بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۸۷

سؤال شماره ۱. دست‌گیری قیصر!

الف. در این حالت با دو مأمور می‌توان قیصر را دست‌گیر کرد. دو نقطه از جدول را «هم‌طول» می‌نامیم اگر دقیقاً یکی زیر دیگری باشد (مؤلفه‌ی اول آن‌ها با هم برابر باشند). برای دست‌گیری قیصر یکی از مأمورین به سطر اول از پایین می‌رود، سپس آن قدر در راستای افقی به سمت قیصر حرکت می‌کند تا با او هم طول شود. سپس همواره در سطر اول طوری حرکت می‌کند که با او هم‌طول بماند. مأمور دوم به سطر دوم می‌رود و عمل مشابهی می‌دهد (ابتدا با قیصر هم‌طول می‌شود و سپس حرکت‌های افقی او را تقلید می‌کند). به این ترتیب دیگر قیصر نمی‌تواند از سطر دوم پایین‌تر برود. حال اگر قیصر بین سطر اول و دوم باشد به وضوح با حرکت مأمور دوم به سمت پایین در نهایت دست‌گیر می‌شود. اگر این طور نباشد، مأمور اول به سطر سوم می‌رود و همان کار را تکرار می‌کند. در این حالت قیصر نمی‌تواند از سطر سوم پایین‌تر برود و اگر بین سطر دوم و سوم باشد دست‌گیر خواهد شد. حال به همین ترتیب مأموران یک سطر، یک سطر بالا می‌روند تا در نهایت قیصر را در بین دو تا از سطرها زندانی کرده و او را دست‌گیر کنند.
ولی با یک مأمور نمی‌توان قیصر را دست‌گیر کرد. برای مثال قیصر می‌تواند صبر کند تا مأمور به فاصله‌ی $\frac{۱}{۲}$ واحد از او برسد. در این لحظه چون در شهر بن‌بست وجود ندارد، قیصر در یکی از جهت‌ها از مأمور دور می‌شود و همواره این فاصله‌ی $\frac{۱}{۲}$ را حفظ می‌کند (سرعت قیصر با مأمور برابر است). اگر زمانی فاصله از $\frac{۱}{۲}$ بیش‌تر شد، قیصر می‌ایستد و حرکت نمی‌کند تا مأمور دوباره به او نزدیک شود.

ب. در قسمت نشان می‌دهیم که با حداقل $n+۱$ مأمور می‌توان قیصر را دست‌گیر کرد ولی $n-۱$ مأمور برای دست‌گیری او کافی نیست. پس حداقل تعداد مأمورهای لازم یکی از دو عدد n یا $n+۱$ است.
در این حالت با $n+۱$ مأمور می‌توان قیصر را دست‌گیر کرد. به این شکل که nتا از مأموران به سطر اول رفته در تقاطع‌های این سطر قرار می‌گیرند. مأمور $n+۱$ام این سطر را اول تا آخر طی می‌کند. به این ترتیب اگر قیصر در سطر اول باشد، حتماً دست‌گیر می‌شود. سپس این n مأمور همگی با هم یک واحد به سمت بالا حرکت می‌کنند و مأمور $n+۱$ام همان کار را این بار در مورد سطر دوم انجام می‌دهد. به همین ترتیب مأموران به تدریج در سطرها بالا می‌روند و بالاخره قیصر را دست‌گیر خواهند کرد.
ولی با $n-۱$ مأمور لزوماً نمی‌توان او را دست‌گیر کرد. برای نشان دادن این یک سطر یا ستون را (برای قیصر) «خطرناک» می‌نامیم، اگر مأموری وجود داشته باشد که بتواند حداکثر در عرض $\frac{۱}{۲}$ واحد زمانی خود را به آن‌جا برساند و «امن» می‌نامیم، اگر خطرناک نباشد. یک تقاطع را هم امن می‌نامیم، اگر سطر و ستون شامل آن هر دو امن باشند. دقت کنید که با توجه به تعداد مأمورها همیشه سطر و ستونی امن و در نتیجه تقاطعی امن وجود دارد. اثبات می‌کنیم قیصر می‌تواند همیشه (به جز زمان‌های بسیار کوتاهی) در تقاطع‌های امن باشد. فرض کنید قیصر ابتدا در تقاطعی امن مثل A باشد. در هر لحظه اگر A خطرناک بشود، تقاطع امن دیگری مثل S در شهر وجود دارد. به توجه به این که سطر و ستون A

و S خالی هستند، قیصر بلافاصله با سرعت نامحدودش و بدون برخورد با مأمورین و از طریق سطر و ستون‌های خالی می‌تواند خود را به S برساند. قیصر آن قدر در S می‌ماند که آن‌جا خطرناک شود و باز روش بالا را تکرار می‌کند. به این ترتیب قیصر همیشه (به جز زمان‌های بسیار کوتاهی) در تقاطع‌های امن به سر می‌برد و بنابراین نمی‌توان او را دست‌گیر کرد.

