پاسخ تشریحی سوالات مرحله اول

المپیاد ریاضی ۱۳۸۸

مخصوص شرکت کنندگان مرحله اول المپیاد کشوری ریاضی

مؤلفین

خشایار خسروی

سپهر قاضی نظامی

ماهد آب روشن

سیداحسان آزرم سا

بهمن ۱۳۸۸

۱. گزینه (ب) صحیح است.

داریم که :

مساحت مثلث به ضلع واحد $= \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ و مساحت دایره به شعاع واحد $= \pi$

بنابراین می خواهیم n ای را بیابیم که $|\pi - n\frac{\sqrt{۳}}{۴}|$ کمینه باشد یا معادل آن $|n - \frac{۴\pi}{\sqrt{۳}}|$ کمینه باشد.

داریم که :

$$\pi \cong ۳.۱ \text{ و } \sqrt{۳} \cong ۱.۷ \Rightarrow \frac{۴\pi}{\sqrt{۳}} \cong ۷.۳$$

پس n برابر ۷ است.

۲-گزینه (د) صحیح است.

ابتدا حاصل ضرب اعداد جدول ضرب ۱۰ در ۱۰ را محاسبه می کنیم. توجه کنید حاصلضرب اعداد سطر i ام برابر است با $10! \times i^{10}$. در نتیجه حاصل ضرب کل اعداد جدول برابر است با : $(10!)^{20}$. اکنون می خواهیم ببینیم بزرگترین m طبیعی که به ازای آن $\sqrt[m]{(10!)^{20}}$ صحیح است چیست. توجه کنید برای اینکه این امر محقق شود باید توان همه ی عوامل اول $(10!)^{20}$ بر عدد m بخش پذیر باشد. در نتیجه بزرگترین عدد طبیعی m با این خاصیت برابر با ب.م.م توان عوامل اول در $(10!)^{20}$ است. در نتیجه با توجه به اینکه : $(10!)^{20} = 2^{160} \times 3^{80} \times 5^{40} \times 7^{20}$

در نتیجه بزرگترین m با خاصیت مذکور برابر است با : $(160,80,40,20) = 20$.

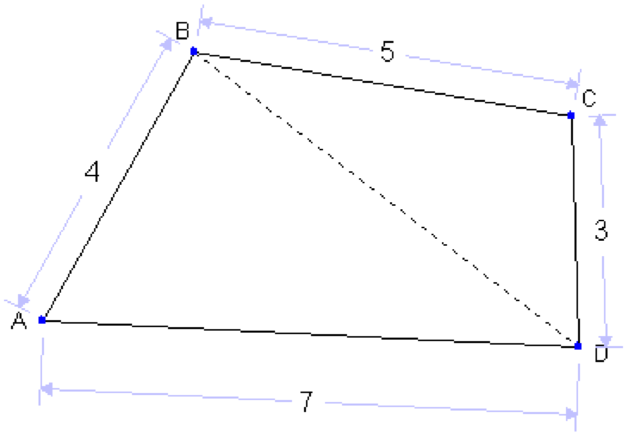
۳- گزینه (ب) صحیح است.

با توجه به این که هر سیاره لااقل یک قمر دارد، می توان گفت که مجموع جرم اقمار این منظومه با مجموع جرم سیارات این منظومه برابر است. از طرفی همان طور که گفتیم مجموع جرم سیارات برابر با مجموع جرم ستاره این منظومه است. پس در نتیجه می توان گفت که مجموع جرم اجرام این منظومه برابر با ۳ برابر جرم ستاره است. حال با توجه به این که ۱۳۲ جرم در این منظومه قرار دارد، می توان گفت که

$$\text{میانگین اجرام} = \frac{۳ \times ۱.۹۸ \times ۱۰^{۳۰}}{۱۳۲} = ۴.۵ \times ۱۰^{۲۸}$$

۴. گزینه (الف) صحیح است.

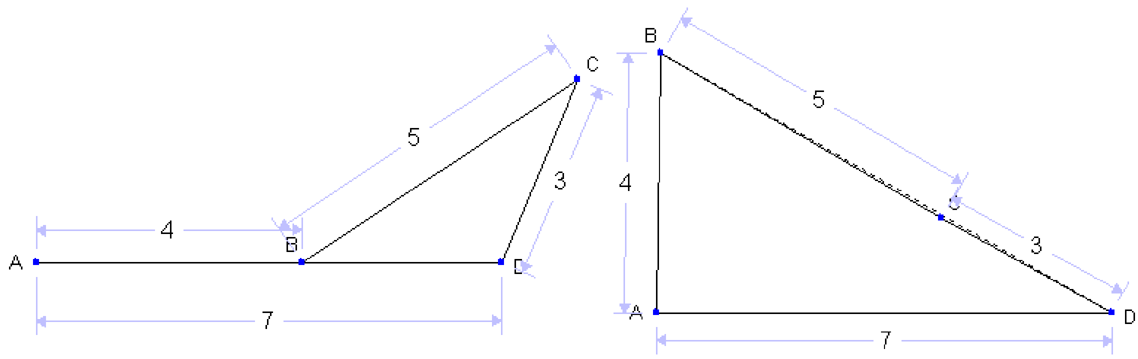
مطابق شکل:



داریم که طبق نامساوی مثلث $BA + BD \geq AD$ پس $۴ + BD \geq ۷$ یا $BD \geq ۳$

همچنین داریم که $BC + CD \geq BD$ پس $۸ \geq BD$

پس داریم که $۸ \geq BD \geq ۳$ و به سادگی می توانید تحقیق کنید که هر مقداری این میان را اتخاذ می کند.



۵- گزینه (ج) صحیح است.

با توجه به این که نمره نفر اول کلاس الف بیشتر یا مساوی میانگین نمرات این کلاس است و این میانگین از میانگین کلاس ب بیشتر است، می توان گفت که نمره نفر اول کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیشتر است. در نتیجه ممکن نیست که کسی در کلاس ب نباشد که نمره اش از نفر اول کلاس الف کمتر باشد. در نتیجه حداکثر ۴۹ نفر در کلاس ب هستند که از تمامی افراد کلاس الف بیشتر است.

حال کافی است که برای ۴۹ نیز مثالی ذکر کنیم. فرض کنید ۴۹ نفر در کلاس ب نمره ۱۰۰ کسب کردند و یکی صفر شده باشد. در کلاس الف نیز همگی نمره ۹۹ را کسب کرده باشند. در نتیجه

$$\frac{۱۰۰ \times ۴۹}{۵۰} < \frac{۵۰ \times ۹۹}{۵۰}$$

در این حالت به وضوح ۴۹ نفر در کلاس ب نمره شان از تمامی افراد کلاس الف بیشتر شده است.

۶. گزینه (ب) صحیح است.

