می‌دهد. درنتیجه P روی دوایر با شعاع به دل‌خواه بزرگ حول مبدأ صفر می‌شود و مجموعه‌ی نقاطی که مقدار P در آن‌ها صفر است، کران‌دار نیست.

سؤال شماره ۲. مکعب غلطان

فرض کنید در ابتدا نحوه‌ی قرار گرفتن مکعب روی زمین، شبیه مکعب شماره (۱) در شکل زیر باشد. مطابق شکل با غلطاندن آن به ترتیب به سمت راست، جلو، چپ، جلو، راست و در نهایت به سمت عقب این مکعب به مکعب شماره (۷) تبدیل می‌شود که انتقال‌یافته‌ی مکعب اول به اندازه‌ی بردار $(۲a+۱, ۲a+۱)$ است و به علاوه دوباره همان وجه اولیه روی زمین قرار دارد.



اگر همه‌جا در حرکت‌هایمان جای راست و چپ را با هم عوض کنیم، طبیعتاً به بردار $(-(۲a+۱), ۲a+۱)$ می‌رسیم و اگر جای جلو و عقب را عوض کنیم به بردار $(۲a+۱, -(۲a+۱))$ خواهیم رسید و اگر همه‌ی جهت‌ها را عکس کنیم به بردار $(-(۲a+۱), -(۲a+۱))$ می‌رسیم. با توجه به تقارنی که این شکل نسبت به a و b دارد، می‌توان آن را به گونه‌ای غلطاند که به اندازه‌ی بردار $(\pm(۲b+۱), \pm(۲b+۱))$، در صفحه انتقال پیدا کند. توجه کنید که در تمام این حالت‌ها همان وجه اولیه با همان جهت اولیه در نهایت روی زمین قرار دارد. برای رسیدن به بردارهای $(\pm(۲c+۱), \pm(۲c+۱))$ هم کافی است ابتدا مکعب را به سمت راست بغلطانیم تا یکی از ضلع‌های مستطیل روی زمین برابر $۲c+۱$ باشد و با حرکت‌هایی شبیه به بالا آن را به اندازه‌ی بردار مطلوب حرکت دهیم و دست آخر، یک بار مکعب را به سمت چپ بغلطانیم تا همان وجه اولیه (با همان وضعیت اولیه) روی زمین باشد.
بنابراین اگر بتوانیم خانه‌ای شبکه‌ای در صفحه با مختصات (x, y) را رنگی کنیم، می‌توانیم خانه‌های زیر را هم رنگی نماییم:

$$(x\pm(۲a+۱), y\pm(۲a+۱)), (x\pm(۲b+۱), y\pm(۲b+۱)), (x\pm(۲c+۱), y\pm(۲c+۱))$$

حال ادعا می‌کنیم که اگر خانه‌ی (x, y) رنگی شود می‌توانیم هر کدام از خانه‌های $(x\pm۱, y\pm۱)$ را هم رنگی نماییم. برای این منظور توجه کنید که با توجه به نسبت به هم اول بودن اضلاع مکعب، می‌توان اعداد صحیح r, s, t یافت که

$$r(۲a+۱)+s(۲b+۱)+t(۲c+۱)=۱$$

برای هر انتخاب $\epsilon_۱, \epsilon_۲$ از ±۱ می‌توان با توجه به نکته‌های بالا با r بار استفاده از بردار $(\epsilon_۱(۲a+۱), \epsilon_۲(۲a+۱))$، s بار استفاده از بردار $(\epsilon_۱(۲b+۱), \epsilon_۲(۲b+۱))$ و در نهایت t بار استفاده از بردار $(\epsilon_۱(۲c+۱), \epsilon_۲(۲c+۱))$ از خانه‌ی (x, y) به خانه‌ی $(x+\epsilon_۱, y+\epsilon_۲)$ برویم و با این عمل می‌توان به همه‌ی نقطه‌هایی که زوجیت مجموع دو مؤلفه‌ی آن با (x, y) یک‌سان است، رسید.
برای رسیدن به نقطه‌هایی که زوجیت مجموع دو مؤلفه‌ی آن با خانه‌ی اولیه‌ی ما تفاوت دارد، دقت کنید که اگر مکعب

را به سمت راست سپس جلو و دوباره راست بغلطانیم، در این سه حرکت مجموع مؤلفه‌ها به ترتیب به مقدار $a+c+۱$، $a+b+۱$ و $b+c+۱$ واحد تغییر می‌کند. با توجه به این که جمع این سه عدد یعنی $۲a+۲b+۲c+۳$ عددی فرد است پس حتماً در یکی از سه گام مجموع مؤلفه‌ها مقدار فردی تغییر کرده است و می‌توانیم با شروع از آن وضعیت و اجرای فرآیند بالا مابقی خانه‌ها را نیز رنگی کنیم.