توضیح.می‌توان یک حالت دیگر متصور شد که سرعت قیصر نامحدود است ولی تلفن هم‌راه او روشن است. در این صورت مشابه قسمت (ب) ثابت می‌شود که $n - ۱$ مأمور کافی نیست ولی با حذف مأمور $n + ۱$ام از الگوریتم ارائه‌شده در قسمت (ب) و کمی دقت دیده می‌شود که n مأمور کافی هستند.

سؤال شماره ۲. درگیری مثلثانه!

یکی از نقطه‌ها مانند A را به صورت پیوسته حرکت می‌دهیم، طوری که در هر لحظه هیچ سه نقطه‌ای هم‌خط نباشند. اگر B، C و D سه نقطه‌ی دیگر باشند، می‌گوییم در طول حرکت، یال AD از BC رد می‌شود اگر زمانی وجود داشته باشد که این دو یال متقاطع باشند و قبل و بعد از آن A در دو طرف مختلف صفحه‌ی BCD قرار گرفته باشد.

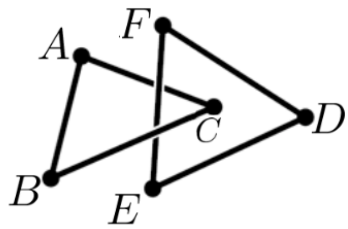
لم. اگر یکی از نقطه‌ها را (به صورت پیوسته) حرکت دهیم، طوری که فقط یک بار یالی از یال دیگر رد شود، آن‌گاه تعداد جفت‌های در هم‌گیرکرده (درگیر) از مثلث‌ها به تعداد زوجی تغییر می‌کند.

اثبات. بدون کم‌شدن از کلیت مسئله فرض کنید یال AB از CD رد شود. دو مثلث مجزا را در نظر بگیرید. اگر هیچ یک از آن‌ها شامل یال AB (به طور مشابه CD) نباشد، وضعیت درگیربودن آن‌ها نسبت به هم تغییر نمی‌کند. پس فرض کنید یکی از این دو مثلث شامل AB و دیگری شامل CD باشد. اگر F و E دو نقطه‌ی دیگر باشند، با کمی دقت دیده می‌شود وضعیت دو جفت $\{ABE, CDF\}$ و $\{ABF, CDE\}$ نسبت به هم تغییر می‌کند و حکم ثابت می‌گردد.

□

حال کافی است یک وضعیت خاص از نقطه‌ها را ارائه دهیم که تعداد جفت‌های درگیر فرد باشد. در این صورت با حرکت پیوسته‌ی نقطه‌های می‌توان این وضعیت را به هر وضعیت دیگری تبدیل کرد و لذا طبق آن‌چه گفته شد، این تعداد برای هر وضعیت دیگری نیز فرد و در نتیجه ناصفر است و حکم ثابت می‌شود.

همان شکل صورت مسئله را در نظر بگیرید. یعنی مثلث ABD و نقطه‌ی C هم‌صفحه با این مثلث و درون آن، و دو نقطه‌ی E و F در دو طرف صفحه‌ی گذرا از A, B, C, D که EF بر آن صفحه عمود باشد و پای عمود آن درون مثلث ABC باشد. در این حالت می‌توان دید که تنها جفت درهم‌تنیده همان دو مثلث رسم‌شده یعنی ABC و DEF هستند، و ۱ عددی فرد است!



سؤال شماره ۳. چندجمله‌ای‌ها

الف. فرض کنید $h(x) = (x-1)(x^2-1)(x^4-1)\cdots(x^{2^n}-1)$. در این صورت به راحتی می‌توان دید ضرایب $h(x)$ همگی عضو $\{0,1,-1\}$ هستند. از طرف دیگر می‌توان نوشت $h(x) = f(x)g(x)$ که

$$g(x) = (x-1)^n, \quad f(x) = (x+1)(x^2+x+1)\cdots(x^{2^n-1}+x^{2^n-2}+\cdots+1)$$

حال دقت کنید ضرب x در $f(x)$ دقیقاً $n-1$ و ضریب x^{n-2} در $g(x)$ دقیقاً $\frac{n(n-1)}{2}$ است که می‌توانند به دل‌خواه بزرگ باشند.

ب. جواب خیر است.

راه‌حل اول. فرض کنید $\alpha > 2$ ریشه‌ی بزرگ x^2-3x+1 باشد و $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ بر x^2-3x+1 بخش‌پذیر باشد که a_iها همه در $\{0,1,-1\}$ هستند. می‌توان فرض کرد که $a_n = 1$. در این صورت چون $f(\alpha) = 0$، پس:

$$\alpha^n = \Big|\sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i\Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i\alpha|^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha|^i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i = \frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} < \alpha^n - 1$$

که غیرممکن است.

راه‌حل دوم فرض کنید $g(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0$ چندجمله‌ای با کم‌ترین درجه‌ی ممکن باشد که ضرایب $f(x) = g(x)(x^2-3x+1)$، همگی $\{0,1,-1\}$ باشند. در این صورت می‌توان فرض کرد $b_0 = 1$. با در نظر گرفتن ضریب x در $f(x)$، داریم $b_1 - 3b_0 \in \{-1,0,1\}$. پس $b_1 \geq 2$. ادعا می‌کنیم که دنباله‌ی b_iها اکیداً صعودی هستند و لذا $b_n \geq 2$. در نتیجه ضریب x^{m+2} در $f(x)$ حداقل دو است که تناقض است. اثبات ادعا با استقرا و توجه به رابطه‌ی $b_{k+1} - 3b_k + b_{k-1} \geq -1$ روشن است، زیرا:

$$0 < b_{k-1} + 1 \leq b_k \Rightarrow b_{k+1} \geq 3b_k - b_{k-1} - 1 \geq 2b_k > b_k > 0$$

(پایه‌ی استقرا برای حالت $k = 1$ بود که در بالا ثابت شد.)