شنبه ای که مهندس ناظر برای اولین بار از تونل بازدید کرده را روز صفر بنامید.پس مطابق زیر برنامه بازدیدها را می نویسیم:

اولین بازدید	روز ۰
دومین بازدید	روز ۰+۱
سومین بازدید	روز ۰+۱+۲
چهارمین بازدید	روز ۰+۱+۲+۳
.	.
.	.
.	.
صدمین بازدید	روز ۰+۱+...+۹۸+۹۹

پس صدمین بازدید در روز $۰ + ۱ + ۲ + \cdots + ۹۹ = \frac{۹۹ \times ۱۰۰}{۲} = ۴۹۵۰$ انجام می شود داریم که باقیمانده ۴۹۵۰ بر ۷ برابر ۱ است لذا این بازدید در یک روز بعد از شنبه یعنی یک شنبه صورت می گیرد.

۷- گزینه (ه) صحیح است.

این فرد در روز اول به یکی از ۳ شهر تبریز، مشهد مقدس یا شیراز سفر می کند. پس مسیر مسافرتش در روز اول به سه طریق مشخص می شود. این مسافرت نیز به وسیله هواپیما، قطار یا اتوبوس صورت گیرد. پس به ۳ طریق می تواندوسیله مورد نظرش را انتخاب کند. در روز دوم با دو وسیله می تواند مسافرت کند و از شهر اول به یکی از دوسهر باقیمانده می تواند سفر کند. در روز سوم با سه وسیله به شهر باقیمانده سفر می کند. در روز چهارم نیز با دو وسیله می تواند به اصفهان بازگردد. در نتیجه تعداد راه های مسافرت او بنابر اصل ضرب برابر است با:

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۲۱۶$$

۸- گزینه (ج) صحیح است.

با تجزیه ۹۸۰۰ به عوامل اول خواهید یافت که $۹۸۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲ \times ۷^۲$. در نتیجه با توجه به این که ارقام از ۰ تا۹ هستند، لزوما از هرکدام از ۵ و ۷ دو مرتبه استفاده می شود. حال برای ایجاد عامل $۲^۳$ سه راه وجود دارد:

الف) از یک ۸ استفاده کنیم و درنتیجه باید برای بقیه ارقام از ۱ استفاده شود. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و در آخر به ۴طریق می توان جایگاه ۸ را مشخص کرد. پس در این حالت ۱۶۸۰ عدد ۸ رقمی داریم.

ب) از یک ۴ استفاده کنیم و یک ۲. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و به ۴ طریق جایگاه ۴و به ۳ طریق جایگاه ۲ را مشخص می کنیم. پس در این حالت ۵۰۴۰ عدد ۸ رقمی داریم.

ج) از ۳ عدد۲ استفاده می کنیم. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و به $\binom{۴}{۳}$ طریق می توان جایگاه ۲ ها را مشخص کرد. پس در این حالت۱۶۸۰ عدد ۸رقمی داریم.

در نتیجه در کل ۸۴۰۰ عدد ۸ رقمی با این خاصیت وجود دارد.

۹-گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا ثابت می کنیم الف همواره درست است. فرض کنید a گنگ باشد ولی a^3 و a^4-1 گویا باشند. در اینصورت a^4 هم گویا است. علاوه بر آن $a=\frac{a^4}{a^3}$ و $a^3 \neq 0$. در نتیجه تقسیم دو عبارت گویا برابر با عبارتی گنگ شده در حالی که می دانیم حاصل تقسیم دو عدد گویا عددی گویاست. این تناقض است.

راه دیگری هم برای اثبات مسئله وجود دارد و آن ارائه مثال نقض برای بقیه گزینه هاست.

برای ب کافی است $a=\sqrt[3]{2}$ را در نظر بگیرید.

برای ج کافی است $a=\sqrt[30]{2}$ را در نظر بگیرید.

برای د کافی است $a=\sqrt{2}$ را در نظر بگیرید.

و برای ه کافی است $a=\sqrt[5]{2}$ را در نظر بگیرید.

پس گزینه الف صحیح است.

۱۰=گزینه (ب) صحیح است.

توجه کنید سوال به دنبال تعداد اعداد به فرم $2^m \times 3^n$ ای می گردد که بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ قرار دارند و نه خود اعداد. توجه کنید که برای هر n حداکثر یک m به دست می آید که $5000 < 2^m \times 3^n < 10000$ (اگر دو m به دست آید یعنی اینکه یک عدد و دوبرابرش در بازه $(5000,10000)$ قرار گرفته اند که این امکان ندارد). علاوه بر این می خواهیم نشان دهیم برای هر n صحیح و نامنفی که $3^n < 10000$ باشد m ای پیدا می شود که $5000 < 2^m \times 3^n < 10000$. برای این کار ابتدا $m = 0$ را در نظر می گیریم. اگر عدد 3^n از ۵۰۰۰ بیش تر باشد که چیزی که می خواستیم یافته ایم در غیر اینصورت $m = 1$ در نظر گرفته می شود. اکنون دقت کنید که امکان ندارد که $2 \times 3^n > 10000$ زیرا در اینصورت 3^n بزرگتر از ۵۰۰۰ بوده که می دانیم اینگونه نبوده است. در نتیجه $2 \times 3^n < 10000$. اگر این عدد از ۵۰۰۰ بیش تر باشد مسئله حل است. در غیر اینصورت $m = 2$ را در نظر می گیریم و روند فوق را ادامه می دهیم. توجه کنید که این روند متوقف می شود زیرا به جایی می رسیم که $2^u \times 3^n \geq 2^u > 10000$. وقتی روند متوقف شد m را یافته ایم و این m هم یکتاست. در حقیقت ما ابتدا یک عدد کوچکتر از ۱۰۰۰۰ در نظر می گیریم و در هر مرحله آن را دو برابر می کنیم. این روند را آن قدر ادامه می دهیم تا اولین مرحله ای که از ۱۰۰۰۰ بیش تر شویم. اگر مرحله ی قبل از این مرحله را درنظر بگیریم حتما عددمان در این مرحله چیزی بین ۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ بوده است.

در نتیجه جواب مسئله برابر است با تعداد اعداد صحیح و نامنفی m که $3^m < 10000$ که با یک بررسی ساده می بینیم که ۹ عدد m در رابطه بالا صدق می کنند یعنی اعداد صحیح از ۰ تا ۸ . پس گزینه ب صحیح است.

۱۱-گزینه (ه) صحیح است.

فرض کنید که $1 - x = u$ و $2y = v$ باشند در اینصورت $f(u,v) = 0$ در نتیجه مجموعه جوابی که برای u,v به دست می آید همان شکلی است که در فرض مسئله داده شده است. اکنون :

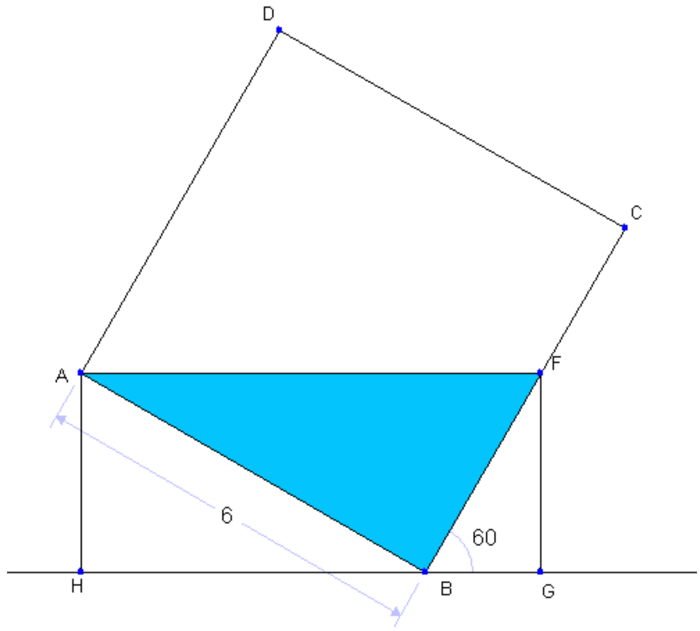
$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = \dfrac{v}{2} \end{cases}$$

در نتیجه برای به دست آوردن مجموعه نقاط خواسته شده باید ابتدا نموداری که در مسئله داده شده است را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.سپس یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. در پایان هم باید با یک

تجانس به نسبت $\frac{1}{2}$ مختص دوم همه ی نقاط را نصف کنیم (به نوعی نمودار را جمع کنیم). اگر این کارها را انجام دهیم به سادگی معلوم است که گزینه (ه) جواب مسئله است.