توجه. با توجه به راه‌حل بالا می‌بینیم که در صورت مسئله لازم نبود که طول سه ضلع مکعب دو به دو نسبت به هم اول باشند و تنها کافی بود که طول سه ضلع عامل اول مشترکی نداشته باشد، یعنی $(۲a+۱, ۲b+۱, ۲c+۱) = ۱$.

سؤال شماره ۳. نقاط در صفحه

الف. نقطه‌ی دل‌خواهی از صفحه را به عنوان مبدأ مختصات در نظر بگیرید. فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ که $\vec{a_i}$ها بردارهایی در صفحه هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$A_i = A + \vec{a_i} = \{a + a_i | a \in A\}$$

دقت کنید که $a_i + a_j \in A_i \cap A_j$. ادعا می‌کنیم که $A_i \cap A_j$ نمی‌تواند بیش‌تر از یک عضو داشته باشد. به برهان خلف فرض کنید این چنین نباشد، یعنی عنصر x غیر از $\vec{a_i} + \vec{a_j}$ باشد که $x \in A_i \cap A_j$. داریم:

$$x \in A_i, x \neq a_i + a_j \Rightarrow \exists i_1 \neq j, x = a_i + a_{i_1}$$

$$x \in A_j, x \neq a_i + a_j \Rightarrow \exists i_2 \neq i, x = a_j + a_{i_2}$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$a_{i_1} + a_i = a_{i_2} + a_j \Rightarrow a_{i_1} - a_{i_2} = a_j - a_i$$

در این صورت ۴ عنصر $a_i, a_j, a_{i_1}, a_{i_2}$ از A تشکیل یک متوازی‌الاضلاع می‌دهند که با فرض صورت سؤال تناقض دارد.
در پایان می‌توان به سادگی دید که اشتراک هر سه‌تایی از A_iها برابر تهی است. چرا که اگر برای سه اندیس متمایز i, j, k، $A_i \cap A_j \cap A_k$ ناتهی باشد، با توجه به این که $A_i \cap A_j = \{\vec{a_i} + \vec{a_j}\}$ باید $\vec{a_i} + \vec{a_j} \in A_k$، این یعنی اندیس l وجود دارد که

$$\vec{a_i} + \vec{a_j} = \vec{a_k} + \vec{a_l} \Rightarrow \vec{a_i} - \vec{a_k} = \vec{a_l} - \vec{a_j}$$

که باز هم یک متوازی‌الاضلاع از اعضای A تشکیل می‌دهد که با فرض مسئله تناقض دارد.

ب. در این قسمت مبدأ مختصات را نقطه‌ای در صفحه خارج از مجموعه‌ی A بگیرید، به علاوه فرض کنید صفحه‌ی مورد بحث صفحه‌ی اعداد مختلط و $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ اعداد مختلط متناظر با اعضای مجموعه‌ی A باشند.
در این‌جا تعریف می‌کنیم:

$$A_i = Aa_i = \{aa_i : a \in A\}$$

با توجه به این که ضرب کردن در عدد مختلط a_i یک تجانس مارپیچی به مرکز مبدأ (ترکیب یک دوران و تجانس) را در صفحه مشخص می‌کند، A_i نسخه‌ای از A خواهد بود. مشابه قبل $a_i a_j \in A_i \cap A_j$. حال اگر $x \neq a_i a_j$ عنصر دیگری در $A_i \cap A_j$ باشد، داریم:

