به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

یک‌شنبه ۸۸/۵/۲۵

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

۱. خیلی دور، خیلی نزدیک

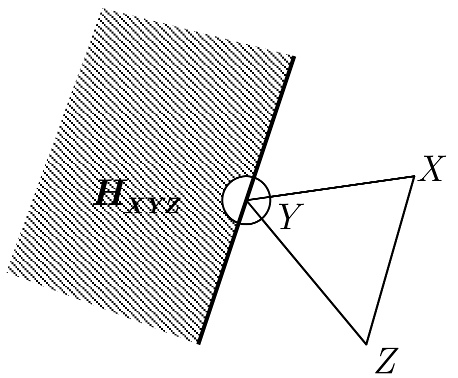
فرض کنید $n > 2$ و A_1، A_2،... و A_n نقاطی در صفحه باشند که هیچ سه تایی روی یک خط نیستند.

الف. فرض کنید M_1، M_2،... و M_n نقاطی روی پاره‌خط‌های A_1A_2، A_2A_3،... و A_nA_1 باشند. نشان دهید اگر B_1، B_2،...، B_n نقاطی، به ترتیب، درون مثلث‌های $M_nA_1M_1$، $M_1A_2M_2$،... و $M_{n-1}A_nM_n$ باشند آن‌گاه

$$\left|B_1B_2\right| + \left|B_2B_3\right| + \cdots + \left|B_nB_1\right| \leq \left|A_1A_2\right| + \left|A_2A_3\right| + \cdots + \left|A_nA_1\right|$$

که منظور از $\left|XY\right|$ طول پاره‌خط XY است.

ب. اگر X، Y و Z سه نقطه در صفحه باشد، آن‌گاه H_{XYZ} را نیم‌صفحه‌ای بگیرید که مرز آن نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی Y در مثلث XYZ باشد و شامل نیم‌ساز داخلی نباشد.



نشان دهید اگر C_1، C_2،... و C_n، به ترتیب، نقاطی در $H_{A_nA_1A_2}$، $H_{A_1A_2A_3}$،... و $H_{A_{n-1}A_nA_1}$ باشند

$$\left|A_1A_2\right| + \left|A_2A_3\right| + \cdots + \left|A_nA_1\right| \leq \left|C_1C_2\right| + \left|C_2C_3\right| + \cdots + \left|C_nC_1\right|.$$

پیش‌نهاد: قسمت ب را ابتدا در حالتی حل کنید که هر C_i روی نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی متناظر باشد.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

یک‌شنبه ۸۸/۵/۲۵

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۲. جای‌گشت ثابت‌قدم

جای‌گشت π روی $\{۱,۲,\dots,n\}$ را ثابت‌قدم گوییم اگر مجموعه‌ی $\{\pi(k)-k \mid k=۱,۲,\dots,n\}$ دو عضو داشته باشد. ثابت کنید تعداد جای‌گشت‌های ثابت‌قدم برابر است با $\sigma(n)-\tau(n)$ که در آن $\sigma(n)$ مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت n و $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n است. (یادآوری: جای‌گشت یعنی تابعی یک به یک و پوشا از یک مجموعه به خودش.)

