بسم الله الرحمن الرحیم

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۸۸

سؤال شماره ۱. خیلی دور، خیلی نزدیک

الف. ابتدا یک لم را اثبات می‌کنیم.

لم. اگر P نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه $PB+PC \leq AB+AC$.

اثبات. CP را امتداد می‌دهیم تا AB را در نقطه‌ی D قطع کند. در این صورت با توجه به نابرابری مثلث

$$PB+PC \leq BD+PD+PC = BD+CD \leq BD+DA+AC = AB+AC$$

□

حال به مسئله‌ی اصلی برمی‌گردیم. داریم:

$$\begin{aligned}
B_1B_2+B_2B_3+\cdots+B_nB_1 &\leq (B_1M_1+B_2M_1)+(B_2M_2+B_3M_2)+\cdots+(B_nM_n+B_1M_n)\\
&= (B_1M_1+B_1M_n)+(B_2M_1+B_2M_2)+\cdots+(B_nM_{n-1}+B_nM_n)\\
&\leq (A_1M_1+A_1M_n)+(A_2M_1+A_2M_2)+\cdots+(A_nM_{n-1}+A_nM_n)\\
&\leq (A_1M_1+M_1A_2)+(A_2M_2+M_2A_3)+\cdots+(A_nM_n+M_nA_1)\\
&= A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA_1
\end{aligned}$$

که نابرابری اول همان نابرابری مثلث و نابرابری دوم با توجه به لم بوده است.

ب. برای هر عدد طبیعی $1 \leq k \leq n$، فرض کنید $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = L_k\overrightarrow{u_k}$ که L_k طول بردار $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ و $\overrightarrow{u_k}$ بردار یکه‌ای هم‌جهت با آن است. در این صورت $\overrightarrow{u_k}-\overrightarrow{u_{k-1}}$ با نیم‌ساز درونی زاویه‌ی $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ هم‌راستا است.
به علاوه فرض کنید $\overrightarrow{\omega_k} = \overrightarrow{A_kC_k}$ در نتیجه با توجه به نحوه‌ی تعریف C_k،

$$\overrightarrow{\omega_k}.(\overrightarrow{u_k}-\overrightarrow{u_{k-1}}) \leq 0 \quad (*)$$

که در این‌جا منظور از . ضرب داخلی این دو بردار است. به علاوه دقت کنید که همه‌ی اندیس‌ها به پیمانه‌ی n در نظر گرفته می‌شوند. از طرف دیگر

$$\overrightarrow{C_{k-1}C_k} = \overrightarrow{\omega_k} + L_k\overrightarrow{u_{k-1}} - \overrightarrow{\omega_{k-1}}$$

دقت کنید که $\overrightarrow{u_k}$ بردار واحد در راستای خودش انتخاب شده بود و بنابراین

$$\left|\overrightarrow{C_{k-1}C_k}\right| \geq \overrightarrow{C_{k-1}C_k}.\overrightarrow{u_{k-1}} = (\overrightarrow{\omega_k}+L_k\overrightarrow{u_{k-1}}-\overrightarrow{\omega_{k-1}}).\overrightarrow{u_{k-1}} = \overrightarrow{\omega_k}.\overrightarrow{u_{k-1}} + L_k - \overrightarrow{\omega_{k-1}}.\overrightarrow{u_{k-1}}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\overrightarrow{C_{k-1}C_k}\right| \geq \sum_{k=1}^{n}L_k + \sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\omega_k}.\overrightarrow{u_{k-1}}) - \sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\omega_{k-1}}.\overrightarrow{u_{k-1}})$$

از سوی دیگر با توجه به $(*)$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{\omega_k}.(\overrightarrow{u_k}-\overrightarrow{u_{k-1}})\right)\leq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\omega_k}.\overrightarrow{u_{k-1}})\geq \sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\omega_k}.\overrightarrow{u_k})=\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\omega_{k-1}}.\overrightarrow{u_{k-1}})$$

و این نتیجه می‌دهد

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\overrightarrow{C_{k-1}C_k}\right|\geq \sum_{k=1}^{n}L_k=\sum_{k=1}^{n}\left|\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\right|$$

و اثبات این قسمت هم به پایان می‌رسد.

سؤال شماره ۲. جای‌گشت ثابت‌قدم

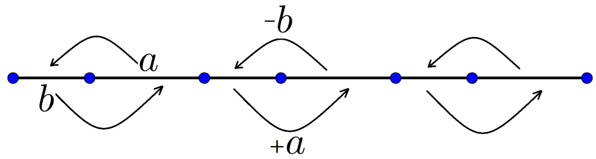
از آن‌جا که $\sum_{k=1}^{n}(\pi(k)-k)=0$، در بین دو عضو مجموعه‌ی $\{\pi(k)-k : k=1,2,\dots,n\}$ باید یکی مثبت و دیگری منفی باشد. فرض کنید اعضای این مجموعه a و $-b$ باشند که $a,b>0$. هم‌چنین فرض کنید $A=\{k:\pi(k)-k=a\}$ و $B=\{k:\pi(k)-k=b\}$.