۱۲. گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا $۱۰۸ = ۳ \times ۶ \times ۶$ سانتی متر مکعب آب درون مکعب قرار دارد.شکل زیر نمای کناری مکعب بعد از کج شدن است:



$$FG = AH = ۶\sin(۳۰^{\circ}) = ۳ \,, GH = BH + BG = AH.cot(۳۰^{\circ}) + FG.tan(۳۰^{\circ})$$
$$= ۳\left(\sqrt{۳} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) = ۴\sqrt{۳}$$

پس حجم آب باقی مانده برابر است با:

$$۶ \times \left(\text{مساحت مثلث } ABF\right) = ۶ \times \frac{۳ \times ۴\sqrt{۳}}{۲} = ۳۶\sqrt{۳}$$

داریم که $۳۶\sqrt{۳} < ۱۰۸$ پس آب بیرون می ریزد و حجم آب بیرون ریخته شده برابر $۱۰۸ - ۳۶\sqrt{۳}$ است.

۱۳- گزینه (الف) صحیح است.

توجه کنید که ۱۳۸۸ بر ۴ بخشپذیر است اما بر ۸بخشپذیر نیست. طبق معادله $y^۳ = ۲x^۲ + ۱۳۸۸$، نتیجه می گیریم $y^۳$ زوج است. پس y نیز زوج است. در نتیجه $y^۳$ بر ۸ بخشپذیر است. حال عبارت $y^۳ - ۱۳۸۸$ بر ۴ بخشپذیر است. در نتیجه لزوما $x^۲$ زوج است. پس x نیز زوج است و $۲x^۲$ بر ۸ بخشپذیر است. در نتیجه $y^۳ - ۲x^۲$ نیز بر ۸ بخشپذیر است که این گونه نیست. زیرا ۱۳۸۸ بر ۸ بخشپذیر نیست.

۱۴- گزینه (د) صحیح است.

راه اول:

فرض کنید $\overline{abcd}$ عددی چهار رقمی با این خاصیت باشد. به راحتی می توان دید که

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = ۹۹۹a + ۹۰b - ۹۰c - ۹۹۹d = ۹\big(۱۱۱(a-d) + ۱۰(b-c)\big)$$
$$= ۶۱۷۴$$
$$\Longrightarrow ۱۱۱(a-d) + ۱۰(b-c) = ۶۸۶$$

توجه کنید که

$$۶۸۶ \equiv ۱۱۱(a-d) \pmod{۱۰} \implies ۶ \equiv a-d \pmod{۱۰}$$

پس با توجه به این که $a > d$ لزوما $a - d = ۶$ و بنابر رابطه فوق لزوما $b - c = ۲$.

پس با توجه با این تساوی ها می توان گفت که $۰ \le d \le ۳$ و $d < c < ۴ + d$ (چرا؟). پس کلا ۴ انتخاب برای d و ۳ انتخاب متناظر با آن برای c داریم. همچنین a و b به صورت یکتا با توجه به آن دو مشخص می گردند.در نتیجه به ۱۲ حالت می توان اعداد مطلوب را تولید کرد.

راه دوم:

داریم که

$$a > b > c > d$$

و

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = ۶۱۷۴$$

حال شروط برقراری رابطه بالا را بررسی می کنیم.اولا چون $a > d$ پس در محاسبه رقم یکان حاصل عبارت ده بر یک صورت می گیرد پس $۱۰ + d - a = ۴$ پس $a - d = ۶$ همین طور در این مرحله یکی از رقم c که بزرگتز صف نیز هست کم می شود.پس هنوز داریم که $۰ \le c - ۱ < b$ پس اینجا نیز باید ده بر یک بکنیم و داریم که

$۷ = b - (c - ۱) + ۱۰$ پس داریم که $b - c = ۲$ در این مرحله نیز یکی از b کم می شود ولی باز هم داریم که $c \geq b - ۱$ پس $b - ۱ - c = ۱$ یا $b - c = ۲$ در نهایت هم داریم که برای محاسبه رقم چهارم باید a را منهای d کنیم که نتیجه می شود $a - d = ۶$ پس دو شرط $a - d = ۶$ و $b - c = ۲$ لازم و کافی هستند.

با توجه به شرط اول به سادگی به دست می آید که برای انتخاب a و d تنها ۴ حالت وجود دارد و با داشتن a و d برای انتخاب b و c تنها ۳ حالت وجود دارد.پس در کل $۱۲ = ۴ \times ۳$ حالت برای انتخاب $\overline{abcd}$ وجود دارد.

۱۵-گزینه (ه) صحیح است.

توجه کنید f یک سهمی است که ضریب درجه دوم آن منفی است پس ماکسیمم دارد. همچنین ماکسیمم آن به ازای $x = -\frac{b}{2a} = \frac{b}{2}$ رخ می دهد. از آن جایی که این مقادیر سهمی باید همواره کمتر از یا مساوی ۲ باشند پس ماکسیمم آن از ۲ نابیشتر است. پس

$$f(\frac{b}{2}) \leq 2 \Rightarrow -(\frac{b}{2}) + b(\frac{b}{2}) + c \leq 2 \Rightarrow b^2 + 4c \leq 8$$

اکنون می دانیم که فاصله ی ریشه ها برابر است با :

$$S = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{-2} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{-2} \right| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 + 4c} \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

در نتیجه کافی است مثالی ارائه دهیم. توجه کنید هر دو عدد حقیقی b,c که برای آن ها $b^2 + 4c = 8$ جواب هستند و مثال مورد نظر را می توانید بسازید . پس گزینه (ه) صحیح است.

