به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۹

دفترچه کد ۱ – سوالات جواب آخر

۱. کوچکترین عدد طبیعی که چهار مقسوم‌علیه اول دارد برابر است با ۲۱۰=۷×۵×۳×۲. بنابراین n×۱۱ باید کوچکتر از ۲۱۰ باشد که نتیجه می‌دهد n باید کمتر از ۲۰ باشد. پس **پاسخ ۱۹** است.

۲. در هر کشتی یک نفر می‌بازد؛ پس تعداد باخت‌ها برابر تعداد مبارزه‌ها است. ابتدا نشان می‌دهیم تعداد کشتی‌های برگزار شده(یا همان تعداد باخت‌ها) نمی‌تواند از ۱-۱۲×۵=۵۹ بیش‌تر باشد:

اگر بیش از ۵۹ کشتی برگزار شده باشد؛ بیش از ۵۹ باخت صورت گرفته (حداقل ۶۰تا). همچنین هیچ کشتی‌گیری نمی‌تواند بیش از ۵ باخت کسب کند (با باخت پنجم حذف شده و دیگر بازی نخواهد کرد) بنابراین همه کشتی-گیرها حداقل ۵ باخت خواهند داشت (۶۰<۴+۵×۱۱) که نتیجه می‌دهد همه آن‌ها از دور رقابت‌ها حذف شده‌اند ولی این نتیجه غیر ممکن است چون در بازی آخر ۲ نفر که حذف نشده‌اند با هم مسابقه می‌دهند و حداکثر یکی از آن‌ها حذف می‌شود(چون یکی می‌برد و به باخت‌هایش اضافه نمی‌شود). با توجه به به اینکه به تناقض رسیدیم (اینکه همه کشتی‌گیرها حذف می‌شوند) تعداد بازی ها نمی‌تواند از ۵۹ بیشتر باشد.

حال با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم ممکن است ۵۹ بازی برگزار شود: برای۵۹ بازی مثالی هم وجود دارد: ابتدا در ۴ بازی کشتی‌گیر ۱۲ از ۱۱ می‌بازد و سپس کشتی‌گیر ۱۲ با هر کشتی‌گیر دیگری (۱,۲,۳,...,۱۱) ۵ بار بازی کرده و همه را می‌برد. در انتها همه کشتی‌گیرها غیر از شماره ۱۲ حذف شده‌اند و ۵×۱۱+۴=۵۹ بازی انجام شده است.

پس **پاسخ ۵۹** است.

۳. فرض کنید افراد را بر اساس نمره به صورت نزولی مرتب کرده‌ایم. داریم:

(مجموع کل نمره‌ها) = (میانگین)×(تعداد) = ۱۹۸

(نمره‌ی نفر آخر) = (مجموع کل نمره‌ها) - (مجموع نمرات ۱۰ نفر اول)

با توجه به رابطه بالا هرچه مجموع نمرات ۱۰ نفر اول بیشتر باشد نمره نفر آخر کمتر می‌شود. پس اگر بخواهیم نمره‌ی نفر اول کمینه باشد، باید مجموع نمرات بقیه بیشینه باشد. مجموع نمرات ۵ نفر اول حداکثر ۱۰۰ است و در حالتی به دست می‌آیدکه نمره‌ی همه‌ی آن‌ها ۲۰ باشد. نمره‌ی ۵ نفر بعدی بایدکمترمساوی ۱۹ باشد (زیرا نمره‌ی نفر ۶ ام ۱۹ است) پس مجموع نمرات آن‌هاحداکثر ۹۵ است و در حالتی به دست می‌آیدکه نمره‌ی همه‌شان ۱۹ باشد. بنابراین مجموع نمرات ۱۰ نفر اول حداکثر ۱۹۵ است که با این فرض، نمره‌ی نفر آخر ۳ خواهد بود و این مقدار، حداقل نمره نفر آخر می‌باشد. **پاسخ ۳** است.

۴. دنباله‌ی متناظر با تغییرات قیمت به صورت ...,۱-,۱-,۱-,۱+,۱+,۱- است. بعد از گذشت یک روز تغییر قیمت سهام برابر ۱- ریال خواهد بود، بعد از ۲+۱ روز قیمت سهام ۲+۱- نسبت به روز اول تغییر کرده و... و بعد از n+...+۳+۲+۱ روز n±...+۳-۲+۱- ریال قیمت سهام تغییر می‌کند. توجه کنید که بعد از روزهای$\frac{n(n+1)}{۲}$,...,۱,۳,۶ علامت یک‌های دنباله‌ی تغییرات عوض می‌شود.

