به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

شنبه ۸۹/۵/۲۳

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۱. چندجمله‌ای دو متغیره

$P(x,y)$ چندجمله‌ای دو متغیره با ضرایب حقیقی است. درجه‌ی یک تک‌جمله یعنی جمع توان‌های x و y در آن. مجموع جملات با بیشترین درجه در $P(x,y)$ را $Q(x,y)$ می‌نامیم.

(به عنوان مثال اگر $P(x,y) = ۳x^۴y - ۲x^۲y^۳ + ۵xy^۲ + x - ۵$ آن‌گاه $Q(x,y) = ۳x^۴y - ۲x^۲y^۳$.)

فرض کنید اعداد حقیقی $x_۱$ و $y_۱$ و $x_۲$ و $y_۲$ وجود دارند که

$$Q(x_۱,y_۱) > ۰ \quad , \quad Q(x_۲,y_۲) < ۰$$

ثابت کنید مجموعه‌ی $\{(x,y) \mid P(x,y) = ۰\}$ کران‌دار نیست.

(زیرمجموعه‌ی S از صفحه را کران‌دار گوییم اگر عدد مثبت M وجود داشته باشد که فاصله‌ی اعضای S تا مبدأ، کمتر از M باشد.)

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

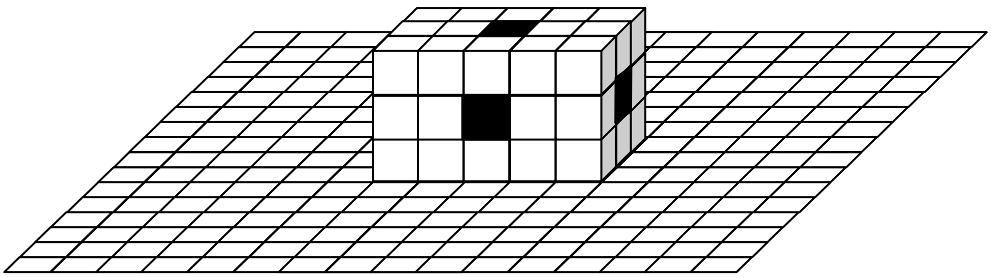
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

شنبه ۸۹/۵/۲۳

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۲. مکعب غلطان

a و b و c اعداد طبیعی هستند. یک مکعب $(۲a+۱)\times(۲b+۱)\times(۲c+۱)$ داریم. این مکعب روی صفحه‌ای از هر سمت نامتناهی و با مربع‌های واحد قرار دارد. می‌توان مکعب را به هر جهتی غلطاند. وجه‌های مکعب به مربع‌های واحد تقسیم شده و خانه‌ی وسط هر وجه رنگی شده است (یعنی اگر روی هر خانه از صفحه قرار بگیرد، آن خانه رنگی می‌شود).



ثابت کنید اگر طول اضلاع مکعب دو به دو نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه هر خانه‌ای از صفحه را می‌توان رنگی کرد.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

یک‌شنبه ۸۹/۵/۲۴

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۳. نقاط در صفحه

مجموعه A متشکل از n نقطه در صفحه با آرایشی دلخواه داده شده است. مجموعه‌ای که از اثر تبدیل‌های انتقال، دوران، تجانس و یا ترکیب‌های آن‌ها روی A به دست بیاید را یک نسخه از A گوییم. می‌خواهیم n نسخه از A را طوری در صفحه قرار دهیم، به طوری که هر دو نسخه، اشتراکشان تک‌عضوی و هر سه تا اشترکشان تهی باشد.

الف) ثابت کنید اگر هیچ ۴ نقطه‌ای از A تشکیل متوازی‌الاضلاع ندهند، می‌توان بدون استفاده از دوران و تجانس و تنها با استفاده از انتقال‌ها این کار را انجام داد. (A متوازی‌الاضلاع با زاویه ۰ و متوازی‌الاضلاعی که دو راس مقابلش بر هم منطبق باشد هم ندارد!)

ب) ثابت کنید همواره با استفاده از ترکیب‌های تمام تبدیل‌ها می‌توان این کار را انجام داد.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

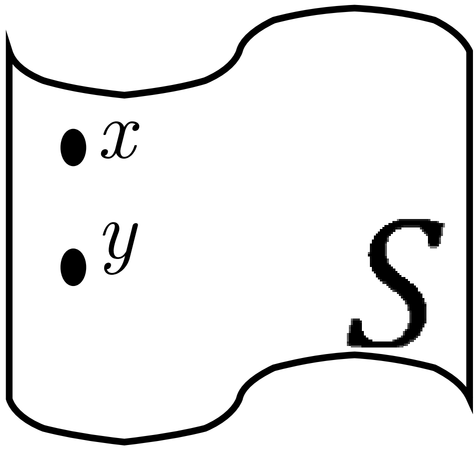
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