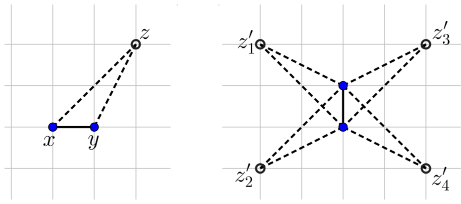
$$x \in A_i, x \neq a_i a_j \Rightarrow \exists l \neq j, a_l a_i = x$$

$$x \in A_j, x \neq a_i a_j \Rightarrow \exists k \neq i, a_k a_j = x$$

در نتیجه $a_l a_i = a_k a_j$ و یا $\frac{a_i}{a_k} = \frac{a_j}{a_l}$ (دقت کنید همه‌ی a_iها ناصفر هستند). در این صورت مبدأ مختصات مرکز تجانس مارپیچی است که a_k را به a_i و a_l را به a_j می‌فرستد. تعداد چنین تبدیل‌هایی (تجانس مارپیچی‌هایی که یک جفت از نقطه‌های A را به جفت دیگری بفرستند)، به دلیل متناهی بودن تعداد نقطه‌های A، متناهی است. پس می‌توانیم از ابتدا مبدأ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مرکز هیچ کدام از این تبدیل‌ها نباشد. بنابراین $A_i \cap A_j$ شامل تنها $a_i a_j$ است. مشابه استدلال آخرین بخش راه‌حل قسمت الف، اگر اشتراک سه تا از A_iها ناتهی شود، باید یک تجانس مارپیچی به مرکز مبدأ یک جفت از نقطه‌های A را به جفت دیگری بفرستد که به دلیل فرض بالا این امکان ندارد و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

سؤال شماره ۴. کاشی‌کاری

فرض کنید z نقطه‌ی شبکه‌ای دیگری در S باشد و S' یک کاشی دیگر. x'، y' و z' را به ترتیب نقطه‌های متناظر با x، y و z در S' فرض کنید. مطابق شکل زیر تنها ۴ مکان ممکن برای قرار گرفتن z' وجود دارد که همگی نقطه‌های شبکه‌ای هستند. پس تعداد نقطه‌های شبکه‌ای در کاشی‌های مختلف با هم برابر است. این مقدار برابر را k بنامید.



فرض $d \in \mathbb{N}$ از فاصله‌ی بین هر دو نقطه در S بیش‌تر باشد. برای عددی طبیعی مثل D، دو مربع هم‌مرکز یکی به ضلع D و دیگری به ضلع $D + ۲d$ در نظر بگیرید که رئوس هر دو متشکل از نقطه‌های شبکه‌ای باشند. تعداد کاشی‌هایی که با مربع داخلی اشتراک دارند را u بنامید. از آن‌جا که هر کاشی k رأس شبکه‌ای دارد، تعداد کل رئوس شبکه‌ای که توسط این u کاشی پوشانده می‌شود، uk است که نمی‌تواند از رئوس شبکه‌ای درون یا روی مرز مربع $D \times D$ کم‌تر باشد (چون این u کاشی مربع $D \times D$ را پوشانده‌اند). پس $uk \geq (D + ۱)^۲$. با توجه به انتخاب d هیچ یک از این u کاشی نمی‌توانند نقطه‌ای بیرون مربع به ضلع $D + ۲d$ داشته باشند و بنابراین $uk \leq (D + ۲d + ۱)^۲$.

حال مساحت S را با s نمایش می‌دهیم. از استدلالی شبیه بالا این بار در مورد مساحت نتیجه می‌شود که:

$$D^۲ \leq us \leq (D + ۲d)^۲$$

از طرف دیگر هم داشتیم:

$$(D + ۱)^۲ \leq uk \leq (D + ۲d + ۱)^۲$$

با استفاده از این دو رابطه داریم:

$$\left(\frac{D + ۱}{D + ۲d}\right)^۲ \leq \frac{k}{s} \leq \left(\frac{D + ۲d + ۱}{D}\right)^۲$$

چون این نابرابری‌ها برای هر D برقرار هستند، با بزرگ‌کردن مقدار D، هر دو جمله‌ی سمت چپ و سمت راست نابرابری به ۱ میل می‌کنند و لذا $k = s$ و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

سؤال شماره ۵. دنباله‌ی جالب

فرض کنید X مجموعه‌ی همه‌ی nتایی‌های مرتب با درایه‌های در مجموعه‌ی $\{+۱,-۱\}$ باشد و $X' = X - \{(۱,۱,\dots,۱)\}$. به علاوه برای هر عنصر $x \in X$ از نماد $[x]_i$ برای نمایش مؤلفه‌ی iام آن استفاده می‌کنیم، یعنی $x = ([x]_۱, [x]_۲, \dots, [x]_n)$.