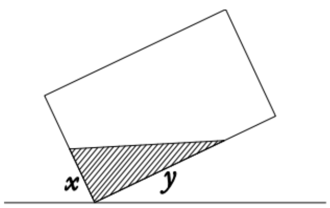
برای این که بفهمیم در روز ۳۶۵اُم در چه وضعیتی هستیم، معادله‌ی$۳۶۵ < \frac{n(n+1)}{۲}$را حل کرده و به این نتیجه می‌رسیم که $۲۷ < n$. طبق گفته‌های بالا تا روز۳۵۱ ($=\frac{۲۷*۲۶}{۲}$) اُم قیمت سهام ۲۶+...۳-۲+۱- ریال تغییر می‌کند، یعنی ۱۳+ ریال. بعد از آن تا روز ۳۶۵اُم هر روز یک ریال قیمت کاهش می‌یابد ک تعداد این روزها ۱۴=۳۵۱-۳۶۵ است. نهایتا بعد از گذشت ۳۶۵ روز قیمت هر سهم برابر ۹۹۹=۱۴-۱۳+۱۰۰۰ می‌شود. **پاسخ ۹۹۹** است.

۵. ضرب ریشه‌های عبارت $x^2 + ax +$ ۱۳۸۹ برابر ۱۳۸۹ است. تجزیه ۱۳۸۹ به عوامل اول به صورت ۱۳۸۹=۳×۴۶۳ است بنابر این ۱۳۸۹ را به ۴ طریق می توان به صورت ضرب دو عدد صحیح نوشت (۱۳۸۹و۱، ۱۳۸۹-و۱-، ۴۶۳و۳، ۴۶۳-و۳-). که در هر حالت a به طور یکتا (منفیِ جمع دو ریشه) تعیین می‌شود و ۴ مقدار متفاوت برای a بدست می‌آید. پس **پاسخ ۴** است.

۶. راه حل اول: کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۲ تا ۶، ۶۰ است پس عددی که ریشه ۲ تا ۶اُم آنصحیح است بایدریشه‌ی ۶۰اُمش هم صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد با این ویژگی $۲^{۶۰}$ است که ۶۱=۱+۶۰ مقسوم‌علیه دارد. پس **پاسخ ۶۱** است.

راه حل دوم: اگر تجزیه به عوامل اول عددی به صورت $a = p_۱^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ باشد ریشه kاُم آن برابر $p_۱^{\alpha_1 \div k} \dots p_n^{\alpha_n \div k}$ خواهد بود؛ پس برای طبیعی بودن ریشه kاُم a باید α_iها بر k بخشپذیر باشند؛ در این سوال نماها باید بر کوچکترین مضرب مشترک ۲ تا ۶ یعنی ۶۰ بخشپذیر باشند؛ کوچکترین عدد طبیعی با این ویژگی $۲^{۶۰}$ بوده و ۶۱ مقسوم‌علیه دارد. <u>**پاسخ ۶۱**</u> است.

۷. اگر فرض کنیم آب درون محفظه به صورت روبه رو درآمده باشد رابطه‌های زیر را داریم:



حجم آب: $\frac{۱}{۲}(x$

سطح تماس: $2x$

برای مینیمم شدن سطح تماس آب با محفظه طبق روابط بالا باید $x + y$ مینیمم شود. طبق نامساوی حسابی-هندسی داریم $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ، درحالی در این مسئله xy ثابت(۰.۸) است. تساویِ نامساوی حسابی-هندسی با فرض ثابت بودن حاصل ضرب xy وقتی حاصل می‌شود که x و y برابر باشند پس در صورت برابر بودن x و y مجموع‌شان مینیمم می‌شود و درنتیجه سطح تماس آب و محفظه مینیمم می‌شود. بنابراین زاویه سطح محفظه با افق برابر ۴۵ درجه خواهد بود لذا <u>**پاسخ ۴۵**</u> است.

