به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

۱. دقت کنید:

$$\begin{aligned} p(x) = ax^2 + bx + c &= \tfrac{x(1+x)}{2}(a+b+c) - \tfrac{x(1-x)}{2}(a-b+c) + (1-x^2)c \\ &= \tfrac{x(1+x)}{2}p(+1) - \tfrac{x(1-x)}{2}p(-1) + (1-x^2)p(0) \end{aligned}$$

اگر $0 \leq x \leq 1$ باشد، آن‌گاه:

$$|ax^2 + bx + c| \leq \frac{x(1+x)}{2} + \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) = \frac{5}{4} - (\frac{1}{2} - x)^2 \leq \frac{5}{4}$$

و اگر $-1 \leq x \leq 0$:

$$|ax^2 + bx + c| \leq -\frac{x(1+x)}{2} - \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) = \frac{5}{4} - (\frac{1}{2} + x)^2 \leq \frac{5}{4}$$

این نشان می‌دهد که برای هر x در بازه‌ی $[-1,1]$، $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$. ضمناً با توجه به این نابرابری‌ها تساوی زمانی رخ می‌دهد که:

الف. $p(x) = \pm(x^2 - x - 1)$ در $x = +\frac{1}{2}$.

ب. $p(x) = \pm(x^2 + x - 1)$ در $x = -\frac{1}{2}$.

۲. فرض کنید a_1، a_2، a_3 و a_4 به ترتیب نمایان‌گر تعداد درختان سیب، درختان انار، درختان هلو و خانه‌های خالی باشند. دقت کنید که هر خانه‌ی خالی، هر درخت هلو و هر درخت انار یک هم‌سایه‌ی سیب دارند. هم‌چنین با توجه به تعداد سیب‌ها که a_1 است، حداکثر $4a_1$ زوج خانه‌ی هم‌سایه می‌توان یافت که یکی از آن‌ها درخت سیب باشد و دیگری درخت سیب نباشد. پس $4a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4$. اگر شمارش مشابهی را برای تعداد زوج خانه‌های مجاوری که دقیقاً یکی از آن‌ها درخت انار و دیگری درخت هلو و یا خالی باشد انجام دهیم، می‌بینیم که هر خانه‌ی خالی و هر درخت هلو یک هم‌سایه‌ی انار دارد و از طرف دیگر با توجه به این که هر درخت انار یک هم‌سایه‌ی سیب دارد، حداکثر سه تا از هم‌سایه‌های یک درخت انار می‌توانند هلو و یا خالی باشند. در نتیجه حداکثر $3a_2$ زوج خانه‌ی مجاور با این خاصیت می‌توان یافت و لذا $3a_2 \geq a_3 + a_4$. با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $2a_3 \geq a_4$.

بنابراین:

$$\begin{aligned} 2a_3 &\geq a_4 & &\Rightarrow \quad a_3 \geq \tfrac{a_4}{2} \\ 3a_2 &\geq a_3 + a_4 \geq \tfrac{a_4}{2} + a_4 = \tfrac{3}{2}a_4 & &\Rightarrow \quad a_2 \geq \tfrac{a_4}{2} \\ 4a_1 &\geq a_2 + a_3 + a_4 \geq \tfrac{a_4}{2} + \tfrac{a_4}{2} + a_4 = 2a_4 & &\Rightarrow \quad a_1 \geq \tfrac{a_4}{2} \end{aligned}$$

پس در کل با توجه به این که $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 50 \times 50 = 2500$ داریم:

$$2500 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + a_4 = \frac{5}{2}a_4 \Rightarrow 1000 \geq a_4$$

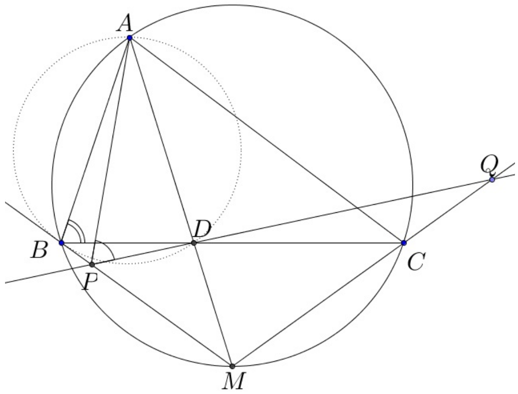
و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۳. با توجه به این که AM نیم‌ساز زاویه‌ی BAC است، داریم:

$$\angle DBM = \angle CBM = \angle MAC = \frac{\angle BAC}{2} = \angle BAM$$

پس دایره‌ی محیطی مثلث ABD در B بر BM مماس است و در نتیجه نقطه‌ی P که روی این خط مماس قرار دارد، نمی‌تواند درون دایره باشد. بنابراین $\angle APQ = \angle APD \leq \angle ABD = \angle B$.(اگر T را نقطه‌ی دیگر تقاطع PD با دایره‌ی محیطی ABD بگیریم، زاویه‌ی $\angle ATD$ که برابر $\angle ABD$ است زاویه‌ی خارجی مثلث APT خواهد بود و بنابراین از $\angle APD$ کم‌تر نیست.
با استدلال کاملاً مشابه می‌توان فهمید $\angle AQP \leq \angle C$. پس در کل:

$$\angle PAQ = ۱۸۰^\circ - \angle APQ - \angle AQP \geq ۱۸۰^\circ - \angle B - \angle C = \angle A$$