لم. برای هر k عدد طبیعی $۰ < i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k \le n$، داریم:

$$\sum_{x \in X'} \left([x]_{i_۱}[x]_{i_۲}\cdots[x]_{i_k}\right) = -۱$$

اثبات. توجه کنید که برای هر عنصر x در X می‌توان عنصر یک‌تای x' یافت که فقط در مؤلفه‌ی $i_۱$ام تفاوت داشته باشند و بقیه‌ی مؤلفه‌های آن‌ها یک‌سان باشد در این صورت

$$[x]_{i_۱},[x]_{i_۲}\cdots[x]_{i_k} + [x']_{i_۱}[x']_{i_۲}\cdots[x']_{i_k} = ۰$$

و در نتیجه اگر مجموع بالا روی کل X باشد، حاصل برابر صفر خواهد شد. حال که مجموع روی X' است، باید مقدار مربوط به $(۱,۱,\dots,۱)$ که برابر ۱ است را از آن کم کنیم که این رابطه‌ی مورد نظر را نتیجه می‌دهد. □

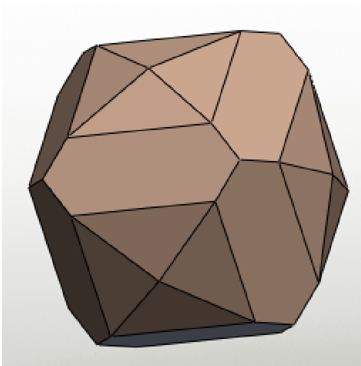
با توجه به دو خاصیت دنباله‌ی x_i در صورت مسئله برای هر $۱ \le i \le ۲^n - ۱$، nتایی‌های $(x_i, x_{i+۱}, \dots, x_{i+n-۱})$ همگی متمایز هستند. چرا اگر دو تا از آن‌ها با هم برابر باشند، با توجه به این هر عنصر دنباله با تعیین شدن n عنصر قبلی و یا بعدی‌اش به طور یک‌تا (با قاعده‌ای که دومین خاصیت دنباله در صورت مسئله بیان می‌کند) تعیین می‌شوند، دوره‌ی تناوب دنباله عددی کم‌تر از $۲^n - ۱$ خواهد شد. به علاوه هیچ‌یک از این nتایی‌ها $(۱,۱,\dots,۱)$ نیست، چرا که در این صورت دنباله‌ی x_i، دنباله‌ی ثابت ۱ خواهد بود. بنابراین همه‌ی $۲^n - ۱$، nتایی مجموعه‌ی X' در این بین دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

دنباله‌ی x_i را می‌توان به صورت $x_i = x_{i+۲^n-۱}$ برای مقادیر منفی i هم تعریف کرد و خواص صورت مسئله در مورد این دنباله‌ی جدید هم کماکان صادق است. نشان می‌دهیم که اعداد صحیح $۰ < u_۱ < u_۲ < \cdots \le u_p \le n$ وجود دارد که $x_i x_{i+s}$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب $x_{i-u_۱}x_{i-u_۲}\cdots x_{i-u_p}$ نوشت. برای این منظور دقت کنید که x_i را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب تعدادی از عناصر مجموعه‌ی $\{x_{i-۱}, x_{i-۲}, \dots, x_{i-n}\}$ نوشت. در مورد x_{i+s} هم را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب تعدادی از n عنصر قبلی‌اش در دنباله نوشت و به همین ترتیب هر کدام از عناصر این ضرب را به صورت حاصل‌ضرب تعدادی از عناصر قبلی آن می‌نویسیم و ... تا این که به صورت حاصل‌ضرب تعدادی از عنصرهای مجموعه‌ی $\{x_{i-۱}, x_{i-۲}, \dots, x_{i-n}\}$ برسیم. مشکل این است که ممکن است بعضی از عناصر در حاصل‌ضرب نهایی توان‌دار باشند. اگر x_k^m در حاصل‌ضرب ظاهر شده باشد، با توجه به این که x_iها ۱ یا -۱ هستند، اگر m فرد باشد، $x_i^m = x_i$ و x_i را با x_i^m جای‌گزین می‌کنیم. اگر هم m زوج باشد، $x_i^m = ۱$ که می‌توان آن را از حاصل‌ضرب حذف کرد. حال اگر با این حذف‌کردن‌ها هیچ جمله‌ای باقی نماند نتیجه می‌گیریم که $x_i x_{i+s} = ۱$ و در نتیجه $x_i = x_{i+s}$ که با این فرض که دوره تناوب دنباله ۲^n است تناقض دارد. پس ادعا ما ثابت شد.