۱۶-گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید از آنجایی که عدد در مبنای ۲ فقط از ۰ و ۱ تشکیل شده است در نتیجه یک عدد در این مبنا کاهشی است اگر به فرم 1111...100...000 باشد که در این عدد m بار ۱ و n بار صفر استفاده شده است. از آنجایی که ما فقط اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۲۴ را بررسی می کنیم پس اعدادی را بررسی می کنیم که برای آن ها $m+n \leq 10, m \geq 1$. اکنون می خواهیم ببینیم چه تعدادی از این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند. توجه کنید برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۴ از راست شروع می کنیم و به جای ۰۰ , ۰۱ , ۱۰ و ۱۱ به ترتیب ۲,۱,۰ و ۳ قرار می دهیم. اگر تعداد ارقام در مبنای ۲ فرد بود در پایان یک عدد باقی می ماند که حتما ۱ است یا معادلا ۰۱ است که به جای آن ۱ قرار می دهیم. در نتیجه اعداد بالا را به دو قسمت تقسیم می کنیم :

- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ زوج است: توجه کنید همه ی این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند (در واقع اگر دوتا دوتا تقسیم کنید و به فرم این اعداد در مبنای ۲ توجه کنید کاملا مشخص است) . فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد طبیعی ۲k رقمی در مبنای ۲ که به فرم 11...100...0 هستند را بشماریم. توجه کنید تعداد صفر ها در این اعداد می تواند عددی بین۰ تا ۲k-۱ باشد و با تعداد صفر ها عدد یکتا معلوم می شود. پس دقیقا ۲k تا از این اعداد داریم. در نتیجه تعداد اعداد در این قسمت دقیقا برابر است با : ۳۰=۱۰+۸+۶+۴+۲
- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ فرد است: اگر به مطالبی که در بالا توضیح داده شد دقت کنید می بینید که چپ ترین رقم این اعداد در مبنای ۴ حتما ۱ است. در نتیجه رقم های دیگر این عدد همگی باید ۰ یا ۱ باشند (در مبنای ۴). اما هیچکدام از این ارقام نمی توانند ۱ باشند در واقع اگر بخواهد رقمی در مبنای ۴ غیر از این چپ ترین ۱ , ۱ باشد پس این عدد به فرم 11...100...0 در مبنای ۴ است که در آن تعداد ۱ ها حداقل ۲ است و این به این معناست که این عدد در مبنای ۲ به فرم : 1010101...01000...0 است که از آنجایی که تعداد ۱ ها در مبنای ۴ حداقل ۲ تاست پس در مبنای ۲ هم حداقل یک عبارت ۱۰۱ داریم و این با فرم اولیه ی این اعداد متناقض است. در نتیجه در بین اعدادی که در مبنای ۲ فرد رقم دارند و به فرم 11...100...0 هستند فقط اعدادی می توانند مناسب باشند که دقیقا یک عدد ۱ در نمایششان داشته باشند. علاوه بر این همه ی این اعداد هم مناسب هستند. در نتیجه از آنجایی که تعداد ارقام این اعداد حداکثر ۱۰ است پس دقیقا ۵ تا از این اعداد داریم (۱ رقمی , ۳ رقمی , ۵رقمی , ۷رقمی و ۹رقمی در مبنای ۲ و از هرکدام دقیقا یکی).

در نتیجه در کل دقیقا ۳۵=۵+۳۰ تا از این اعداد کاهشی در هر دو مبنا داریم و گزینه ج صحیح است.

۱۷- گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید $(x,y)=d$ (یعنی d ب.م.م دو عدد x و y باشد) و $x=dx'$ و $y=dy'$. در نتیجه:

$$x+y|۲x+۷y \Rightarrow d(x'+y')|d(۲x'+۷y') \Rightarrow x'+y'|۲x'+۷y'$$
$$\Rightarrow x'+y'|۵y' \Rightarrow x'+y'|۵ \Rightarrow x'+y'=۵$$

توجه کنید که $(x',y')=۱ \Rightarrow (y',x'+y')=۱$ و x' و y' هر دو طبیعی هستند. در نتیجه روابط خط آخر عبارت فوق صحیح هستند. از طرفی می توان بررسی کرد که هر دو عدد طبیعی که دارای شرط فوق باشند (یعنی $(x+y=۵(x,y))$ در شرط مسئله صدق می کنند. پس کافی است تنها تعداد (x,y) را بشماریم که در شرط فوق صدق کنند و هر دو از ۱۰۱ کمتر باشند. پس ۴ حالت ممکن است:

الف- $x'=۴\,,y'=۱ \Rightarrow dx'=x<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d\le ۲۵$

پس به ۲۵ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ب- $x'=۳\,,y'=۲ \Rightarrow dx'=x<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d\le ۳۳$

پس به ۳۳ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ج- $x'=۱\,,y'=۴ \Rightarrow dy'=y<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d\le ۲۵$

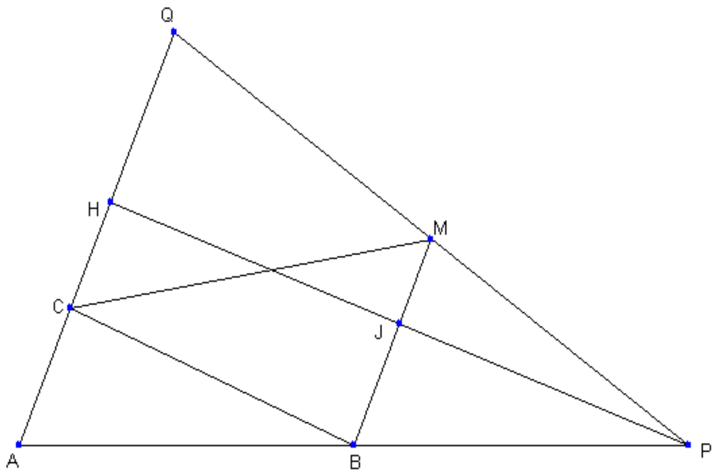
پس به ۲۵ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ب- $x'=۲\,,y'=۳ \Rightarrow dy'=y<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d\le ۳۳$

پس به ۳۳ طریق می توان d را انتخاب کرد.

در کل جواب برابر است با $۱۱۶ = ۳۳ + ۲۵ + ۳۳ + ۲۵$.

۱۸. گزینه (ج) صحیح است.



منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است.

داریم که با توجه به شرایط مساله $MB||AQ$ و همچنین فرض کنید PH بر AQ و BM عمود است. داریم که :

$$BM=\frac{۱}{۲}AQ,\frac{۱}{۲}PH=HJ \Rightarrow \frac{S_{MBC}}{S_{APQ}}=\frac{HJ.BM}{PH.AQ}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{MBC}=\frac{۱}{۴}S_{APQ}$$

همچنین داریم که:

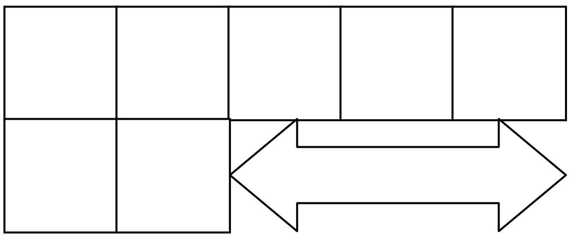
$$S_{\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}} \mathrm{S}_{\mathrm{AQB}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}} \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} \mathrm{S}_{\mathrm{APQ}} \Rightarrow \mathrm{S}_{\mathrm{APQ}} = ۶\mathrm{S}_{\mathrm{ABC}}$$

پس:

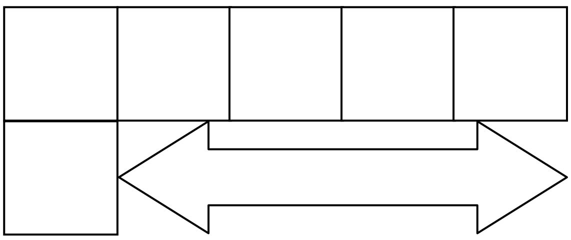
$$S_{\mathrm{MBC}} = \frac{۱}{۴} \mathrm{S}_{\mathrm{APQ}} = \frac{۳}{۲} \mathrm{S}_{\mathrm{ABC}}$$

۱۹- گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید تعداد حالاتی که می توان اعداد ۱ تا n $(n \geq ۴)$ را در یک جدول مشابه شکل زیر چید(به طوری که اعداد در دو سطر و در دو ستون از کوچک به بزرگ چیده شده باشند) برابر باشد با b_n.