نخست توجه کنید که اگر $i\in A$ و $i+a+b\leq n$ باشد، $i+a+b$ هم عضوی از A است. زیرا اگر $i\in A$ و $i+a+b\leq n$، از آن‌جا که $\pi(i)=i+a$ بود و π یک جای‌گشت است $\pi(i+a+b)$ دیگر نمی‌تواند برابر $i+a$ باشد و در نتیجه $\pi(i+a+b)-(i+a+b)=a$ که این یعنی $i+a+b\in A$. با استدلال کاملاً مشابه می‌توان دید که اگر $j\in B$ و $j-a-b\geq 1$، $j-a-b\in B$ خواهد بود.

از سوی دیگر می‌توان به راحتی دید که اگر $1\leq i\leq b$، $i\in A$ و اگر $n-a<i\leq n$، $i\in B$. این مشاهدات به ما این امکان را می‌دهد که بفهمیم هر کدام از اعضای مجموعه‌ی $\{1,2,\dots,n\}$ در کدام یک از A یا B قرار دارند. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم i بر $a+b$ کم‌تر یا مساوی b باشد، با توجه به توضیحات بالا باید $i\in A$ و اگر باقی‌مانده‌ی این تقسیم بیش‌تر از b باشد، $i\in B$. بنابراین به سادگی نتیجه می‌شود که $a+b$ باید مقسوم‌علیهی از n باشد. حال دقت کنید که برای هر مقسوم‌علیه d از n، $d-1$ راه مختلف برای نوشتن d به صورت مجموع دو عدد طبیعی وجود دارد. بنابراین تعداد کل (a,b)هایی که $a+b|n$ برابر است با

$$\sum_{d|n}(d-1)=\sum_{d|n}d-\sum_{d|n}1=\sigma(n)-\tau(n)$$

از سوی دیگر برای هر چنین a,bای با توجه به توضیحات بالا می‌توان جای‌گشتی ساخت که خاصیت مسئله را داشته باشد. کافی است که در هر بلوک به صورت $\{k(a+b)+1,k(a+b)+2,\dots,(k+1)(a+b)\}$ جای‌گشت ما b عدد اول را به علاوه‌ی a کرده و a عدد بعدی را منهای b کند.



سؤال شماره ۳. مثلث‌بندی موازی

فرض کنید که ضلع پایین مثلث اصلی افقی باشد، بنابراین مجموع نسبت‌های تجانس برابر است با مجموع علامت‌دار نسبت طول ضلع افقی مثلث‌ها به طول ضلع افقی مثلث اصلی. فرض کنید Δ_0 بیان‌گر مثلث اصلی و $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ بیان‌گر مثلث‌های کوچک باشند. به علاوه برای $0 \leq i \leq k$ ، h_i را طول ضلعی افقی مثلث Δ_i و برای $1 \leq i \leq k$ ، ϵ_i را علامت ضریب تجانس Δ_0 و Δ_i بگیرید (اگر تجانس مستقیم باشد، این علامت برابر ۱ و اگر معکوس باشد برابر ۱− است). با این توضیحات نسبت تجانس دو مثلث Δ_i و Δ_0 برابر $\epsilon_i \frac{h_i}{h_0}$ خواهد بود. بنابراین خواسته‌ی مسئله محاسبه‌ی مجموع $\sum_{i=1}^{k}\left(\epsilon_i \frac{h_i}{h_0}\right) = \frac{1}{h_0}\sum_{i=1}^{k}\epsilon_i h_i$ است.

هر قطعه از پاره‌خط‌های افقی به جز پاره‌خط‌هایی که روی ضلع مثلث اصلی قرار دارند، قسمتی از ضلع دو مثلث هستند که یکی هم‌جهت با مثلث اصلی است و دیگری در جهت متفاوت است. بنابراین هر قطعه از خطوط افقی که ضلع مثلث اصلی نیست، در مجموع $\sum_{i=1}^{k}\epsilon_i h_i$ یک بار با علامت مثبت و یک بار با علامت منفی ظاهر می‌شود و این دو علامت مختلف باعث می‌شوند که تأثیر آن تکه پاره‌خط از بین برود.

در نهایت با توجه به این که هر تکه‌ی افقی از ضلع مثلث اصلی تنها یک بار با علامت مثبت در این مجموع ظاهر می‌شود، داریم:

$$\sum_{i=1}^{k}\epsilon_i h_i = h_0 \Rightarrow \frac{1}{h_0}\sum_{i=1}^{k}\epsilon_i h_i = 1$$

و این همان چیزی است که قصد ثابت کردن آن را داشتیم.