با این توضیحات $\sum\limits_{i=۱}^{۲^n-۱} x_i x_{i+s}$ به صورت $\sum\limits_{i=۱}^{۲^n-۱} x_{i-u_۱}x_{i-u_۲}\cdots x_{i-u_p}$ خواهد بود. در نهایت با توجه به تناوب دنباله و لم بالا این مجموع برابر -۱ خواهد بود.

سؤال شماره ۶. چندوجهی

نشان می‌دهیم که چندوجهی خواسته‌شده در صورت مسئله (حجیم‌ترین چندوجهی) ۳۶ وجه دارد. به وضوح این چندوجهی اشتراک سه استوانه‌ی توپر با قاعده‌ی ۱۲ضلعی‌های خوب در سه صفحه‌ی مختصات است.
حال به بررسی اشتراک این سه استوانه می‌پردازیم. ابتدا استوانه‌ی مربوط به ۱۲ضلعی صفحه‌ی xy را در نظر گرفته و اشتراک آن با ۱۲ضلعی مربوط به صفحه‌ی xz را بررسی کنید. ادعا می‌کنیم که هر کدام از وجه‌های استوانه‌ی دوم یک وجه به استوانه‌ی قبلی اضافه می‌کند و تعداد وجه‌های این اشتراک برابر ۲۴ است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که هر کدام از وجه‌های استوانه‌ی مربوط به صفحه‌ی xz، درون (و نه تنها نقاط مرزی) استوانه‌ی صفحه‌ی xy را قطع می‌کند. با توجه به این که استوانه‌ی xy و هر یک از وجه‌های استوانه‌ی xz اشکالی محدب[1] در فضا هستند، اشتراک آن‌ها هم شکلی محدب خواهد شد و لذا حداکثر یک وجه به چندوجهی ما اضافه خواهد کرد. از طرف دیگر تصویر استوانه‌ی xy روی صفحه‌ی xz یک نوار توپر در این صفحه است که ۱۲ضلعی موجود در این صفحه را شامل می‌شود. پس ضلع مربوط به وجه یادشده را هم شامل است و بنابراین استوانه‌ی xy وجه متناظر به آن ضلع را قطع می‌کند.
پس اشتراک این دو استوانه یک چندوجهی است که ۲۴ وجه دارد و از آن‌جا که هر دو استوانه محدب هستند، این چندوجهی که اشتراک دو استوانه است، خود محدب است. از سوی دیگر این چندوجهی شامل نقطه‌های $(۰,۰,۱)$، $(-۱,۱,۰)$، $(۰,-۱,۱)$ و $(-۱,-۱,۰)$ هست و با توجه به محدب بودن، کل مربع با این رئوس را شامل است. در نتیجه تصویر این ۲۴وجهی روی صفحه‌ی yz، کل ۱۲ضلعی موجود در این صفحه را شامل می‌شود.
کاملاً مشابه قسمت قبل، اگر اشتراک این ۲۴وجهی و استوانه‌ی مربوط به صفحه‌ی yz را در نظربگیریم، هر کدام از وجه‌های استوانه ۲۴وجهی را در یک ناحیه‌ی محدب قطع می‌کنند (۲۴وجهی و آن وجه هر دو محدب هستند و اشتراکشان هم محدب است) و یک وجه جدید به آن اضافه می‌کنند.
بنابراین ۱۲ وجه این استوانه، ۱۲ وجه به ۲۴وجهی می‌افزایند و در نتیجه شکل حاصل $۱۲ + ۲۴$ یعنی ۳۶وجهی خواهد بود.
شکل زیر یک نما از این چندوجهی را نمایش می‌دهد.



[1] شکلی در فضا را محدب می‌نامیم، هرگاه این خاصیت را دارا باشد که اگر دو نقطه عضو آن بودند، کل پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه هم عضو آن شکل باشد.

سؤال شماره ۷. تابع جالب

ابتدا یک لم را اثبات می‌کنیم. در همه‌جای راه‌حل به جای $S-A$ از نماد A^c استفاده شده است.