به راحتی بررسی می توان کرد که در شکلی مشابه زیر به $m - ۱$ طریق می توان اعداد ۱ تا m را جاسازی کرد(به طوری که اعداد در سطر و ستون به صورت صعودی چیده شده باشند).



حال به وضوح عدد n را در جدول فوق به دو صورت می توان جاسازی کرد(انتهای سطر اول و انتهای سطر دوم). حال در حالت اول بقیه جدول را می توان به $b_{n-۱}$ طریق اعداد را جایسازی کرد و در حالت دوم به $n - ۲$ طریق.پس می توان نتیجه گرفت که $b_n = b_{n-۱} + n - ۲$. حال با توجه به این که $b_۴ = ۲$، نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} b_n &= b_۴ + ۳ + ۴ + \cdots + (n - ۲) = ۲ + ۳ + \cdots + (n - ۲) \\ &= \frac{(n - ۱)(n - ۲)}{۲} - ۱ \end{aligned}$$

پس $b_{۱۰} = ۳۵$.

۲۰. گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا عدد n را در مبنای ۲ می نویسیم و این عملیات را بررسی می کنیم.

نشان می دهیم که عملیات فوق اولین رقم ناصفر عدد در مبنای دو را ۰ می کند و یک ۱ به انتهای آن اضافه می کند.

چرا که بزرگترین ۲^a ای که $۲^a|\mathrm{n}$ همان ضریب اولین ۱ در نمایش مبنای ۲ عدد n است و کوچکترین ۲^b که $۲^b < n$ همان ضریب رقمی است که بعد از آخرین یک عدد n در بسط مبنای ۲ ظاهر می شود:

$$\begin{aligned}
n &= (۰۱a_۱a_۲ \ldots a_{u-۱}a_u۱۰۰ \ldots ۰)_۲ \\
۲^a &= (۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \ldots ۰۰۰۱۰۰ \ldots ۰)_۲ \\
۲^b &= (۱۰۰۰۰۰ \ldots ۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \ldots ۰)_۲ \\
n + ۲^b - ۲^a &= (۱۱a_۱a_۲ \ldots a_{u-۱}a_u۰۰۰ \ldots ۰)_۲
\end{aligned}$$

بنابراین با این الگو از ۴۲ شروع می کنیم و داریم که $۴۲ = (۱۰۱۰۱۰)_۲$:

مرحله ۰	$(۱۰۱۰۱۰)_۲$
مرحله ۱	$(۱۱۰۱۰۰۰)_۲$
مرحله ۲	$(۱۱۱۰۰۰۰۰)_۲$
مرحله ۳	$(۱۱۱۰۰۰۰۰۰)_۲$
مرحله ۴	$(۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰)_۲$

همانطورکه مشاهده می شود از مرحله ۲ به بعد هر بار عدد فوق دو برابر می شود.در مرحله ۲ برابر است با $۲^۵ + ۲^۶ + ۲^۷$

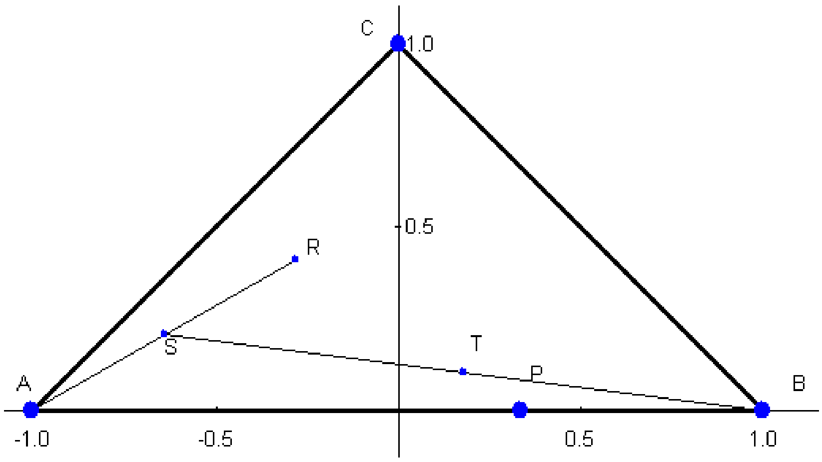
لذا در مرحله ۱۱۳ یعنی ۱۱۱ مرحله بعد به عدد $۲^{۱۱۸} + ۲^{۱۱۷} + ۲^{۱۱۶}$ یا ۷×۲^{۱۱۶} می رسیم.

۲۱. گزینه (د) صحیح است.

نشان می دهیم که در هر دو مرحله (یعنی یک مرحله با شماره زوج و بعد یک مرحله با شماره فرد) فاصله مورچه تا نقطه P روی خط AB که فاصله P تا نقطه B نصف فاصله آن از A است یک چهارم می شود.این نکته را به ۲ راه نشان می دهیم:

راه اول:

مطابق شکل مثلث را روی محور مختصات قرار دهید:



اگر مورچه ابتدا در نقطه $(x_{۲k},y_{۲k})$ قرار داشته باشد بعد از یک مرحله به نقطه $(x_{۲k+۱},y_{۲k+۱}) =$ $(\frac{x_{۲k}-۱}{۲},\frac{y_{۲k}}{۲})$ می رود و سپس به نقطه

$(x_{۲k+۲},y_{۲k+۲}) = \left(\frac{x_{۲k+۱}+۱}{۲},\frac{y_{۲k+۱}}{۲}\right) = \left(\frac{\left(\frac{x_{۲k}-۱}{۲}\right)+۱}{۲},\frac{y_{۲k}}{۲}\right) = (\frac{x_{۲k}+۱}{۴},\frac{y_{۲k}}{۴})$ می رود. پس می توانیم بنویسیم:

$$\left(x_{۲k+۲}-\frac{۱}{۳},y_{۲k+۲}\right) = \left(\frac{۱}{۴}\left(x_{۲k}-\frac{۱}{۳}\right),\frac{۱}{۴}(y_{۲k})\right)$$

پس فاصله مورچه در مرحله $۲k+۲$ از نقطه $\frac{۱}{۳}$ برابر یک چهارم فاصله مورچه تا همین نقطه در مرحله $۲k$ است.

راه دوم:

در مراحل فرد مانند این است که تجانسی به مرکز A و نسبت $\frac{۱}{۲}$ و در مراحل فرد تجانسی به مرکز B و نسبت $\frac{۱}{۲}$ می زنیم.

