به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

۱. ابتدا دقت کنید که

$$(ab+1)^2+(a-b)^2=a^2b^2+a^2+b^2+1=(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$$

ادعا می‌کنیم که تحت شرایط مسئله a^2+1 و b^2+1 نسبت به هم اول هستند. زیرا اگر عامل اول مشترکی مثل p داشته باشند، تفاضل آن‌ها یعنی a^2-b^2 باید بر p بخش‌پذیر باشد. پس $p|a+b$ و یا $p|a-b$.

اگر $p|a+b$، با توجه به این که $(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$ بر p بخش‌پذیر است، باید $ab-1$ هم بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه نسبت به هم اول بودن $a+b$ و $ab-1$ که فرض سؤال است امکان ندارد. مشابه این حالت اگر $p|a-b$، با توجه به این که $(ab+1)^2+(a-b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$ هم بر p بخش‌پذیر است، باید $ab+1$ بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه به نسبت به هم اول بودن $a-b$ و $ab+1$ که فرض سؤال است امکان ندارد. پس در کل a^2+1 و b^2+1 نسبت به هم اول هستند و اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مربع کامل باشد هر دو مربع کامل هستند. یعنی عدد صحیح x یافت می‌شود که $x^2=a^2+1$. این نتیجه می‌دهد که $(x-a)(x+a)=1$ و چون $x-a$ و $x+a$ هر دو صحیح هستند باید هر دو برابر ۱ یا هر دو برابر -1 باشند. پس در هر صورت با هم برابرند که این نتیجه می‌دهد a برابر صفر است که با طبیعی بودن a تناقض دارد. بنابراین این حاصل‌ضرب نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۲. فرض کنید k مثلث با مساحت یک در بین مثلث‌های با رئوس در بین این نقاط موجود باشد. یک زوج از این نقاط را به دل‌خواه در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی بین این دو نقطه برابر d باشد. هر نقطه‌ی دیگری که مثلث تولید شده توسط آن و دو نقطه‌ی در نظر گرفته‌شده برابر یک باشد، باید فاصله‌ای برابر $\frac{2}{d}$ از خط شامل آن دو نقطه داشته باشد. پس این چنین نقاطی باید روی دو خط موازی(و به فاصله‌ی $\frac{2}{d}$) با پاره‌خط شامل آن دو نقطه قرار داشته باشند و از آن‌جا که طبق فرض مسئله روی هیچ خطی سه نقطه از نقاط قرار ندارند تعداد چنین نقاطی حداکثر ۴ است(روی هر کدام از دو خط حداکثر دو نقطه). حال دقت کنید که اگر برای همه‌ی $\binom{n}{2}$ زوج نقطه، تعداد این نقاط را بشماریم هر مثلث دقیقاً سه بار شمرده شده است. پس

$$4\binom{n}{2}\geq 3k\Rightarrow \frac{2}{3}(n^2-n)\geq k$$

و به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

۳. فرض کنید امتداد پاره‌خط PD که محور اصلی دو دایره است، پاره‌خط AB را در نقطه‌ی N قطع کند. چهارضلعی $BDPC$ محاطی است و در نتیجه $\angle BDC=\angle BPC$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\angle DPM=\angle BPC$ یا معادلاً $\angle DPB=\angle MPC$. نقطه‌ی N روی محور اصلی دو دایره قرار دارد، بنابراین قوت آن نسبت به دو دایره برابر است:

$$NA^2=NB^2\Rightarrow NA=NB$$

حال داریم:

$$\angle PBC = \angle PDC = \frac{۱}{۲}\widehat{ADP} = \angle PAB$$

$$\angle PCB = \frac{۱}{۲}\widehat{PDB} = \angle PBA$$

پس مثلث‌های PCBو PBA متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌ی بین میانه و ضلع متناظر آن‌ها با هم برابر است. حال دقت کنید که PM میانه‌ی نظیر ضلع BC در مثلث PBC و PN میانه‌ی ضلع AB در مثلث PAB است و لذا $\angle DPB = \angle NPB = \angle MPC$ و این همان حکمی است که قصد اثبات آن را داشتیم.

۴. راه‌حل اول. به برهان خلف فرض کنید α یک ریشه‌ی حقیقی معادله باشد که $|\alpha| \leq ۱$. بنابراین:

$$P(\alpha) = ۰ \Rightarrow a\alpha^۳ + b\alpha^۲ + c\alpha + d = ۰ \Rightarrow a\alpha^۳ + c\alpha = -(b\alpha^۲ + d)$$

$$\Rightarrow |\alpha||a\alpha^۲ + c| = |b\alpha^۲ + d| \Rightarrow |a\alpha^۲ + c| \geq |b\alpha^۲ + d| \geq b\alpha^۲ + d$$