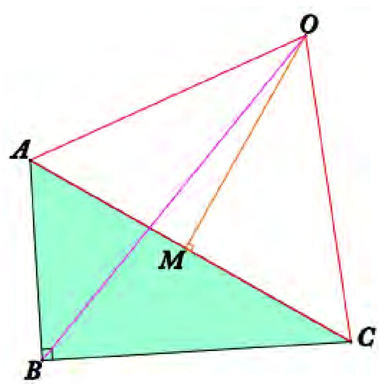
۸. توجه کنید که کسر داده شده برابر $\binom{۲n}{n}$ است لذا همواره حاصل آن عددی طبیعی خواهد بود. ابتدا نشان می‌دهیم درصورتیکه $۲n < ۱۷^۲$ جواب موجود نمی‌باشد:

اگر $۲n < ۱۷^۲$ هر مضرب ۱۷ در تجزیه به عوامل اول دقیقا ۱ عامل ۱۷ دارد. اگر $n = ۱۷k + r \ (۰ \leq r < ۱۷)$ مخرج کسر k عامل ۱۷ خواهد داشت، همچنین خواهیم داشت:

$$۲n = ۱۷(2k) + ۲r \leq ۱۷\left(۲k\right) + ۳۲ \leq ۱۷\left(۲k + ۱\right) + ۱۵$$

پس در صورت کسر حداکثر $k+۱$ مضرب ۱۷ خواهیم داشت و درنتیجه صورت حداکثر $k+۱$ عامل ۱۷ خواهد داشت ولی برای اینکه کسر داده شده بر $۱۷^{۲}$ بخشپذیر باشد باید تعداد مضارب ۱۷ در صورت حداقل ۲تا از تعداد مضارب ۱۷ در مخرج بیشتر باشد پس ۲۸۹درصورتیکه $۲n < ۱۷^{۲}$ خواسته سوال ممکن نخواهد بود.

تا اینجا ثابت کردیم $۲n \geq ۱۷^{۲} = ۲۸۹$. کوچکترین عدد طبیعی n که این شرط را دارد ۱۴۵ است که با آزمایش کردن آن $(n = ۱۴۵)$ مشاهده می‌کنیم کسر داده شده بر $۱۷^{۲}$ بخشپذیر است؛ پس **پاسخ ۱۴۵** است.



۹. با توجه به برقراری قضیه فیثاغورس برای فواصل رادارها، سه رادار، مثلثی قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند (A، B و C). با توجه به برابر بودن فاصله هواپیما(نقطه O) از دو راس هر ضلع مثلث، این نقطه روی صفحات عمودمنصف ضلع‌ها قرار گرفته. اشتراک این سه صفحه خطی عمود بر صفحه مثلث(زمین) در وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه(نقطه M) می‌باشد؛ پس O روی آن خط قرار دارد و شرط دیگر این است که فاصله آن از رئوس مثلث ۱۳ کیلومتر است. با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OMA طول ضلع OM که همان ارتفاع هواپیما از زمین است بدست می‌آید: $۱۲ = \sqrt{۱۳^{۲} - ۵^{۲}}$. **پاسخ ۱۲** است.

۱۰. خطوط مطلوب را به ۲ گروه تقسیم می‌کنیم:

گروه اول: خطوط موازی دو وجه مقابل از مکعب که با توجه به تقارن ۴جانبه مکعب، یک دسته از ۴ دسته آن‌ها را مشخص می‌کنیم: (شماره مکعب‌های ۱×۱ مربوط به خطوط آورده شده)

۱۳-۱ ۱۴-۲ ۱۵-۳ ۱۶-۴ ۱۷-۵ ۱۸-۶ ۲۲-۱۰ ۲۳-۱۱ ۲۴-۱۲

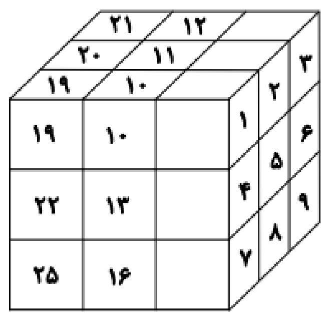
پس گروه اول ۹×۴=۳۶ خط دارد.

گروه دوم: خطوط موازی قطر اصلی مکعب. این گروه نیز با توجه به تقارن به ۴ دسته متناظر و هم‌اندازه تقسیم می‌شود که یک دسته را آورده‌ایم:

۱۴-۱ ۱۵-۲ ۱۷-۴ ۱۸-۵ ۲۳-۱۰ ۲۴-۱۱ ۲۶-۱۳

این گروه از ۷×۴=۲۸ خط تشکیل شده.

در مجموع ۲۸+۳۶ = ۶۴ خط قابل قبول وجود دارد. **پاسخ ۶۴** است.