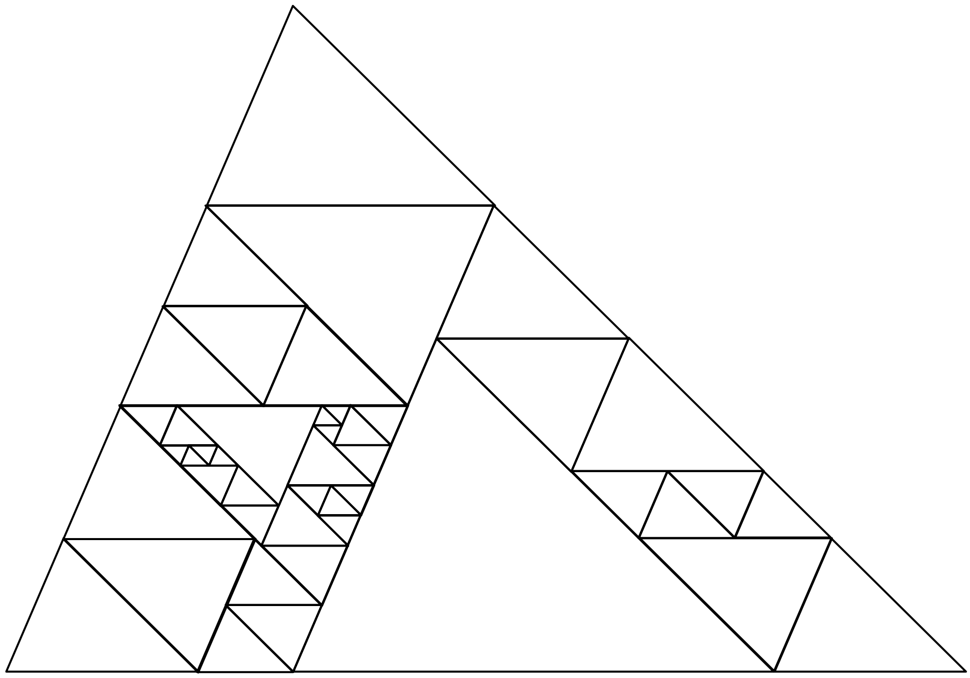
موفق باشید.

یک‌شنبه ۸۸/۵/۲۵

مدت امتحان ۴۵ دقیقه

۳. مثلث‌بندی موازی

مثلثی دل‌خواه را به تعدادی مثلث متشابه با خودش افراز کرده‌ایم به‌طوری که هر ضلع هر مثلث کوچک با ضلعی از مثلث اصلی موازی است. در این صورت هر مثلث کوچک تجانسی از مثلث اصلی است و ضریب تجانس می‌تواند مثبت یا منفی باشد. ثابت کنید مجموع همه‌ی ضریب تجانس‌ها برابر یک است.



موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

یک‌شنبه ۸۸/۵/۲۵

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۴. تابعین!

آیا دو تابع $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که به ازای هر $x \neq y$ نابرابری زیر برقرار باشد؟

$$\left|f(x) - f(y)\right| + \left|g(x) - g(y)\right| > ۱$$

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

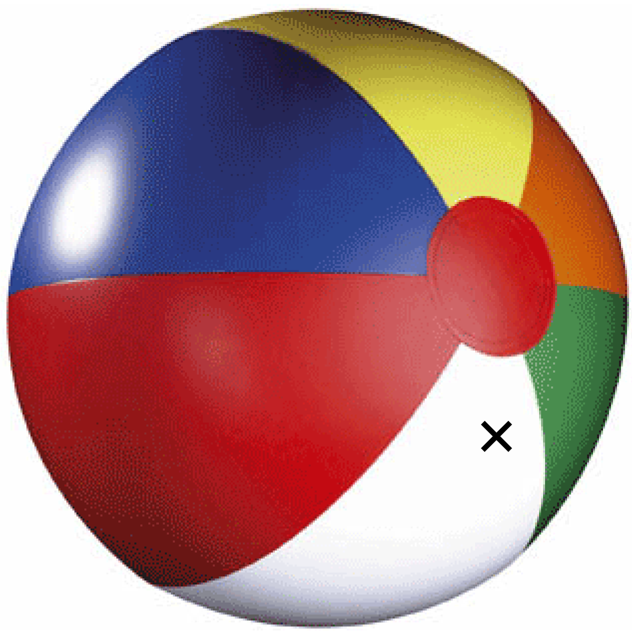
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

دوشنبه ۸۸/۵/۲۶

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۵. توپ غلطان

توپی کاملاً کروی روی زمینی کاملاً مسطح قرار دارد و نقطه‌ای روی آن علامت زده شده است.