حال دقت کنید که بیش‌ترین مقداری که تابع $f(x)|ax + c|$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ می‌پذیرد، به ازای یکی از مقادیر انتهایی بازه است. و به عبارتی $f(x) \leq \max\{f(۰), f(۱)\} = \max\{|c|, |a + c|\}$. پس:

$$|a\alpha^۲ + c| \leq \max\{|c|, |a + c|\}$$

با استدلالی مشابه می‌توان گفت که تابع خطی $g(x) = bx + d$ نیز کم‌ترین مقدار خود را در یکی از نقاط انتهایی می‌پذیرد. پس:

$$b\alpha^۲ + d \geq \min\{d, b + d\}$$

حال بنابر رابطه‌های بالا داریم:

$$\max\{|c|, |a + c|\} \geq |a\alpha^۲ + c| \geq b\alpha^۲ + d \geq \min\{d, b + d\}$$

در نتیجه باید $\max\{|c|, |a + c|\} \geq \min\{d, b + d\}$ که با فرض مسئله در تناقض است، پس چنین αای وجود ندارد.

راه‌حل دوم. دقت کنید که

$$P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d = (a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ + c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲)$$

اگر $x \notin \{-۱, ۰, ۱\}$، ثابت می‌کنیم:

الف. $(a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ > ۰$

ب. $c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲)$

برای اثبات ادعای الف، می‌دانیم که $۰ < |x| < ۱$، پس

$$(a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ = x^۲((a + c)x + (b + d))$$

حال دقت کنید که:

$$b + d > |a + c \geq x(a + c)| \geq\Rightarrow (a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ > ۰$$

برای اثبات ادعای ب دقت کنید که $۱ - x^۲ > ۰$ و در نتیجه:

$$d > |c| > |xc| \geq -xc \Rightarrow cx + d > ۰ \Rightarrow (۱ - x^۲)(cx + d) > ۰ \Rightarrow c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲) > ۰$$

حال با جمع زدن رابطه‌های الف و ب به این نتیجه می‌رسیم که $P(x)$ ریشه‌ای در $[-۱,۱]$ ندارد، مگر احتمالاً در ۰، ۱+ و یا ۱− که این سه عدد را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$P(۰) = d > |c| \geq ۰$$
$$b + d > |a + c| \Rightarrow b + d > a + c \Rightarrow P(-۱) > ۰$$
$$b + d > |a + c| \Rightarrow b + d > -a - c \Rightarrow P(۱) > ۰$$

پس این نقاط هم ریشه‌ی $P(x)$ نیستند و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۵. زاویه‌ی $\angle BCT$ زاویه‌ای از مثلث متساوی‌الساقین BCE با زاویه‌ی خارجی $\angle ABC$ است، پس $\angle BCT = \frac{۱}{۲}\angle ABC$ و به طور مشابه $\angle CBT = \frac{۱}{۲}ACB$. پس:

$$\angle CTF = \angle BCT + \angle CBT = \frac{۱}{۲}\angle ABC + \angle ACB = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \angle BAC) = ۶۰^\circ$$

بنابراین چهارضلعی $ABTC$ محاطی است و در نتیجه $\angle EBF = \angle ACE = \angle AKE$. این نتیجه می‌دهد که $\angle ABF = ۱۸۰^\circ - \angle EBF = ۱۸۰^\circ - \angle AKE = \angle AKF$. پس چهارضلعی $ABKF$ محاطی است.
حال داریم که $\angle EBK = \angle CFK$ و $\angle BEK = \angle KCF$ و $BE = CF$، پس مثلث‌های KEB و KCF هم‌نهشت هستند و لذا $KE = KC$. به عنوان نتیجه دو کمان EK و KC برابر هستند و AK نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ خواهد بود.

۶. فرض کنید برای عدد طبیعی $۲ \leq i \leq n$، منظور از A_i مجموعه‌ی کلاس‌های iنفره باشد. نشان می‌دهیم که $|A_i| \leq \frac{n(n-۱)}{i(i-۱)}$. طبق فرض هر زیرمجموعه‌ی دو عضوی از دانش‌آموزان حداکثر در یک کلاس از کلاس‌های A_i می‌توانند با هم شرکت کنند، پس به عبارتی $\binom{n}{۲} \geq |A_i|\binom{i}{۲}$. پس $|A_i| \leq \frac{n(n-۱)}{i(i-۱)}$.
حال می‌دانیم که

$$m = |A_۲| + |A_۳| + \cdots + |A_n|$$

در نهایت با جای‌گذاری نامساوی به دست آمده در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m &\leq n(n-۱)\left(\frac{۱}{۲(۲-۱)} + \frac{۱}{۳(۳-۱)} + \cdots + \frac{۱}{n(n-۱)}\right) \\ &= n(n-۱)\left(۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}\right) = n(n-۱)(۱ - \frac{۱}{n}) = (n-۱)^۲ \end{aligned}$$

و در نتیجه اثبات حکم به پایان می‌رسد.