دفترچه کد ۱ – سوالات تستی

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

چون C' دوران ۶۰ درجه C است، مثلث ACC' متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه نسبت خواسته شده در سوال برابر ۱ است.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با فرض طبیعی بودن کسر $\frac{۵۹۶+k}{۷۰۰-k}$، باید $۷۰۰-k|۵۹۶+k$.

از طرف دیگر $۷۰۰-k|۷۰۰-k$.

با جمع این دو رابطه خواهی داشت: $۷۰۰-k|۱۲۹۶$ پس $۷۰۰-k$ باید مقسوم‌علیه ۱۲۹۶ باشد و هر مقسوم‌علیه‌های ۱۲۹۶ که کوچکتر از ۷۰۰ باشد یک جواب قابل قبول خواهد بود. $۱۲۹۶ = ۲^۴ \times ۳^۴$، بنابراین ۲۵مقسوم‌علیه دارد که همه آن‌ها غیر از خود ۱۲۹۶ از ۷۰۰ کوچکترند و به ازای هرکدام یک جواب داریم. پس به ازای ۲۴ مقدار طبیعی برای k کسر مورد نظر طبیعی خواهد بود.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

راه حل اول: برای دستگاه مختصات، جهت افقی(راست) را محور xها و جهت عمودی(بالا) را محور yها و مبدا مختصات را منزل آقای فراموش‌کار در نظر می‌گیریم. محل وی را با (a,b) نشان می‌دهیم. با گذشت هر ساعت مقدار یکی از a یا b یک واحد تغییر می‌کند. با توجه به اینکه ۱۵ ساعت از آغاز حرکت گذشته باید داشته باشیم: $|a|+|b| \leq ۱۵$ و همچنین $|a|+|b|$ باید فرد باشد(چون با گذشت هر ساعت مقدار آن دقیقا ۱ واحد تغییر می‌کند)

پس مجموع ممکن ۱۶ است ۱، ۳، ۵،...، ۱۵ باشد. تعداد مختصات‌های ممکن با این ویژگی‌ها عبارت است از:

۴×(۲+۴+...+۱۶)-۳۲ = ۲۵۶

(ضریب ۴ به خاطر ۴ ناحیه‌ی مختصات، اعداد داخل پرانتز تعداد راه‌های نوشتن ۱تا ۱۵ به صورت مجموع دو عدد صحیح نامنفی و ۳۲ تعدادنقاطروی محورها که دوبار شمرده شده‌اند)

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر تعداد شکلات‌ها حداقل ۶×۶=۳۶ تا باشد با قرار دادن ۶ شکلات در ۶ ردیف اول فرض سؤال نقض می‌شود. ادعا می کنیم ۳۵ شکلات هر طوری قرار بگیرند نمی‌توانند بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها را پر کنند؛ در هر ردیفی که بیش‌تر خانه‌هایش پر شده،حداقل ۶ شکلات قرار دارد و حداقل ۶ ردیف باید این شرایط را داشته باشند پس برای پر کردن بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها حداقل ۶×۶=۳۶ شکلات مورد نیاز است.

۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به این که $PE\perp AC$ و $PD\perp AB$ و $DE\parallel BC$ داریم: $\angle EDP = ۴۵^\circ$ و $\angle DEP = ۶۰^\circ$ حال با توجه به قضیه سینوس‌ها در مثلث PDE داریم $\frac{PE}{PD} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$. و داریم: $PC = \frac{PE}{\sin(۳۰^\circ)} = ۲PE$ و $PB = \frac{PD}{\sin(۴۵^\circ)} = \sqrt{۲}PD$. پس داریم: $\frac{PB}{PC} = \frac{\frac{PD}{\sin(۴۵^\circ)}}{\frac{PE}{\sin(۳۰^\circ)}} = \frac{PD}{PE} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم: $q^۳ = \overline{۰.abcabc\ldots}$ پس $۱۰۰۰q^۳ = \overline{abc.abcabc\ldots}$ و با کم کردن این دو عبارت داریم: $999q^3 = \overline{abc}$. پس $q^۳ = \frac{\overline{abc}}{۹۹۹}$. چون q گویاست؛ هم صورت و هم مخرج $q^۳$ وقتیکه تا حد امکان ساده شود باید مکعب کامل باشند. با توجه به اینکه $۹۹۹ = ۳^۳ \times ۳۷$ صورت q حداقل یک عامل ۳۷ دارد لذا کوچکترین $q^۳$ ممکن $\frac{۱}{۲۷}$ بوده که کوچکترین q را نتیجه می‌دهد. پس $q^۳ = \frac{۱}{۲۷} = \frac{۳۷}{۹۹۹}$. نتیجه می‌شود $\overline{abc} = ۳۷$ و $a + b + c = ۱۰$.