لم. اگر مجموعه‌ی B با اعمال اشتراک و مکمل گرفتن از زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_m$ از S به دست آمده باشد، آن‌گاه:

$$f(B) \leq \max\{f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_m)\}$$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که برای هر دو مجموعه‌ی A و B، $f(A\cap B) \leq \max\{f(A), f(B)\}$. برای این هم داریم:

$$f(A\cap B) = f\left((A^c\cup B^c)^c\right) = f(A^c\cup B^c) \leq \max\{f(A^c), f(B^c)\} = \max\{f(A), f(B)\}$$

□

حال راه‌حل را به صورت می‌توان ادامه داد:

راه‌حل اول. فرض کنید برد f دقیقاً mعضوی باشد و $f(A_1) < f(A_2) < \cdots < f(A_m)$ اعضای برد f باشند. با توجه به لم مجموعه‌ی A_m از $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ با عمل‌های اشتراک و مکمل گرفتن به دست نمی‌آید. اما اگر برای هر $i \in A_m$، $\{i\}$ با عمل‌های اشتراک و مکمل از $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ به دست بیاید، نتیجه می‌گیریم که A_m هم با این اعمال قابل دست‌یابی بوده است. پس نتیجه می‌گیریم عنصری مثل $i \in A_m$ هست که $\{i\}$ از $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ به دست نمی‌آید. با انتخاب مناسب مجموعه‌ی B_i برابر A_i یا A_i^c برای $1 \leq i \leq m-1$، ، $i \in B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{m-1}$. پس $i \in B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{m-1}\cap A_m$. اما با توجه به نکته‌ی بالا این اجتماع برابر $\{i\}$ نیست. این یعنی عنصری مثل i' وجود دارد که $i' \in B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_{m-1}\cup A_m$.

در ادامه راه‌حل ایده‌ی ما این است که دو عنصر i و i' را با هم یکی کنیم و تابع جدیدی بسازیم که اعضای دامنه‌ی آن کم‌تر باشد. برای این منظور تعریف می‌کنیم $a = \{i, i'\}$ و اگر دامنه‌ی تابع f را تنها روی زیرمجموعه‌هایی از S که یا شامل هر دوی این دو عضو هستند یا شامل هیچ‌کدام نیستند، محدود کنیم (A_iها چنین مجموعه‌هایی هستند) می‌توان تابع $f' : P\big((S-\{i,i'\})\cup a\big) \to \mathbb{N}$ تعریف کرد که خواص فرض مسئله را دارا است.

توجه کنید که تعداد اعضای $(S-\{i,i'\})\cup a$ یک واحد کم‌تر از تعداد اعضای S است و اگر این‌جا از استقرا استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم که $m-1 \leq n-1$ و در نتیجه $m \leq n$ و این اثبات حکم را تمام می‌کند. (تنها باید حالت‌های پایه‌ای مثلاً $n = 1$ بررسی شوند که بررسی آن‌ها کاملاً سرراست است.)

راه‌حل دوم. این راه‌حل به مقداری اطلاعات از نظریه‌ی گروه‌ها نیازمند است.

با توجه به لم بالا

$$f(A\Delta B) = f\big((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\big) \leq \max\{f(A\cap B^c), f(B^c\cap B)\} \leq \max\{f(A), f(B)\}$$

حال توجه کنید که مجموعه‌ی $P(S)$ و عمل تفاضل متقارن Δ تشکیل یک گروه می‌دهند ($\emptyset$ به عنوان عضو خنثی و A به عنوان وارون خودش). بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که برد تابع f مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, m\}$ باشد و برای هر $1 \leq i \leq m$ تعریف می‌کنیم:

$$B_i = \{A \in P(S) : f(A) \leq i\}$$

با توجه به نکته‌ی بالا B_iها زیرگروه‌هایی از $P(S)$ هستند. طبق قضیه‌ی لاگرانژ در نظریه‌ی گروه‌ها تعداد اعضای $P(S)$ بر تعداد اعضای هر یک از این زیرگروه‌ها بخش‌پذیر است. با توجه به این که $P(S)$، 2^n عضوی است، تعداد اعضای هر کدام