این تجانس ها حرکات مورچه را مشخص می کنند.می دانیم ترکیب این دو تجانس، تجانسی به نسبت $\frac{۱}{۴}$ می شود.حال کافی است مرکز آن را بیابیم.می دانیم که مرکز تجانس تنها نقطه ای است که در اثر تجانس

ثابت می ماند.می توانید به سادگی نشان دهید که نقطه P ثابت می ماند لذا مرکز تجانس است.پس مانند بالا اثبات شد که در این دو مرحله فاصله مورچه تا نقطه P یک چهارم می شود.پس به طریق دوم نیز اثبات شد.

حال داریم که فاصله مورچه در ابتدا از نقطه P کمتر از طول AB است پس بعد از ۲۰ مرحله نیز فاصله آن از P کمتر از $\frac{AB}{۴^{۲۰}}$ می شود و به وضوح به همواره به وسط AB نزدیک تر خواهد بود.

۲۲- گزینه (د) صحیح است.

راه حل اول:

به وضوح فردی که در ابتدا، در انتهای صف حضور داشته است، تا ابد در آخر صف باقی خواهد ماند. توجه کنید که فردی که در حال حاضر نفر i صف است، پس از دستور فرمانده طبق تابع زیر جایگاهش در صف تغییر می کند:

$$\begin{cases} ۱۲۸ + \frac{i+۱}{۲} & i \text{ فرد} \\ \frac{i}{۲} & i \text{ زوج} \end{cases}$$

فردی که در نهایت پس از ۴۲ مرتبه دستور فرمانده در ابتدای صف قرار می گیرد را علی اکبر بنامید. به وضوح علی اکبر در مرحله قبل نفر دوم، در مرحله قبل آن نفر چهارم و $\cdots$ بوده است. به همین ترتیب می توان گفت که علی اکبر پس از ۳۴ دستور فرمانده، نفر ۲۵۶ صف بوده است. در مرحله قبل از این به راحتی می توان بررسی کرد که نفر ۲۵۵ صف بوده است. توجه کنید که $۲۵۵ = (۱۱۱۱۱۱۱۱)_۲$. در مرحله قبل از این علی اکبر در جایگاه۲۵۳ حضور داشت که $۲۵۳ = (۱۱۱۱۱۱۰۱)_۲$. به همین ترتیب اگر ادامه دهیم، هر مرحله که به عقب بازگردیم، دومین یک از سمت راست (در مبنای ۲)تبدیل به صفرخواهد شد. پس می توان نتیجه گرفت که بعد از ۲۶ دستور، علی اکبر در ابتدای صف حضور داشته است. با تکرار این روند باز می توان نتیجه گرفت که بعد از دستور دهم نیز علی اکبر در جایگاه اول قرار داشته و بعد از دستور دوم درجایگاه ۲۵۶. پس بعد از دستور اول درجایگاه ۲۵۵ قرار گرفته است. در نتیجه در اول کار علی اکبر در جایگاه ۲۵۳ صف بوده است.

راه حل دوم:

باز هم مانند بالا علی اکبر را همان سربازی که در مرحله ۴۲ در ابتدای صف قرار می گیرد بنامید.

اگر a_i مکان یکی از سربازها مثلا علی اکبر در مرحله i ام باشد به سادگی می توان نشان داد که

$$a_i \equiv ۲a_{i+۱} (\text{به پیمانه } ۲۵۷)$$

پس بعد از ۴۲ مرحله داریم که $a_{۴۲} = ۱$ چون برای علی اکبر داریم $a_۱ \equiv ۲^{۴۲} a_{۴۲}$ (به پیمانه ۲۵۷)
پس داریم که:

$$a_۱ \equiv ۲^{۴۲} \equiv ۲۵۶^{۵} \times ۴ \equiv (-۱)^{۵} \times ۴ \equiv ۲۵۳ \text{(به پیمانه ۲۵۷)}$$

پس علی اکبر ابتدا در مکان ۲۵۳ بوده است.

۲۳-گزینه (ب) صحیح است.

چندجمله ای مورد نظر به فرم $a_5x^5 + a_4x^4 + ... + a_0$ است که ضرایب جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند. اکنون می خواهیم این چندجمله ای بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد. توجه کنید که : $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$. در نتیجه اگر چندجمله ای فوق بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد پس چندجمله ای $(a_5 + a_2)x^2 + (a_4 + a_1)x + (a_3 + a_0)$ هم بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است. اگر به جای عبارت حاصل باقی مانده ی آن را بر $x^2 + x + 1$ قرار دهیم آنگاه این باقی مانده باید صفر باشد. این باقی مانده برابر است با : $(a_4 + a_1 - a_5 - a_2)x + (a_3 + a_0 - a_5 - a_2)$. صفر شدن این باقی مانده یعنی اینکه:

$$a_0 + a_3 = a_1 + a_4 = a_2 + a_5 = S$$

علاوه بر آن این اعداد جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند پس :

$$a_0 + a_1 + ... + a_6 = 1 + 2 + ... + 6 = 21$$

در نتیجه باید $S = 7$ باشد. حال برای شمردن تعداد این ۶ تایی ها بدین نحو عمل می کنیم. ابتدا a_0 را به دلخواه به ۶ حالت انتخاب می کنیم. از روی a_0 مقدار $a_3 = 7 - a_0$ به طور یکتا به دست می آید. بعد از آن از بین ۴ عدد باقی مانده a_1 را به دلخواه تعیین می کنیم پس مشابه بالا a_4 به طور یکتا معلوم می شود و در پایان از میان ۲ عدد باقی مانده به ۲ حالت a_2 را انتخاب می کنیم و a_5 به طور یکتا تعیین می شود. پس جواب مسئله برابر است با : $2 \times 4 \times 6 = 48$ و مسئله حل است.

۲۴-گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که :

$$a^3 - \frac{1}{a^3} \geq k(a - \frac{1}{a}) \Rightarrow (a - \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1) \geq k(a - \frac{1}{a})$$

اما $a - \frac{1}{a} > 0$ پس با ساده کردن آن از طرفین معلوم می شود که باید بزرگترین k حقیقی را بیابیم که برای هر a مثبت با شرط $a - \frac{1}{a} \geq 1$ داشته باشیم :

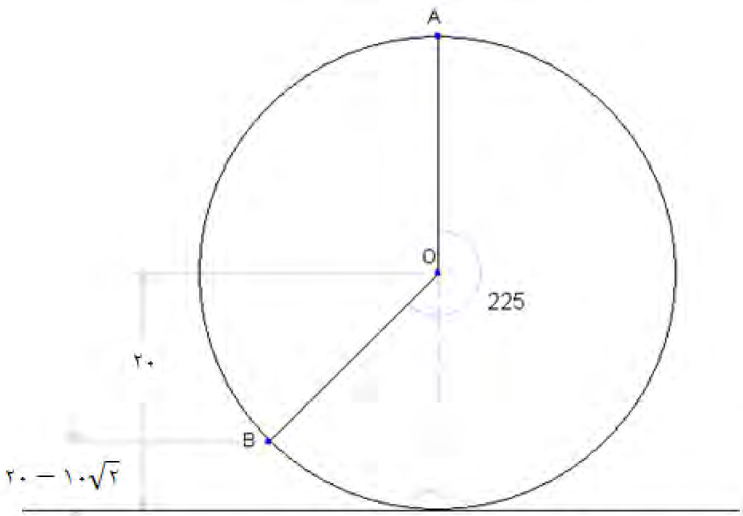
$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \geq k \Rightarrow (a - \frac{1}{a})^2 + 3 \geq k$$

