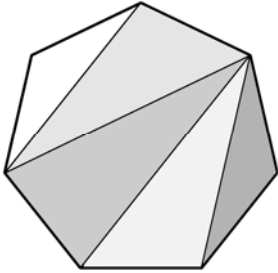


به نام او
مرحله‌ی دوم بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۵ اردیبهشت ۱۳۸۷

روز اول

زمان: چهار ساعت و نیم



(۱) به چند طریق می‌توان $n - 3$ قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً هم‌دیگر را داخل n ضلعی قطع نکنند، ثانیاً هر کدام از مثلث‌های به وجود آمده دست‌کم یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟

(۲) فرض کنید I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC ، متناظر با رأس A باشد و این دایره، به ترتیب، در نقاط B' و C' به امتداد AB و AC مماس باشد. $I_a B$ و $I_a C$ ، به ترتیب، $B'C'$ را در P و Q قطع می‌کنند و M نقطه‌ی برخورد CP و BQ است. ثابت کنید طول عمود وارد از M بر ضلع BC برابر اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است.

(۳) a, b, c و d اعدادی حقیقی هستند و دست‌کم یکی از c و d صفر نیست. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر x ، $f(x) \neq x$. نشان دهید اگر به ازای یک a ،

$$f^{1387}(a) = a, \text{ آنگاه برای هر } x \text{ در دامنه‌ی } f^{1387}, f^{1387}(x) = x, \text{ یعنی } f^n \text{ (تابع } f) \text{}$$

راهنمایی: نشان دهید برای هر تابع به شکل $g(x) = \frac{sx + t}{ux + v}$ ، اگر معادله‌ی $g(x) = x$ بیش از دو جواب داشته باشد آنگاه برای هر x ، $g(x) = x$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او
مرحله‌ی دوم بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز دوم

چهارشنبه، ۶ اردیبهشت ۱۳۸۷

(۴) نشان دهید تنها عدد طبیعی a ، که برای هر n طبیعی $(a^n + 1)$ مکعب کامل باشد، یک است.



(۵) می‌خواهیم برای تلفن‌های یک شهر شماره انتخاب کنیم. شماره‌ها ده رقمی‌اند و از رقم صفر نباید در آن‌ها استفاده شود. هدف این است که از برخی از شماره‌ها استفاده نکنیم تا هر دو شماره‌ی موجود یا در بیش از یک رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم بیش از یک واحد اختلاف داشته باشند. بیش‌ترین تعداد شماره که می‌تواند استفاده شود چند تاست؟ انتخاب این بیش‌ترین تعداد شماره، به چند شکل ممکن است؟

(۶) فرض کنید در مثلث ABC ، پای ارتفاع وارد بر BC باشد. از H بر AB و AC عمود می‌کنیم تا، به ترتیب، نقاط T و T' به دست آیند. نشان دهید اگر O مرکز دایره‌ی محیطی ABC باشد و $AC = 2OT$ ، آنگاه $AB = 2OT'$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.