سؤال شماره ۴. شکل‌های جبری

الف. جواب خیر است. زیرا فرض کنید که $P(x,y)$ یک چندجمله‌ای باشد که روی نقاط مربع صفر شود. اگر $y=ax+b$ معادله‌ی یکی از اضلاع مربع باشد، آن‌گاه $P(x,ax+b)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x است که به ازای بی‌نهایت مقدار x برابر صفر می‌شود. در نتیجه $P(x,ax+b)$ باید متحد با صفر باشد. این یعنی کل نقطه‌های خط $y=ax+b$ باید در صفرهای P باشند، پس صفرهای این چندجمله‌ای نمی‌تواند تنها اضلاع مربع باشد.

ب. در این قسمت هم جواب خیر است. زیرا فرض کنید $P(x,y)$ یک چندجمله‌ای باشد که نقطه‌های نیم‌دایره، صفرهای آن باشند. می‌توان فرض کرد که مرکز نیم‌دایره روی مبدأ است و شعاع آن برابر r است. می‌توان همه‌ی نقطه‌های روی این دایره غیر از نقطه‌ی $(r,\circ)$ را به صورت $\left(r\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲},r\frac{۲t}{۱+t^۲}\right)$برای اعداد حقیقی t نمایش داد. پس عبارت $P\left(r\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲},r\frac{۲t}{۱+t^۲}\right)$ عبارتی بر حسب t است که برای بی‌نهایت مقدار t(مقادیر متناظر با نقطه‌های نیم‌دایره) مساوی صفر شده است. این عبارت به شکل $\frac{A(t)}{B(t)}$ قابل نمایش است که $A(t)$ و $B(t)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب t هستند. بنابراین $A(t)$ باید برای بی‌نهایت مقدار t برابر صفر شود. پس $A(t)$ متحد با صفر است. این یعنی برای هر t، $P\left(r\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲},r\frac{۲t}{۱+t^۲}\right)=\circ$. در نتیجه تمام نقطه‌های دایره باید در صفرهای $P(x,y)$ باشند که تناقض است.

سؤال شماره ۵. بازی «جاده‌ی امن»

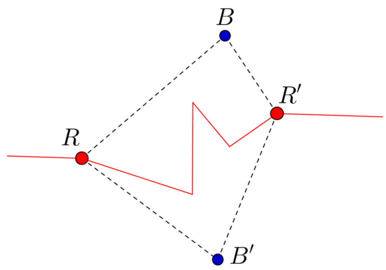
یکی از نقطه‌های قرار داده شده مانند P را در نظر بگیرید. منظور از ناحیه‌ی مربوط به P، مجموعه‌ی نقطه‌هایی در صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها تا P از فاصله‌ی آن‌ها تا نقطه‌های دیگر بیش‌تر نیست. به سادگی دیده می‌شود که ناحیه‌های مربوط به دو نقطه‌ی P و P' حداکثر روی عمودمنصف PP' اشتراک دارند. به نقطه‌ای از صفحه که در ناحیه‌ی مربوط به یک نقطه‌ی قرمز باشد و در ناحیه‌ی مربوط به هیچ نقطه‌ی آبی نباشد، نقطه‌ی «قرمزگون» می‌گوییم. در این صورت یک مسیر قرمز، مسیری از R به R' است که همه‌ی نقطه‌های مسیر قرمزگون باشند. نقطه‌ی «آبی‌گون» هم به صورت مشابه تعریف می‌شود.

مجموعه‌ی تمام نقطه‌هایی را در نظر بگیرید که متعلق به حداقل دو ناحیه باشند. طبق آن‌چه که گفتیم، این مجموعه از اجتماعی تعدادی پاره‌خط و نیم‌خط تشکیل شده است که به شکلی که در ادامه می‌آید تشکیل یک گراف می‌دهند. رئوس گراف را نقطه‌هایی بگیرید که عضو حداقل سه ناحیه هستند. نقطه‌ای به نام بی‌نهایت را هم در نظر بگیرید که سر دوم همه‌ی نیم‌خط‌ها باشد. یال‌های گراف را پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌های بین این نقطه‌ها بگیرید. ادعا می‌کنیم که درجه‌ی نقطه‌ی بی‌نهایت ۴ و درجه‌ی بقیه‌ی نقطه‌ها ۳ است.