می‌خواهیم با غلطاندن توپ روی یک چندضلعی بسته در صفحه این نقطه را به بالا منتقل کنیم به‌طوری که در نهایت توپ به جای اولش برگشته باشد. توجه کنید که در غلطاندن توپ مجاز نیستیم که درجا توپ را بچرخانیم. ثابت کنید این کار ممکن است.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

دوشنبه ۸۸/۵/۲۶

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۶. مبنای یک به علاوه‌ی آی!

فرض کنید z عددی مختلط و مخالف صفر باشد که قسمت حقیقی و قسمت موهومی آن صحیح است. ثابت کنید این عدد نمایشی یک‌تا به شکل زیر دارد

$$z = a_{۰} + a_{۱}(۱+i) + a_{۲}(۱+i)^{۲} + \ldots + a_n(۱+i)^n$$

که $n \geq ۰$ و در آن a_jها صفر یا یک هستند و $a_n = ۱$.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

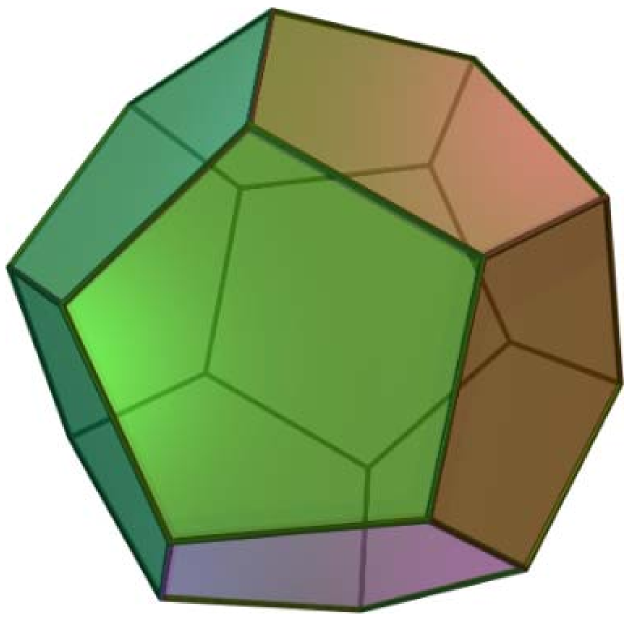
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

دوشنبه ۸۸/۵/۲۶

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

۷. چندوجهی محیطی

چندوجهی P بر یک کره محیط است. وجوه P را به گونه‌ای با سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم که هیچ دو وجه سیاهی ضلع مشترک ندارند.



ثابت کنید مساحت وجوه سیاه بیش‌تر از مساحت وجوه سفید نیست.

موفق باشید.

به نام او

آزمون خلاقیت

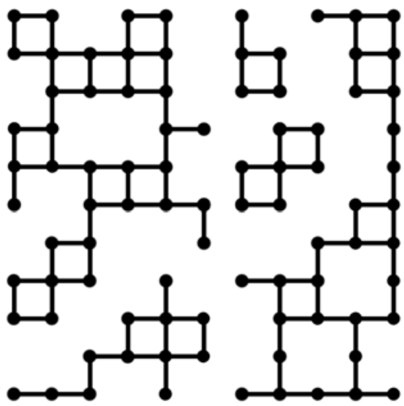
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

دوشنبه ۸۸/۵/۲۶

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۸. خوشه‌ی نامتناهی

فرض کنید برخی از رئوس شبکه‌ی دو بعدی مسطح (یعنی $\mathbb{Z}^2$) را حذف کرده‌ایم. به این نقاط به شکل یک گراف نگاه کنید؛ دو رأس به هم وصل هستند اگر در یک درایه برابر باشند و در یک درایه یک واحد اختلاف داشته باشند. به هر مؤلفه‌ی هم‌بندی این گراف یک خوشه گفته می‌شود.



فرض کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تعداد رئوس حذف شده‌ی داخل مربع افقی به مرکز مبدأ و به ضلع $2n+1$ کم‌تر از $n/2$ باشد. ثابت کنید رئوس حذف‌نشده شامل دقیقاً یک خوشه‌ی نامتناهی است.

موفق باشید.