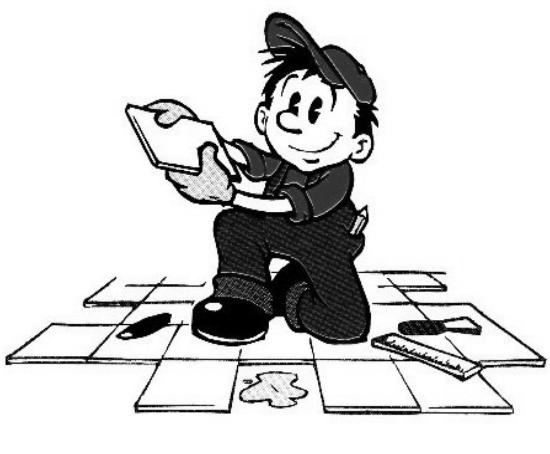
یک‌شنبه ۸۹/۵/۲۴

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۴. کاشی‌کاری

فرض کنید S شکلی در صفحه باشد که مرز آن شامل هیچ نقطه شبکه‌ای نباشد. فرض کنید $x, y \in S$ دو نقطه شبکه‌ای به فاصله ۱ باشند (نقطه‌ای را شبکه‌ای گوییم اگر مختصات طول و عرض آن صحیح باشد). فرض کنید با استفاده از کپی‌های شکل S بتوان صفحه را کاشی‌کاری کرد به‌طوری که نقاط x و y همواره روی نقاط شبکه‌ای بیفتند (کپی‌های S را می‌توان دوران داد و یا برگرداند). ثابت کنید مساحت شکل S، برابر با تعداد نقاط شبکه‌ای درون آن است.





موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

دوشنبه ۸۹/۵/۲۵

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۵. دنباله جالب

n عددی طبیعی است و $x_1, x_2, \cdots$ دنباله‌ای از اعداد ۱ و ۱− است که دارای خاصیت‌های زیر است:

- متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن $2^n - 1$ است. (یعنی برای هر عدد طبیعی j داریم $x_{j+2^n-1} = x_j$ و $2^n - 1$ کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت است.)
- اعداد صحیح متمایز $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k < n$ وجود دارند که برای هر عدد طبیعی j داریم

$$x_{j+n} = x_{j+t_1} \times x_{j+t_2} \times \cdots \times x_{j+t_k}$$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی s که $s < 2^n - 1$ داریم

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i x_{i+s} = -1$$

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

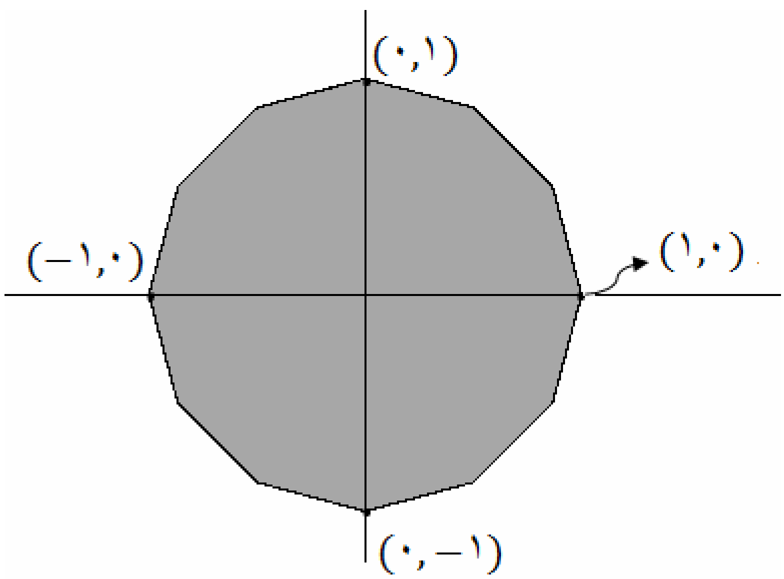
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

دوشنبه ۸۹/۵/۲۵

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۶. چندوجهی

یک ۱۲-ضلعی در صفحه را خوب می‌گوییم هرگاه:
اولاً منتظم باشد، دوماً تو پر باشد!!، سوماً مرکز آن مبدأ مختصات باشد، چهارماً راس‌های آن شامل نقاط $(0,1)$ و $(1,0)$ و $(-1,0)$ و $(0,-1)$ باشد. یعنی به شکل زیر:



تعداد وجه‌های <u>حجیم‌ترین</u> چندوجهی‌ای را بیابید که تصویرش روی هر سه صفحه xy و yz و zx یک ۱۲-ضلعی خوب شود.
(واضح است که مرکزهای این سه ۱۲-ضلعی بر هم منطبق و همان مبدا مختصات برای فضای **سه بعدی** است.)

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

سه‌شنبه ۸۹/۵/۲۶

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۷. تابع جالب

S مجموعه‌ای n عضوی است و $P(S)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های S است و

$$f : P(S) \to \mathbb{N}$$

تابعی با خاصیت‌های زیر است:

- برای هر زیرمجموعه از S مانند A، داریم $f(A) = f(S - A)$.
- برای هر دو زیرمجموعه از S مانند A و B، داریم

$$\max(f(A), f(B)) \geq f(A \cup B)$$

ثابت کنید تعداد اعضای بُرد f کوچک‌تر یا مساوی n است.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

سه‌شنبه ۸۹/۵/۲۶

مدت امتحان ۴۵ دقیقه

۸. اعداد $n^۲ + ۱$

ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی به صورت $n^۲ + ۱$ وجود دارد که هیچ مقسوم علیهی به شکل $k^۲ + ۱$ به جز یک و خودش، ندارد.

موفق باشید.