اگر درجه‌ی نقطه‌ای غیر از بی‌نهایت مانند P برابر ۳ نباشد، آن‌گاه این نقطه متعلق به حداقل چهار ناحیه است. حال نقطه‌های متناظر با این ناحیه‌ها هم‌دایره هستند چون همه از P فاصله‌ی یک‌سانی دارند. پس این نقطه‌ها فقط می‌توانند رئوس چهارضلعی $RBR'B'$ باشد و P هم مرکز دایره‌ی محیطی آن باشد. اما چون نقطه‌ی دیگری هم در چهارضلعی قرار داده شده است، فاصله‌ی P تا آن نقطه کم‌تر از فاصله‌ی P تا رأس‌های چهارضلعی می‌شود و این تناقض است.

برای بررسی نقطه‌ی بی‌نهایت تمام دوایری که از دست‌کم سه تا از نقطه‌های قرار داده شده می‌گذرند را در نظر بگیرید. با توجه به این که بقیه‌ی نقاط قرار داده شده داخل چهارضلعی هستند، می‌توان دید هر نقطه‌ای که خارج این دوایر است، فقط می‌تواند عضو نواحی مربوط به R، B، R' یا B' باشد. چرا اگر نقطه‌ای مثل X در ناحیه‌ی مربوط به P که نقطه‌ای غیر از چهار رأس چهارضلعی است واقع باشد، با وصل کردن P به چهار رأس به کمک چهار نیم‌خط، X درون یکی از چهار ناحیه‌ی ایجاد شده مثلاً ناحیه‌ی بین نیم‌خط PR و PB قرار می‌گیرد. در این صورت چون $XP < XB$، $\angle XBP < angleXPB$ و مشابهاً $\angle XCP < \angle XPC$. با جمع کردن این دو رابطه $\angle XBP + \angle XCP < \angle BPC < ۱۸۰^\circ$ و این یعنی نقطه‌ی X درون دایره‌ی محیطی PBC قرار داشته است. پس تنها نیم‌خط‌های گراف، قسمتی از عمودمنصف‌های $B'R$، $R'B'$، BR' و RB هستند. پس درجه‌ی نقطه‌ی بی‌نهایت برابر ۴ است.

الف. ابتدا ثابت می‌کنیم که یک مسیر آبی و یک مسیر قرمز نمی‌توانند هم‌زمان موجود باشند. فرض کنید این‌چنین باشد. ادعا می‌کنیم که دو مسیر یک‌دیگر را قطع می‌کنند. در این صورت نقطه‌ی تقاطع آن‌ها هم قرمزگون و هم آبی‌گون است که امکان ندارد.



برای اثبات ادعا، از R (و به طور مشابه از R') یک نیم‌خط بر BB' عمود کنید که BB' را قطع نکند. نقاط این دو نیم‌خط قرمزگون هستند. پس مسیر آبی یادشده، این دو نیم‌خط را قطع نخواهد کرد. بنابراین اگر مسیر قرمز بین R و R' را به این دو نیم‌خط اضافه کنیم مسیری قرمز به دست می‌آید که صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کند که نقطه‌های B و B' در دو طرف آن هستند. پس مسیر آبی ناچار است این منحنی را قطع کند و به تناقض می‌رسیم.

حال ثابت می‌کنیم مسیر آبی یا قرمز وجود دارد. نقطه‌ای در اشتراک نواحی مربوط به R و B در نظر بگیرید و آن را روی عمودمنصف RB حرکت دهید تا به رأس یک گراف برسید. یک سمت این نیم‌خط، ناحیه‌ی مربوط به R است که قرمزگون است و سمت دیگر آن ناحیه‌ی مربوط به B است که آبی‌گون است. با توجه به این که این رأس درجه‌ی سه است، عضو دقیقاً سه ناحیه است. حال بر حسب این که ناحیه‌ی سوم، قرمزگون و یا آبی‌گون باشد، از روی یالی حرکت کنید که باز هم دو سمت مسیر از دو رنگ متفاوت باشند. حال اگر یال جدید یک پاره‌خط بود، این کار را ادامه دهید. با ادامه‌ی این کار مسیر به طور یک‌تا مشخص می‌شود طوری که یک طرف مسیر آبی‌گون و طرف دیگر مسیر قرمزگون است. ادعا می‌کنیم این مسیر خودش را قطع نمی‌کند. در غیر این صورت، اولین جایی که متحرک به یک نقطه‌ی تکراری می‌رسد را در نظر بگیرید (نقطه‌ی P). این نقطه حتماً یک رأس گراف است و درجه‌ی ۳ دارد و مسیر دو بار به نقطه‌ی P از دو یال مختلف وارد شده است. پس اگر به رنگ ناحیه‌ی بین این دو یال توجه کنیم، می‌بینیم که ممکن نیست یک طرف مسیر همواره آبی‌گون و طرف دیگر همواره قرمزگون باشد و این تناقض است.
در نتیجه این مسیر در انتها به یک نیم‌خط ختم می‌شود. این نیم‌خط نمی‌تواند قسمتی از عمودمنصف $R'B'$ باشد. زیرا در این صورت رنگ دو طرف این نیم‌خط با رنگ دو طرف آن در RB متفاوت خواهد بود. پس مسیر در انتها روی عمودمنصف BR' یا RB' قرار می‌گیرد. فرض کنید روی عمود منصف RB' قرار گیرد. در این صورت نقطه‌ی ابتدایی مسیر را با یک پاره‌خط به B و نقطه‌ای روی نیم‌خط انتهایی را با یک پاره‌خط به B' وصل کنید. حال یک مسیر از B به B' به دست می‌آید که یک طرف آن آبی‌گون است. پس می‌توان این مسیر را کمی تغییر داد تا تمام نقطه‌های آن آبی‌گون شود و یک مسیر آبی به دست می‌آید. در حالت دیگر به طور مشابه یک مسیر قرمز به وجود می‌آید و حکم ثابت می‌شود.