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در ابتدا مجموع مختصات برابر ۱ است و بعد از طی کردن یک چهارم مسیر به مقدار ۱- می‌رسد و بعد از پیمودن یک چهارم دیگر این مقدار دوباره ۱- می‌شود در بعد از پیمودن یک چهارم آخر این مقدار ۱ می‌شود و سپس این مسیر دوباره تکرار می‌شود که در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (ه) این خاصیت را دارد.

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

چون b بین ۰و۱ است b^{1389}عددی بسیار کوچک است و با تقریب خوبی می‌توان از آن صرف نظر کرد و در نتیجه می‌توان صورت مسئله را به صورت روبه‌رو ساده کرد: $a^2 \geq Mab \rightarrow a \geq Mb \rightarrow M \leq \frac{a}{b}$. حال a را می‌توان بسیار کوچک در نظر گرفتدر این صورت M به صفر میل می‌کند. در واقع برای هر Mبزرگ‌تر از صفر a,b ای می‌توان ارائه داد که نامساوی غلط باشد.به این صورت کهb طوری انتخاب می‌کنیم که b^{1389}از Mabکم‌تر باشد و سپس a را آنقدر کوچک می‌گیریم کهa^2 را اگر به b^{1389}اضافه کنیم به Mab نرسد.

۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

تعداد راه‌های مطالعه‌ی این کتاب‌ها برابر تعداد راه‌های نوشتن کلمه‌ای هشت حرفی با a,b,c,d است بطوریکه از هر حرف دقیقا دو بار استفاده شود. این عدد برابر $\frac{۸!}{۲!\times۲!\times۲!\times۲!} = ۲۵۲۰$ است. (بدون هیچ محدودیت ترتیبی !۸ روش داریم؛ به محدودیت ترتیبی هر دو کتاب روش‌ها نصف می‌شوند چون دقیقا در نصف راه‌ها یک کتاب زودتر از دیگری آمده)

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

این معادله نمی‌تواند دو ریشه در بازه‌ی $\left[۰,۱\right]$ داشته باشد زیرا در غیر این صورت ضرب دو ریشه که مقدار آن برابر b خواهد بود کمتر از ۱ می‌شود که متناقض با طبیعی بودن b است. پس این معادله حداکثر یک ریشه در این بازه دارد. و این هم وقتی رخ می‌دهد که مقدار تابع $x^۲ - ax + b$ در نقطه صفر و نقطه ۱ مختلف‌العلامت باشد (یا یکی صفر باشد). مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابر b و مقدار تابع در نقطه‌ی ۱ برابر $۱ - a + b$ است. حال برای bها از ۱ تا ۱۰ مقدار b مثبت است. پس باید مقدار$۱ - a + b$ نامثبت باشد. برای $b = ۱$، a ۹ حالت، برای $b = ۲$، a ۸ حالت و....برای $b = ۹$، a ۱ حالت دارد. پس در کل تعداد زوج مرتب‌ها برابر ۴۵=۹+...+۳+۲+۱ است.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

تا وقتیکه عدد زوج است بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه آن نصف آن است و نتیجه‌ی عملیات ما نصف کردن عدد مورد نظر است پس در ۱۰ مرحله، عدد $۳^{۱۱} \times ۵^{۱۲}$ به دست می‌آید. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد یک سوم

آن است و نتیجه‌ی عملیات ما دو سوم کردن عدد مورد نظر است. حال عدد زوج شده وانجام عملیات به معنای نصف کردن آن است. پس اگر عدد بر ۳ بخش پذیر باشد بعد از دو مرحله یک سوم می شود؛ در نتیجه بعد از ۲×۱۱=۲۲ مرحله به $۵^{۱۲}$ می‌رسیم. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد $\frac{۱}{۵}$ آن است و نتیجه‌ی عملیات ما چهار پنجم کردن عدد است. حال عدد بر ۴ بخش پذیر شده و طی دو مرحله‌ی بعدی دو بار بر ۲ تقسیم می شود. پس اگر عدد بر ۵ بخش پذیر باشد بعد از ۳ مرحله تقسیم بر ۵ می‌شود؛ لذا بعد از ۳×۱۲=۳۶ مرحله به ۱ می‌رسیم. پس در کل ۲۲+۳۶+۱۰=۶۸ مرحله انجام می‌شود.