از این زیرگروه‌ها هم توانی از دو است. اما دقت کنید که $B_۱ \subsetneq B_۲ \subsetneq \cdots \subsetneq B_m = P(S)$. در نتیجه

$$۰ < |B_۱| < |B_۲| < \cdots < |B_m|$$

و چون تعداد اعضای این مجموعه‌ها توان‌هایی از دو است (توجه کنید که اگر $A \in B_۱$، آن‌گاه $A^c \in B_۱$ و بنابراین $B_۱$ حداقل دو عضو دارد) داریم:

$$|B_۱| \geq ۲^۱, |B_۲| \geq ۲^۲, \ldots, |B_m| \geq ۲^m$$

اما $|B_m| = |P(S)| = ۲^n$. پس $۲^m \leq ۲^n$ و در نتیجه $m \leq n$.

توضیح. توجه کنید که تابع f وجود دارد که برد آن دقیقاً n عضو داشته باشد، مثلاً می‌توانید تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(A) = \max\Big\{\min\{x : x \in A\}, \min\{x : x \in A^c\}\Big\}$$

به راحتی می‌توان چک کرد که این تابع خواص صورت مسئله را دارد و به وضوح برد آن n عضو دارد.

سؤال شماره ۸. اعداد n^2+1

راه‌حل اول. یک عدد طبیعی را «منزوی» می‌نامیم، هرگاه به شکل n^2+1 باشد و به علاوه مقسوم‌علیه دیگری به این شکل غیر از خودش و یک نداشته باشد. هدف ما این است که نشان دهیم تعداد اعداد منزوی نامتناهی است. برای این منظور ابتدا یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم:

لم. هر عدد طبیعی به شکل n^2+1 یک مقسوم‌علیه منزوی بزرگ‌تر از ۱ دارد.

اثبات. اگر n^2+1 منزوی باشد مسئله حل است. در غیر این صورت عددی طبیعی مثل $n_1 < n$ یافت می‌شود که $n_1^2+1|n^2+1$. حال اگر n_1^2+1 منزوی باشد که مسئله باز هم حل است. پس عدد طبیعی مثل $n_2 < n_1$ وجود دارد که $n_2^2+1|n_1^2+1$. باز هم اگر n_2^2+1 منزوی باشد مسئله حل است و اگر نباشد...

با توجه به این که در این روند هر بار عدد کوچک‌تری را انتخاب می‌کنیم حتماً متوقف خواهیم شد و بنابراین حتماً مقسوم‌علیه منزویی یافت می‌شود. □

حال برای حل مسئله‌ی اصلی به برهان خلف فرض کنید تعداد اعداد منزوی متناهی باشد و $a_1^2+1, a_2^2+1, \ldots, a_m^2+1$ همه‌ی اعداد منزوی باشند. عدد طبیعی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=\left((a_1^2+1)(a_2^2+1)\cdots(a_m^2+1)\right)^2+1$$

A عددی به شکل n^2+1 است و طبق لم بالا مقسوم‌علیهی منزوی دارد. اما A نمی‌تواند بر هیچ‌کدام از اعداد منزوی بخش‌پذیر باشد، زیرا $A-1$ از حاصل‌ضرب اعداد منزوی به دست آمده و بر همه‌ی آن‌ها بخش‌پذیر است. به این ترتیب فرض متناهی بودن اعداد منزوی به تناقض منجر شد و بنابراین بی‌نهایت عدد منزوی داریم.

راه‌حل دوم. قسمت اول این راه‌حل هم اثبات لم بالا است.

در ادامه اعضای دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$a_n=2^{2^n}+1 \quad n\geq 1$$

به وضوح هر کدام از اعضای دنباله به شکل m^2+1 است و طبق لم بالا هر کدام از اعضای دنباله مقسوم‌علیهی منزوی دارند. از طرف دیگر می‌توان به سادگی دید که اگر $m\neq n$ باشد، $(a_m,a_n)=1$، یعنی اعضای دنباله دو به دو نسبت به هم اول هستند. (در واقع اگر $m<n$ باشد، $a_m|a_n-2$ و چون همه‌ی جمله‌ها فرد هستند، نسبت به هم اول بودن نتیجه می‌شود.)

با توجه به این نکته، مقسوم‌علیه‌های منزوی اعضای دنباله دو به دو متمایز هستند و بنابراین بی‌نهایت عدد منزوی داریم و اثبات به پایان می‌رسد.