ب. نفر دوم می‌تواند به این صورت عمل کند که هر گاه نفر اول نقطه‌ای مثل P گذاشت، او نقطه‌ای دل‌خواه روی پاره‌خط PR قرار دهد. ادعا می‌کنیم با این روش می‌تواند برنده شود. برای این کار طبق قسمت (الف) کافی است ثابت کنیم مسیری قرمز ایجاد نمی‌شود. یک مسیر قرمز در نظر بگیرید. این مسیر ابتدایش R و انتهایش R' است. پس با شروع از R و حرکت روی این مسیر، از ناحیه‌ی مربوط به R خارج می‌شویم. اولین جایی را در نظر بگیرید که این اتفاق می‌افتد و متحرک به ناحیه‌ی نقطه‌ی دیگری مثل P (که قرمز است) وارد می‌شود. در این لحظه، متحرک روی عمودمنصف RP است. اما اگر $P \neq R'$، یک نقطه‌ی آبی روی پاره‌خط RP وجود دارد. حال فاصله‌ی هر نقطه از عمودمنصف RP تا این نقطه، کم‌تر از فاصله‌ی آن تا R است. پس متحرک نمی‌تواند در ناحیه‌ی R باشد.
در حالتی که $P = R'$، متحرک روی عمودمنصف RR' است. اگر در سمتی از خط RR' باشد که B قرار دارد، فاصله‌ی متحرک تا B کم‌تر از فاصله‌ی آن تا R است و اگر در سمت دیگر باشد، فاصله‌اش تا B' کم‌تر است. اگر هم وسط RR' باشد، با توجه به این که نقطه‌ی دیگری هم قرار داده شده است، فاصله‌ی متحرک تا نقطه‌ی دیگر کم‌تر از فاصله‌ی آن تا R است. در هر حال متحرک در این لحظه در ناحیه‌ی مربوط به R نیست که تناقض است.

ج. دو تعمیم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

- **تعمیم اول.** ادعا می‌کنیم که اگر $\angle R + \angle R' \leq ۱۸۰^\circ$، نفر دوم برنده می‌شود. به روش قبلی عمل می‌کنیم. مشابه قسمت قبل، اگر یک مسیر قرمز از ناحیه‌ی R خارج شود و به ناحیه‌ای غیر از R' وارد گردد به تناقض می‌رسیم. پس کافی است ثابت کنیم نواحی R و R' اشتراکی ندارند. فرض کنید B بالای RR' قرار دارد. دایره‌ی محیطی RBR' را C و مرکز آن را O بنامید. حال B' داخل C و زیر RR' است. نقطه‌ای مثل T در اشتراک ناحیه‌های RR' در نظر بگیرید. مشابه قبل $T \neq O$. اگر T (که روی عمود منصف RR' است) بالای O باشد، فاصله‌اش تا B کم‌تر از R است و اگر پایین O باشد، فاصله‌اش تا B' کم‌تر از R است و مشابه قبل به تناقض می‌رسیم.

- **تعمیم دوم.** اگر $\angle R + \angle R' \leq ۲۷۰^\circ$ باشد، هم نفر دوم می‌تواند برنده شود. در این حالت ادعا می‌کنیم بعد از گذاشتن $R_۱$ توسط نفر اول، نفر دوم می‌تواند $B_۱$ را به گونه‌ای قرار دهد که نواحی R و R' با هم اشتراک نداشته باشند و هم‌چنین نواحی R و $R_۱$ و یا R' و $R_۱$ هم اشتراک نداشته باشند. در این صورت برای مثال اگر نواحی R و $R_۱$ اشتراک نداشتند، از مرحله‌ی دوم به بعد مشابه روش قبل عمل می‌کنیم. حال ناحیه‌ی R با ناحیه‌ی هیچ یک از نقطه‌های قرمز رنگ دیگر اشتراک ندارد و نفر دوم برنده شده است. (توجه کنید که اگر در مرحله‌ای ناحیه‌ی مربوط به دو نقطه مثل P و Q با هم اشتراک نداشته باشند، از آن به بعد هم با هم اشتراک نخواهند داشت).

در طول اثبات از این نکته استفاده می‌کنیم که ناحیه‌ی مربوط به دو نقطه‌ی P و Q با هم اشتراک دارند اگر و تنها اگر دایره‌ای از آن دو نقطه بگذرد که درون آن هیچ نقطه‌ی دیگری نباشد (مرکز همین دایره یک نقطه‌ی اشتراک دو ناحیه است).