۴. ادعا می‌کنیم این عمل برای عدد طبیعی $n > ۲$ امکان‌پذیر است، اگر و تنها اگر برای $n - ۲$ امکان‌پذیر باشد. فرض کنید برای بیان چهار جهت از چهار واژه‌ی "بالا"، "پایین"، "چپ" و "راست" استفاده کنیم. دقت کنید که اگر n ستون $n + ۲$تایی بخواهند به $n + ۲$ستون nتایی تبدیل شوند، نفرات سطر بالا باید حتماً یک واحد به پایین حرکت کنند و نفرات پایین باید حتماً یک واحد به بالا بروند. به همین ترتیب نفرات سمت راست باید یک قدم به سمت چپ بروند و نفرات سمت چپ یک واحد به سمت راست بیایند.(البته به غیر از نفر بالایی و پایینی این ستون‌ها که در ستون بالا و پایین هستند و حرکتشان توضیح داده شد.) حال به بقیه‌ی سربازها توجه کنید. آن‌ها شامل $n - ۲$ ستون، nتایی هستند که باید به n ستون $n - ۲$تایی تبدیل شوند. بنابراین ادعا ثابت می‌شود. بنابراین با تکرار چندباره‌ی این ادعا می‌توان دید که اگر n عددی زوج باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای $n = ۲$ قابل انجام باشد. هم‌چنین اگر n عددی فرد باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای $n = ۱$ قابل انجام باشد. این کار برای $n = ۱$ قابل انجام نیست، زیرا دو سرباز کناری هر دو تنها می‌توانند به خانه‌ی وسط بیایند و این امکان ندارد. اما در مورد $n = ۲$ به سادگی می‌توان دید که این کار قابل انجام است. پس این کار تنها زمانی ممکن است که n زوج باشد.

۵. برای هر زوج $i < j$ از اعداد طبیعی متمایز، می‌دانیم که $a_j - a_i | a_j$ و با توجه به اکیداً صعودی و طبیعی بودن a_iها:

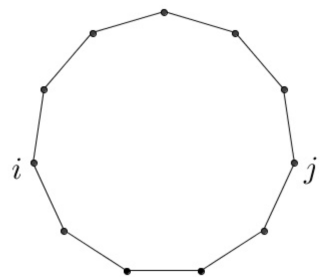
$$a_j > a_j - a_۱ > a_j - a_۲ > \cdots > a_j - a_i$$

از طرف دیگر همه‌ی جمله‌های بالا مقسوم‌علیه a_j هستند. بنابراین اگر $a_j > b_۱ > b_۲ > \cdots > b_k$ همه‌ی مقسوم‌علیه‌های a_j باشند، خواهیم داشت $a_j - a_i \leq b_i$. حال از آن‌جا که b_i، $i + ۱$امین مقسوم‌علیه بزرگ

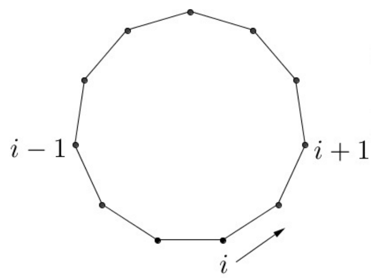
a_j است، $b_i \leq \frac{a_j}{i+۱}$ و بنابراین در کل:

$$a_j - a_i \leq b_i \leq \frac{a_j}{i+۱} \Rightarrow (i+۱)(a_j - a_i) \leq a_j \Rightarrow ia_j \leq (i+۱)a_i \leq ja_i$$

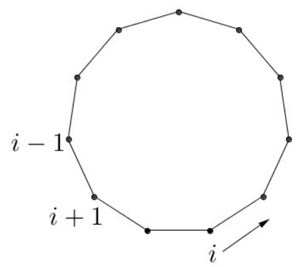
۶. ابتدا میز را به ۱۱ کمان برابر تقسیم کنید. حال اگر کارت‌های i و j در دو نقطه از جدول باشند، فاصله‌ی بین آن‌ها را تعداد کمان‌های بین نقاط آن دو می‌گیریم(تعداد کمان‌های کم‌تر). به طور مثال در شکل زیر فاصله‌ی دو کارت i و j برابر ۵ است.



حال بعد از هر مرحله مجموع فاصله‌های کارت‌های با شماره‌های متوالی را محاسبه می‌کنیم.(دقت کنید که کارت ۱۱ با ۱ شماره‌ی متوالی دارند!) اگر محل کارت i در کمان کوچک‌تر بین $i+۱$ و $i-۱$ باشد، این مقدار تغییر نمی‌کند. (زیرا فاصله‌ی $i+۱$ و $i-۱$ تغییر نمی‌کند، اما در بین فاصله‌ی i و $i+۱$ و همین‌طور i و $i-۱$، از یکی یک واحد کم می‌شود و به دیگری یک واحد اضافه می‌گردد.) و در غیر این صورت دو واحد تغییر می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید.



مجموع فاصله تغییر نمی‌کند.



دو واحد تغییر می‌کند.

بنابراین زوجیت این مقدار همواره ثابت می‌ماند. در ابتدا این مقدار برابر ۱۱ است و اگر قرار باشد همه‌ی کارت‌ها در یک نقطه جمع شوند، این مقدار باید برابر صفر شود که امکان ندارد.