اکنون دقت کنید که اگر عدد مثبت a به نحوی باشد که $a - \frac{1}{a} = 1$ ($a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) در این صورت در رابطه بالا به دست می آوریم که $4 \geq k$. برای اینکه نشان دهیم ماکزیمم k ,۴ است تنها کافی است نشان دهیم که برای هر a با شرط $a - \frac{1}{a} \geq 1$ داریم $(a - \frac{1}{a})^2 + 3 \geq 4$ که این هم بدیهی است. پس برای ۴ هم اثبات ارائه کردیم و هم مثالی ارائه کردیم که نشان دهیم از این عدد بزرگتر نمی توان یافت. درنتیجه گزینه

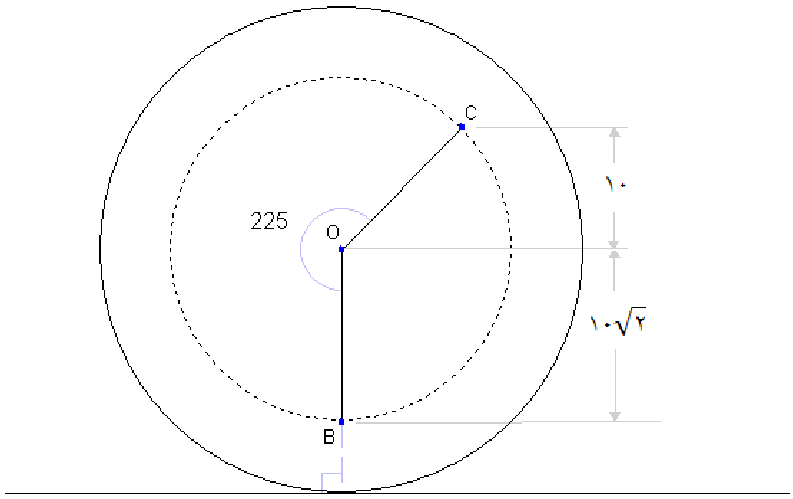
- توجه : نکته ای که باید به آن توجه کنید این است که هنگامی که به رابطه $a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \geq k$ می رسید اگر از نامساوی حسابی-هندسی بهره ببرید به این نتیجه می رسید که $a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \geq 3$ پس احتمالا حدس می زنید که شاید بهترین k همان ۳ باشد. البته این که در تست جواب ۳ وجود ندارد به شما کمک می کند تا احساس کنید در قسمتی اشتباه کرده اید. اما اگر در گزینه ها عدد ۳ وجود داشت توجه به این نکته که شما از فرض $a - \frac{1}{a} \geq 1$ هیچ استفاده ای نکرده اید می توانست راهنمای شما برای پیدا کردن خطا باشد.

۲۵. گزینه (ه) صحیح است.

محیط دایره عظیمه توپ برابر است با 40π و توپ 25π حرکت کرده است.پس در کل به اندازه $\frac{25\pi}{40\pi}=\frac{5}{8}$ دور یا ۲۲۵° چرخیده است.لذا با توجه به اینکه نقطه علامت خورده خود یک دایره عظیمه را می پیماید ارتفاع نقطه علامت خورده پس از حرکت به سمت شرق برابر $20+20\cos(225°)=20-10\sqrt{2}$ می شود.از اینجا به بعد در حرکت به سمت شمال هم توپ مقدار ۲۲۵° می چرخد ولی نقطه علامت خورده روی دایره ای ثابت حرکت می کند که شعاع آن برابر $20-\left(20-10\sqrt{2}\right)=10\sqrt{2}$ است و در ابتدا نقطه مورد نظر در پایین دایره قرار دارد. با چرخش به مقدار ۲۲۵° دیگر نقطه به ارتفاع $20-10\sqrt{2}\cos(225°)$ یا ۳۰ سانتی متر می رسد.در اشکال زیر نمای جانبی کره را در هر یک از این حرکات می بینید.



A محل نقطه پیش از حرکت به سمت شرق و B مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت



$\boldsymbol{B}$ محل نقطه پیش از حرکت به سمت شمال و C مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت

۲۶- گزینه (ج) صحیح است.

در شکل زیر دو کاشی روی جدول قرار گرفته است. با توجه به این که باید مجموع اعداد روی کاشی بر ۶ بخشپذیر باشد، لزوما $A_۳$ و $A_۴$ باید برابر باشند(چرا؟). به کمک این استدلال می توان گفت که اعداد نوشته شده در دو خانه ای که فاصله عمودی یا افقی آن ها ۲ است، برابر است.

$A_۱$	$B_۱$	$A_۲$	$B_۲$	
$C_۱$	$D_۱$	$C_۲$	$D_۲$	
$A_۳$	$B_۳$	$A_٤$	$B_٤$	
$C_۳$	$D_۳$	$C_٤$	$D_٤$	

به عبارتی اگر سطر ها و ستون ها را از چپ به راست و از بالا به پایین از ۱ تا ۱۳۸۸ شماره گذاری کنیم، خانه های با سطر فرد و ستون فرد با هم برابر هستند و این مقدار را A فرض کنید. به همین ترتیب کلیه خانه های (فرد،زوج) برابر C، تمام خانه های (زوج، فرد) برابر B و تمام خانه های (زوج،زوج) برابر D هستند. همچنین با کاشی گذاری ها، می توان ثابت کرد که

$$۲B \equiv ۲C \pmod{۶} \Rightarrow B \equiv C \pmod{۳}$$
$$۲A \equiv ۲D \pmod{۶} \Rightarrow A \equiv D \pmod{۳}$$
$$۶|۲B + A + D \Longrightarrow ۲|A + D \Longrightarrow A \equiv D \pmod{۲}$$
$$۶|۲D + B + C \Longrightarrow ۲|B + C \Longrightarrow B \equiv C \pmod{۲}$$

از روابط فوق می توان نتیجه گرفت که $B = C$ و $A = D$. در نتیجه کافی است که

$$۶|۲(A + B) \Longrightarrow ۳|A + B$$

حال A می تواند به ۶ حالت انتخاب شود و B متناظر با آن در ۲ حالت انتخاب می شود. پس جواب ۱۲ = ۲ × ۶ است.