فرض کنید $R_۱$ در مثلث $RB'R'$ باشد. هم‌چنین C دایره‌ی محیطی RBR' و به مرکز O باشد. فرض کنید خط RR' افقی و B و زیر RR' باشد. برای این که نواحی R و R' اشتراک نداشته باشند، طبق نکته‌ی بالا کافی است $B_۱$ داخل C و بالای RR' باشد. حال اگر $\angle ORR_۱ < ۹۰^\circ$ قسمتی از پاره‌خط $RR_۱$ درون C قرار دارد و می‌توان $B_۱$ را با این شرط روی $RR_۱$ انتخاب کرد و نتیجه حاصل می‌شود. پس فرض کنید $\angle ORR_۱ \geq ۹۰^\circ$ و $\angle OR'R_۱ \geq ۹۰^\circ$.

برای این که ناحیه‌ی R با $R_۱$ اشتراک نداشته باشد، کافی است $B_۱$ زیر $RR_۱$ و داخل دایره‌ی محیطی $RR_۱B'$ باشد. اگر این دایره با C داخل چهارضلعی اشتراک داشته باشد، مطلوب ماست. پس فرض کنید این گونه نباشد. بنابراین اگر از B' دایره‌ی $C_۱$ را طوری رسم کنیم که در R بر C مماس باشد، $R_۱$ باید داخل آن باشد. به طور مشابه فرض کنید $R_۱$ داخل دایره‌ی $C_۲$ است که از B' می‌گذرد و در R' بر C مماس است. اما ادعا می‌کنیم چنین چیزی ممکن نیست. برای این کار کافی است ثابت کنیم $C_۱$ و $C_۲$ داخل چهارضلعی اشتراک ندارند.

اگر P مرکز اصلی سه دایره‌ی C، $C_۱$ و $C_۲$ باشد، آن‌گاه زاویه‌ی بین $C_۱$ و ضلع RB' در نقطه‌ی B' برابر است با:

$$\angle B'RP = \angle ORB' - ۹۰^\circ = \angle ORR' + \angle R'RB' - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ - \angle B + \angle R'RB - \angle ۹۰^\circ = \angle R'RB' - \angle B$$

و زاویه‌ی بین $C_۲$ و ضلع $R'B'$ در نقطه‌ی B' برابر است با $\angle B'R'P = \angle RR'B' - \angle B$. می‌خواهیم نشان دهیم جمع این دو از $\angle B'$ بیش‌تر نیست:

$$\angle R'RB' - \angle B + \angle RR'B' - \angle B \leq \angle B' \Leftrightarrow ۱۸۰^\circ - \angle B' - ۲\angle B \leq \angle B' \Leftrightarrow \angle B + \angle B' \geq ۹۰^\circ$$

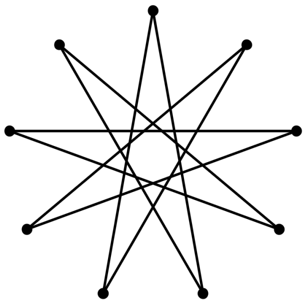
که معادلاً یعنی $\angle R + \angle R' \leq ۲۷۰^\circ$ و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

سؤال شماره ۶. تقسیم مریخ

ثابت می‌کنیم برای هر n نقطه روی کره می‌توان n ناحیه‌ی یک‌پارچه‌ی هم‌نهشت یافت که هر کدام شامل دقیقاً یک نقطه باشند.

ابتدا توجه کنید که تعداد کل دایره‌های عظیمه‌ای از کره که شامل حداقل دو تا از نقطه‌ها باشند متناهی است.
صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم که موازی هیچ کدام از این متناهی دایره‌ی عظیمه نباشد و آن را P می‌نامیم. حال دو صفحه‌ی موازی با P که مماس بر کره هستند را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را N و S می‌نامیم. نقطه‌ی تماس N با کره را «قطب شمال» و نقطه‌ی تماس S با کره را «قطب جنوب» می‌نامیم. $n - ۱$ صفحه بین N و S موازی P در نظر می‌گیریم که کره را قطع کنند و به همراه N و S کره را به شکلی به n ناحیه تقسیم کنند که درون هر ناحیه (و نه روی مرز آن) دقیقاً یکی از n نقطه باشد. این صفحه‌ها را به ترتیب از شمال به جنوب $P_۱$ تا $P_{n-۱}$ می‌نامیم و به ناحیه‌های بین صفحات قطاع می‌گوییم. هم‌چنین $P_۰$ را برابر N و P_n را برابر S می‌گیریم. در ادامه منظور از دوران، دوران حول خط واصل بین قطب شمال و جنوب است (جهت دوران را جهت مشخص و دل‌خواهی در نظر بگیرید).
از قطب شمال به قطب جنوب، یک نصف‌النهار (نصف دایره‌ی عظیمه) رسم می‌کنیم که از هیچ کدام از n نقطه عبور نکند.
فرض کنید این نصف‌النهار صفحه‌های $P_۰$ تا P_n را به ترتیب در نقطه‌های $A_۰$ تا A_n قطع کند. به این ترتیب نقطه‌های $A_{i-۱}$ و A_i روی مرز قطاع iام هستند($۱ \leq i \leq n$). نقطه‌ای که درون قطاع iام است را B_i می‌نامیم. یک خم درون قطاع iام می‌کشیم که $A_{i-۱}$ را به A_i وصل کند و این خاصیت را داشته باشد که دوران‌یافته‌ی این خم با زاویه‌ی $(i - ۱)\frac{۳۶۰}{n}$ درجه سمت چپ B_i و دوران‌یافته‌ی آن با زاویه‌ی $i\frac{۳۶۰}{n}$ درجه سمت راست B_i باشد (راست و چپ با جهتی که برای دوران مثبت در نظر گرفته‌ایم تغییین می‌شود). با کنار هم قرار دادن این خم‌ها برای همه‌ی iها یک خم از شمال به جنوب پیدا می‌کنیم که با دوران‌های این خم به اندازه‌ی زاویه‌های $i\frac{۳۶۰}{n}$ برای $۰ \leq i < n$، کره به n ناحیه‌ی هم‌نهشت یک‌پارچه تقسیم می‌شود که با توجه به نحوه‌ی ساخت خم‌ها در هر یک از ناحیه‌ها دقیقاً یکی از B_iها قرار می‌گیرد.