سؤال شماره ۴. تابعین!

برای هر $x \neq y$ داریم:

$$\big(f(x)-f(y)\big)^{۲}+\big(g(x)-g(y)\big)^{۲} \geq \frac{۱}{۲}\Big(\,|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|\,\Big)^{۲} > \frac{۱}{۲}$$

این نشان می‌دهد که اگر برای هر x حقیقی نقطه‌ی $(f(x),g(x))$ را در صفحه علامت بزنیم، هر دو نقطه‌ی علامت‌زده فاصله‌ای به اندازه‌ی حداقل $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ دارند. اگر حول هر کدام از این نقطه‌ها دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ بزنیم، این دایره‌ها دو به دو یک دیگر را قطع نمی‌کنند. با توجه به این اعداد حقیقی ناشمارا هستند، ناشمارا دایره‌ی دو به دو مجزا در صفحه رسم کرده‌ایم. اما از طرف دیگر توجه کنید که در هر کدام از این دایره‌ها می‌توان یک نقطه با مختصات گویا یافت، اما از آن‌جا که تعداد چنین نقطه‌هایی شمارا هستند، این اتفاق ممکن نیست. (در واقع با این فرآیند به هر عدد حقیقی x، نقطه‌ای با مختصات گویا نسبت داده‌ایم که این نقطه‌ها برای اعداد حقیقی مختلف متفاوت هستند، که این یک تابع یک به یک از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{Q}^{۲}$ معرفی می‌کند که چنین تابعی وجود ندارد.)[۱]

[۱] حل این سؤال مستلزم داشتن اطلاعاتی در مورد مجموعه‌های شمارا و ناشمارا بود که در دوره‌ی تابستانی آن سال به دانش‌پژوهان تدریس شده بود و همگی با این مفاهیم آشنایی داشته‌اند.

سؤال شماره ۵. توپ غلطان

r را شعاع توپ و O را مکان اولیه‌ی آن در صفحه بگیرید. ابتدا توپ را در راستای دایره عظیمه‌ای که از نقطه‌ی علامت‌زده‌شده و بالاترین نقطه‌ی کره می‌گذرد حرکت می‌دهیم تا این نقطه‌ی علامت‌دار به بالاترین مکان منتقل شود. A را مکان جدید توپ در صفحه بگیرید. OA طول کمانی از دایره عظیمه است که نقطه‌ی علامت‌دار روی کره طی کرده که این مقدار به وضوح کم‌تر از محیط یک دایره‌ی دایره‌ی عظیمه یعنی $۲\pi r$ است. بنابراین نقطه‌ای مثل B در صفحه می‌توان یافت که $OA = OB = ۲\pi r$. دقت کنید که اگر نقطه‌ی علامت‌دار بالاترین نقطه‌ی کره باشد و ما آن را در یک جهت دل‌خواه به اندازه‌ی $۲\pi r$ بغلطانیم، مجدداً نقطه‌ی رنگی بالاترین نقطه خواهد بود. پس اگر کره را ابتدا در جهت AB و سپس در جهت BO حرکت دهیم، در نهایت به نقطه‌ی O برمی‌گردد و با توجه به نکته‌ای که اشاره شد، نقطه‌ی علامت‌دار بالاترین نقطه‌ی کره خواهد بود.

سؤال شماره ۶. مبنای یک به علاوه‌ی آی!

صورت این سؤال اشکال داشته است. در واقع با توجه به تساوی $i=\sum\limits_{i=۱}^{\infty}(۱+i)^n$، برای i بسطی نامتناهی در مبنای $۱+i$ وجود دارد و می‌توان به سادگی دید که نمی‌توان یک بسط متناهی برای i معرفی کرد.