۲۷-گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید A_n, B_n عباراتی باشند که از در آنها از n تا ۲ و n تا ۴ استفاده شده باشد و C_n عبارتی باشد که در آن از $4n$ تا ۲ استفاده شده باشد :

$$A_n = 2^{4^{2^{\cdots^{4}}}} \qquad B_n = 4^{2^{4^{\cdots^{2}}}} \qquad C_n = 2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}$$

اکنون هدف ما نشان دادن نامساوی $C_n > A_n > B_n$ برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ است. اگر این نامساوی را نشان دهیم از قرار دادن $n = 500$ جواب به دست می آید. این حکم را به روش استقرایی نشان می دهیم. به راحتی می توان این نامساوی را برای حالت پایه یعنی $n = 2$ چک کرد. اگر نامساوی برای n درست باشد برای $n+1$ می توان نوشت :

$$A_{n+1} = 2^{4^{A_n}} = 2^{2^{2A_n}} \qquad B_{n+1} = 4^{2^{B_n}} = 2^{2^{B_n+1}} \qquad C_{n+1} = 2^{2^{2^{2^{C_n}}}}$$

اکنون اگر دقت کنید $2A_n > 2B_n \geq B_n + 1$ در نتیجه $2^{2^{2A_n}} > 2^{2^{B_n+1}}$ یا معادلا : $A_{n+1} > B_{n+1}$.

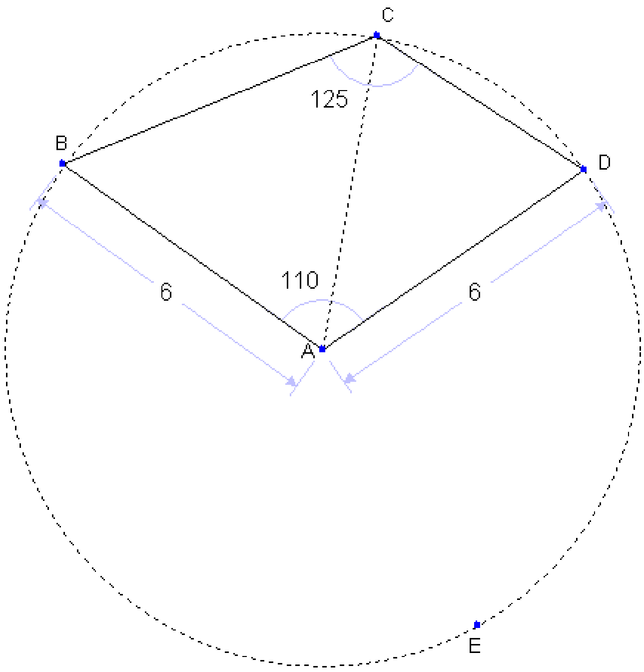
اکنون می خواهیم C_{n+1}, A_{n+1} را با هم مقایسه کنیم. ثابت می کنیم که : $2^{2^{C_n}} > 2A_n$ و از آن حکم را نتیجه می گیریم. توجه کنید که اگر u عددی طبیعی باشد $2^{2^{u}} > 2u$ صحیح است. در نتیجه :

$$2^{2^{Cn}} > 2C_n > 2A_n \Rightarrow 2^{2^{2^{2^{C_n}}}} > 2^{2^{2A_n}}$$

که از آن نتیجه می شود : $C_{n+1} > A_{n+1}$.

در نتیجه چیزی که می خواستیم ثابت کنیم باستقرا ثابت شد. پس برای $n = 500$ داریم :

$C > A > B$ و در نتیجه گزینه (ج) صحیح است.

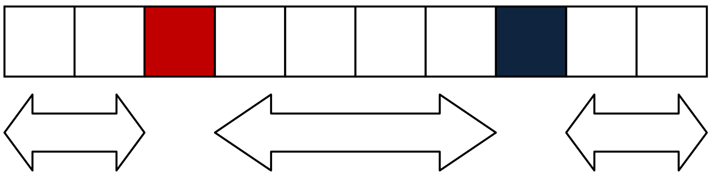


۲۸. گزینه (ج) صحیح است.

دایره به مرکز A و شعاع ۶ را اضافه می کنیم. (مطابق شکل) واضح است که B و D روی این دایره قرار دارند.نشان می دهیم که C هم روی این دایره قرار دارد. داریم که کمان BED برابر $۲۵۰^\circ = ۳۶۰^\circ - ۱۱۰^\circ$ است و زاویه BCD هم برابر $\frac{۲۵۰^\circ}{۲} = ۱۲۵^\circ$ است.لذا BED کمان درخور زاویه BCD است و C روی دایره قرار دارد.پس $AC = ۶$.

۲۹- گزینه (ب) صحیح است.

در هر حرکت ما قطعه جورچین را در یکی از سه ناحیه چپ، وسط و راست قرار می دهیم.



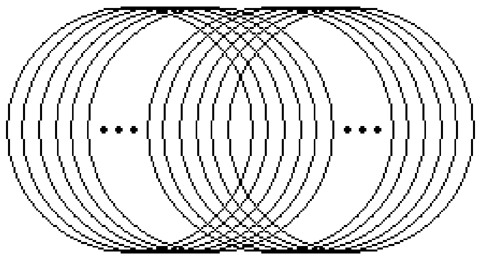
در اول تعداد روش های چیدن قطعات در ناحیه وسط را می شماریم. در ۳ مرحله ممکن است قطعات را از سمت چپ پیشروی دهیم یا از سمت راست(مثلا در مرحله اول ما می توانیم یک قطعه مجاور خانه قرمز قرار دهیم یا یک قطعه مجاور خانه آبی). قطعه آخر هم به صورت یکتا قرار خواهد گرفت. پس به ۸ طریق می توان ۴ خانه وسط را پر نمود. حال نوبت به چیدن قطعات ناحیه چپ است. در این جا دو قطعه باید قرار بگیرند که لزوما قطعه خانه ۲ زودتر از قطعه خانه ۱ پر می شود. در نتیجه برای ترکیب کردن چیدمان ناحیه چپ و وسط کافی است تعداد راه های قرار دادن دو حرکت بین ۴ حرکت خانه های وسط را شمارد. این هم بدین ترتیب است که ما می توانیم یکی از ۵ جایگاه ممکن برای قرار دادن این حرکات را به هر دو اختصاص دهیم یا دو محل مختلف اختصاص دهیم که در کل به ۱۵ طریق می توان حرکات ناحیه چپ را بین حرکات ناحیه وسط انجام داد. حال حرکات ناحیه راست را می خواهیم در بین ۶ حرکت نواحی چپ و وسط انجام دهیم. با استدلالی مشابه دو حرکت ناحیه راست

را به ۲۸ طریق می توان دو حرکت را جاسازی کرد($۷ + \binom{۷}{۲}$). پس در کل به $۸ \times ۱۵ \times ۲۸ =$ ۳۳۶۰ طریق می توان جورچین را چید.

توجه کنید که در این سوال از تکنیک ادغام حرکات استفاده شده بود. یعنی ما حرکات لازم برای انجام کارهای مختلف را به طور مناسبی در هم می آمیزیم. به همین منظور مسئله را به سه حالت تقسیم کرده و سپس آن ها را در هم آمیختیم.

۳۰. گزینه (ه) صحیح است.

دقت کنید که اگر شرط هم صفحه بودن وجود نداشت می توانستیم بی نهایت دایره را با الگوی شکل زیر روی یک صفحه قرار دهیم:



حال مناسب است با همان الگوی بالا بی نهایت دایره را روی یک کره بچینیم. به وضوح هر سه شرط مساله را بر آورده

کرده ایم.