سؤال شماره ۷. گراف‌های «خود متقاطع»

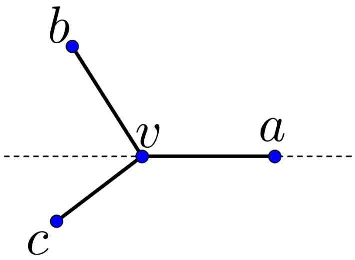


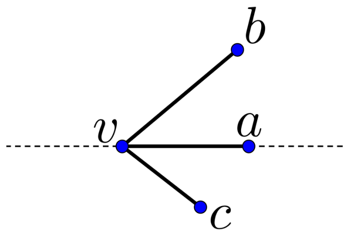
الف. جواب nهای فرد است. دور به طول n را به شکلی در صفحه رسم می‌کنیم که شرایط گراف خودمتقاطع را داشته باشد. به این صورت که در یک nضلعی منتظم هر رأس را به دو رأس روبه‌رویش وصل می‌کنیم (به شکل روبه‌رو توجه کنید).
حال فرض کنید n زوج باشد و دور به طول n خودمتقاطع باشد. رئوس آن را به ترتیب $P_۱$ تا P_n بنامید. چون همه‌ی یال‌ها با $P_۱P_۲$ اشتراک دارند، پس رئوس $P_۳$ تا P_n، یک در میان در طرفین خط $P_۱P_۲$ قرار می‌گیرند (توجه کنید که در هر گراف خودمتقاطع، امتداد یک یال تنها می‌توان شامل رئوس تنها باشد). پس $P_۳$ و P_n در دو طرف مختلف $P_۱P_۲$ قرار دارند و یال $P_۱P_n$ نمی‌تواند یال $P_۲P_۳$ را قطع کند.

ب. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.
لم. در یک گراف خودمتقاطع، هر رأس حداکثر دو هم‌سایه‌ی غیر برگ دارد.

اثبات. در غیر این صورت رأس v و هم‌سایه‌های a، b و c از آن موجود هستند که درجه‌ی هر یک از آن‌ها بیش‌تر از یک باشد. دو حالت داریم:

- هر یک از زاویه‌های $\angle avb$، $\angle bvc$ و $\angle cva$، حداکثر ۱۸۰° هستند. در این صورت b و c در دو طرف خط گذرنده از va قرار دارند و هیچ یال متصل به a نمی‌تواند هر دوی vb و vc را قطع کند.
- یکی از سه زاویه‌ی بالا، مثلاً $\angle bvc$، بیش‌تر از ۱۸۰° است. در این صورت باز هم b و c در دو طرف خط گذرنده از va قرار دارند و استدلال قسمت قبل صادق است.





$\square$

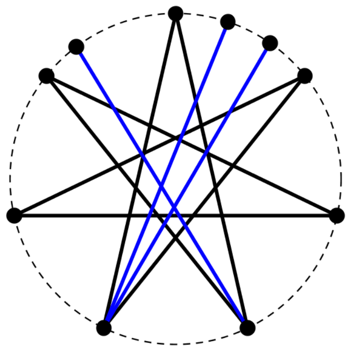
با استفاده از لم بالا، اگر برگ‌ها را حذف کنیم. گرافی به دست می‌آید که درجه‌ی هر رأس حداکثر دو است و در ضمن در این تغییر تعداد رأس‌ها و یال‌ها به یک میزان تغییر می‌کنند. در گراف جدید:

$$۲ \times (\text{تعداد یال‌ها}) = \sum_{\text{رأس } v_i} d(v_i) \leq \sum_{\text{رأس } v_i} ۲ = ۲ \times (\text{تعداد رأس‌ها})$$

پس اثبات حکم این قسمت هم به پایان می‌رسد.