سؤال شماره ۷. چندوجهی محیطی

توجه به صورت مسئله در صفحه، یعنی یک چندضلعی که همه‌ی اضلاع آن بر یک دایره مماس هستند و رنگ کردن اضلاع آن به گونه‌ای هیچ دو ضلع مجاوری سیاه‌رنگ نباشند، برای حل این مسئله سودمند است.
برای هر وجه چندوجهی نقطه‌ی تماس کره‌ی محاطی با آن وجه را در نظر بگیرید و این نقطه را به همه‌ی رئوس این وجه وصل کنید. با این کار سطح چندوجهی به تعدادی مثلث افراز می‌شود.
فرض کنید که AB یک ضلع از چندوجهی و F_1 و F_2 دو وجهی از چندوجهی باشند که شامل این ضلع هستند. به علاوه T_1 و T_2 را به ترتیب نقطه‌های تماس کره‌ی محاطی با F_1 و F_2 بگیرید. توجه کنید که در این صورت AT_1 و AT_2 هر دو به کره مماس هستند، زیرا مثلاً در مورد AT_1 می‌دانیم که وجه F_1 تنها یک نقطه‌ی اشتراک با کره دارد و بنابراین AT_1 هم نمی‌تواند بیش‌تر از یک نقطه‌ی تماس داشته باشد و T_1 آن نقطه‌ی تماس است.
حال اگر صفحه‌ی گذرا از مرکز کره (O)، T_1 و A را رسم کنیم دایره‌ای حاصل می‌شود که AT_1 بر آن مماس است و در نتیجه $AT_1^2 = AO^2 - r^2$ که r شعاع آن دایره است که با توجه به این که مرکز آن همان مرکز کره بود، همان شعاع کره است. با همین استدلال طول AT_2 هم برابر AT_1 به دست می‌آید. پس $AT_1 = AT_2$. استدلال کاملاً مشابه نتیجه می‌دهد که $BT_1 = BT_2$. پس دو مثلث ABT_1 و ABT_2 هم‌نهشت هستند.
با این توضیحات دو مثلث ایجادشده روی سطح چندوجهی که هر دو شامل یک ضلع از چندضلعی هستند، با هم هم‌نهشت هستند و به طور خاص مساحت برابر دارند. از طرف دیگر هر دوی این مثلث‌ها هم‌زمان سیاه‌رنگ نخواهند بود، پس برای هر مثلث سیاه‌رنگ یک مثلث سفیدرنگ با مساحت برابر با آن وجود خواهد داشت و این نتیجه می‌دهد که مساحت ناحیه‌ی سیاه‌رنگ از ناحیه‌ی سفیدرنگ بیش‌تر نیست.

سؤال شماره ۸. خوشه‌ی نامتناهی

توجه. در صورت سؤال عبارتی تحت عنوان «مربع افقی به مرکز مبدأ و به ضلع $۲n + ۱$» وجود دارد. منظور از طول ضلع مربع در این بیان، تعداد نقطه‌های صحیح روی ضلع مربع است. شاید به‌تر بود که از عدد $۲n$ برای طول ضلع این مربع استفاده می‌شد.

بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که مبدأ در بین نقطه‌های حذف‌شده نیست. حال خوشه‌ای که شامل مبدأ است را در نظر بگیرید. اگر این خوشه متناهی باشد، مرز آن شامل نقطه‌هایی حذف‌شده است که مجاور به یکی از رأس‌های این خوشه هستند. فرض کنید k کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که همه‌ی نقطه‌های این خوشه درون مربعی به ضلع $۲k + ۱$ به مرکز مبدأ قرار می‌گیرند. در این صورت حتماً یکی از نقطه‌های خوشه‌ی شامل مبدأ روی مرز این مربع قرار دارد. به دلیل تقارن فرض کنید این رأس روی ضلع عمودی سمت راست مربع باشد. در این صورت برای هر $۰ \leq i \leq k + ۱$، در مربع به ضلع $۲k + ۳$ به مرکز مبدأ یک نقطه‌ی حذف شده با مؤلفه‌ی اول i وجود دارد (اگر در یکی از این ستون‌ها نقطه‌ی حذف‌شده‌ای وجود نداشته باشد، k کوچک‌ترین عدد ممکن نبوده است). پس در مربع به ضلع $۲k + ۳$ به مرکز مبدأ حداقل $k + ۲$ نقطه‌ی حذف شده داریم که چون $k + ۲ > \frac{k+۱}{۲}$، این با فرض مسئله تناقض دارد و بنابراین خوشه‌ی شامل مبدأ نامتناهی است.

حال فرض کنید که حداقل دو خوشه‌ی نامتناهی مجزا داریم. می‌توان عدد طبیعی r یافت که هر دوی این خوشه‌ها در مربع به مرکز مبدأ و ضلع $۲r + ۱$ رأس داشته باشند. به دلیل هم‌بندی و نامتناهی بودن خوشه‌ها برای هر عدد طبیعی $k \geq r$، هر دو خوشه روی مرز مربع به مرکز مبدأ و ضلع $۲k + ۱$ رأس دارند. به علاوه برای هر $k \geq r$ باید یکی از رئوس مربع به ضلع $۲k + ۱$ به مرکز مبدأ حذف شده باشد، چون در غیر این صورت دو خوشه از روی مرز این مربع به هم متصل می‌شوند. پس برای یک عدد طبیعی بزرگ N، حداقل $N - r$ رأس حذف‌شده در مربع به ضلع $۲N + ۱$ به مرکز مبدأ داریم. اگر $N > ۲r$، $N - r > \frac{N}{۲}$ و این یعنی بیش از $\frac{N}{۲}$ از رئوس در این مربع حذف شده است که با فرض مسئله تناقض دارد. پس یک و فقط یک خوشه‌ی نامتناهی در این گراف داریم.