۱۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای اینکه دو ساعت خراب هرکدام ۶ ساعت جلو بیفتند باید رابطه‌های زیر بر قرار باشد:

$7K \equiv 6$

ضرب در ۶۰ شدن پیمانه‌ها و اعداد به منظور هم واحد شدن طرفین است(همه به دقیقه).که از این رابطه‌ها به دست می‌آید $K \equiv 360 \ (mod\ 720)$ که نتیجه می‌دهد کوچک‌ترین K ممکن برابر ۳۶۰ است.

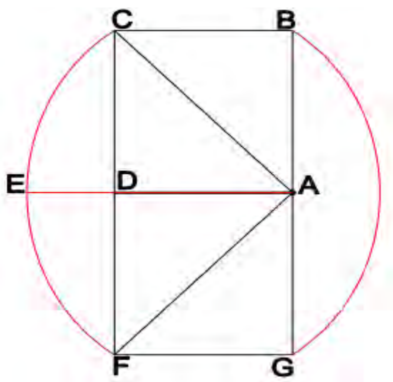
۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه حل اول: اگر هر عدد را عددی سه رقمی تصور کنیم (با گذاشتن صفر به اندازه‌ی نیاز در اولش)از هر یک از ارقام ۳۰۰ بار آمده است می‌توان دید $۳۰۰ \times (۰ \times (۰ + ۱ + \cdots + ۹) + ۱ \times (۰ + ۱ + \cdots + ۹) + ۹ \times (۰ + ۱ \cdots ۹)) = ۶۰۷۵۰۰$، ۱۰ برابر مجموع مورد نظر ماست(هرجمله از جواب ده بار در این مجموع آمده است) پس حاصل ۶۰۷۵۰ خواهد بود.

راه حل دوم: مجموعه اعداد ۹۹۹،...،۰ مجموعه اعدادی است که از نوشتن ۳ رقم از ارقام ۹،...،۰ کنار هم حاصل می‌شوند. اگر تعریف کنیم $f_۱(\overline{abc}) = ab$ و $f_۲(\overline{abc}) = bc$ و $f_۳(\overline{abc}) = ca$ تابع مورد نظر سوال حاصل جمع این سه تابع است و می‌توانیم حاصل جمع این توابع را روی مجموعه اعداد داده شده جداگانه حساب کنیم. با توجه به تقارن مجموعه اعداد ۹۹۹،...،۰ نسبت به ۳ رقم(یکان، دهگان و صدگان)، محاسبه یک مجموع و ۳ برابر کردن آن کافیست (مثلا فقط برای $f_۱$):

$$\text{جواب} = ۳ \times \sum_{i=۰}^{۹} \sum_{j=۰}^{۹} i \times j \times ۱۰ = ۳۰ \times \sum_{i=۰}^{۹} (i \times \sum_{j=۰}^{۹} j) = ۳۰ \times \sum_{i=۰}^{۹} i \times \sum_{j=۰}^{۹} j = ۳۰ \times ۴۵ \times ۴۵ = ۶۰۷۵۰$$

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



اگر کاغذ را چنان تا کنیم که امتداد قطر CA بر روی امتداد ضلعDA قرار گیرد آن‌گاه نقطه C بر E منطبق خواهد شد. بنابراین اگر به مرکز A کاغذ رابچرخانیم،ربع دایره ای به مرکزA و به شعاع ACو اگر به مرکز Dبچرخانیم ربع دایره‌ای به مرکز D و شعاع DB رنگ خواهد شد. تمام نقاط داخل مستطیل CBGF نیز بدون نیاز به تا کردن رنگ می‌شوند پس:

پاسخ = ۲ (

۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم :$\angle C = \angle HDB$. هم‌چنین داریم: $\angle C = \angle AEB$. زاویه‌ی $\angle DBH$ برابر $\angle C -$ ۹۰ است.اگر AH را امتداد داده تا دایره‌ی محیطی مثلث را در A' قطع کند،می‌دانیم که A'قرینه‌ی H نسبت به BC است. در نتیجه$\angle HA'D = \angle DHA' =$ ۹۰ $- \angle C$:

در این صورت $\frac{\widehat{AE}}{۲}$=$\angle ABE$=$\angle AA'E$.پس دو مثلث HBD و ABE با یکدیگر متشابه اند. در نتیجه داریم:

$$\frac{BH}{AB} = \frac{DH}{AE} \rightarrow$$