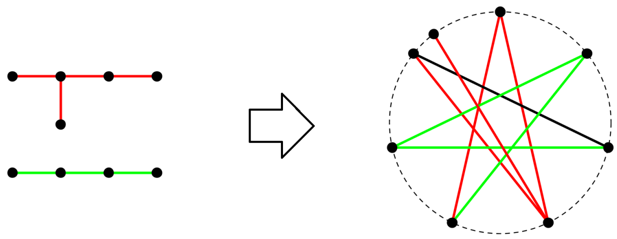
ج. طبق آن‌چه گفتیم با حذف برگ‌ها، تعدادی مسیر و تعدادی دور به وجود می‌آید که طبق قسمت (الف)، دورها باید همگی فرد باشند. ادعا می‌کنیم همه‌ی جواب‌ها از اضافه کردن احتمالاً تعدادی برگ و رأس تنها به گراف‌های زیر به دست می‌آیند:

- فقط یک دور فرد.
- اجتماع تعدادی مسیر مجزا (ممکن است تک‌رأسی باشند).



فرض کنید دور داشته باشیم. توجه کنید که بین رأس‌های این دور، یال دیگری نیست، زیر اگر یالی باشد یک دور زوج در گراف ایجاد می‌شود که طبق قسمت (الف) امکان ندارد. ادعا می‌کنیم هر یال دیگر حداقل یک رأس مشترک با این دور دارد. در غیر این صورت امتداد آن یال از هیچ رأسی از دور نمی‌گذرد. مشابه قسمت (الف) رئوس دور باید یکی در میان در دو طرف این خط قرار بگیرند که با توجه به فرد بودن دور امکان ندارد. برعکس ادعا می‌کنیم هر تعداد برگ و رأس تنها می‌تواند به یک دور فرد اضافه شود طوری که هم‌چنان خودمتقاطع بماند. برای این کار از روش قسمت الف برای رسم گراف خودمتقاطع برای یک دور با طول فرد استفاده می‌کنیم و برگ‌های هر رأس آن دور را روی کمان مقابل آن رأس (در دایره‌ی گذرنده از رئوس) قرار می‌دهیم. در شکل روبه‌رو یال‌های سیاه‌رنگ دور به طول فرد و یال‌های آبی‌رنگ برگ‌های متصل به دور هستند.

اگر گراف دور نداشته باشد، با حذف برگ‌های آن تعدادی مسیر به وجود می‌آید. ادعا می‌کنیم چنین گرافی همواره خودمتقاطع است. می‌توان دید می‌توان تعدادی رأس و یال به آن اضافه کرد که گراف به یک دور فرد به همراه تعدادی برگ و رأس تنها تبدیل شود. از طرف دیگر هر زیر گراف یک گراف خودمتقاطع، هم گرافی خودمتقاطع است. بنابراین با استفاده از قسمت قبل حکم به طور کامل ثابت شد. شکل سمت راست زیر نحوه‌ی رسم گراف خودمتقاطع برای گراف سمت چپ را نمایش می‌دهد.



سؤال شماره ۸. نسخه‌ی خطی

فرض کنید عدد موجود در صورت سؤال را $A = X^{13}$ بنامیم. با جمع کردن ارقام A می‌توان دید که این عدد و در نتیجه X بر ۳ بخش‌پذیر است. ضمناً چون $\phi(10) = 4$، پس $X \equiv X^{13} \equiv 3 \pmod{10}$.

اگر $X \le 100$، آن‌گاه X^{13} حداکثر ۲۷رقمی است ولی A ۳۰ رقم دارد. از سوی دیگر از $X \ge 200$، آن‌گاه $A = X^{13} \ge 2^{13} \times 10^{26} > 8 \times 10^{29}$ و لذا A باید دست‌کم ۳۰ رقمی باشد و رقم بزرگش حداقل ۸ باشد که این طور هم نیست.

پس داریم $100 < X < 200$ و $3|X$ و $X \equiv 3 \pmod{10}$. فقط سه عدد ۱۲۳، ۱۵۳ و ۱۸۳ این سه خاصیت را هم‌زمان دارند. ادعا می‌کنیم $X = 183$.

برای اثبات این موضوع دو راه وجود دارد:

راه اول. اگر $X < 160$، آن‌گاه:

$$A = X^{13} < 2^{4\times 13} \times 10^{13} = 8192^{4} \times 10^{13} < 10^{4\times 4} \times 10^{13} = 10^{29}$$

پس A باید حداکثر ۲۹ رقم داشته باشد که این‌گونه نیست. پس $X > 160$ و لذا $X = 183$.

راه دوم. فرض کنید رقم دهگان X، برابر a باشد. با در نظرگرفتن همه‌ی اعداد به پیمانه‌ی ۱۰۰ داریم:

$$A \equiv 63 \pmod{100} \Rightarrow (100 + 10a + 3)^{13} \equiv (10a + 3)^{13} \equiv 3^{13} + 13 \times 3^{12} \times 10a \equiv 63 \pmod{100}$$

دقت کنید که بقیه‌ی جمله‌های بسط دو جمله‌ای بر ۱۰۰ بخش‌پذیرند و در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ ظاهر نمی‌شوند. حال چون $3^{13} \equiv 23 \pmod{100}$ و $3^{12} \equiv 41 \pmod{100}$، داریم:

$$23 + 30 \times 41a \equiv 63 \Rightarrow 1230a \equiv 40 \Rightarrow 30a \equiv 40 \pmod{100}$$

پس $3a \equiv 4 \pmod{10}$ و از بین ۲، ۵ و ۸ تنها $a = 8$ در این رابطه صدق می‌کند. پس باید $X = 183$ باشد.