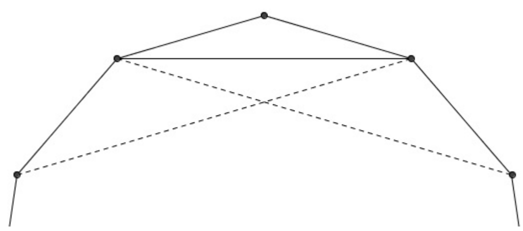
به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

۱. به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که هرگاه $n-3$ قطر نامتقاطع از یک nضلعی محدب رسم شود، آن را به $n-2$ مثلث تقسیم می‌کند. به این صورت که یکی از قطرهای رسم شده را در نظر بگیرید و nضلعی را از روی آن قطر به دو چندضلعی با تعداد ضلع‌های کم‌تر تقسیم کنید و به کمک استقرا حکم مورد نظر را نتیجه بگیرید. تنها حالت پایه‌ی $n=3$ باقی می‌ماند که از آن‌جا که هیچ قطری رسم نشده است، چندضلعی به یک مثلث تقسیم می‌شود.

حال در مسئله‌ی اصلی هنگامی که $n>3$ است هیچ‌کدام از مثلث‌ها نمی‌توانند با nضلعی سه ضلع مشترک داشته باشند و ضمناً هر مثلث حداقل یک و حداکثر دو ضلع مشترک با nضلعی دارد. با توجه به این که $n-2$ مثلث و n ضلع داریم، دقیقاً دو تا از مثلث‌ها دو ضلع مشترک با nضلعی دارند و بقیه تنها یک ضلع مشترک دارا هستند.

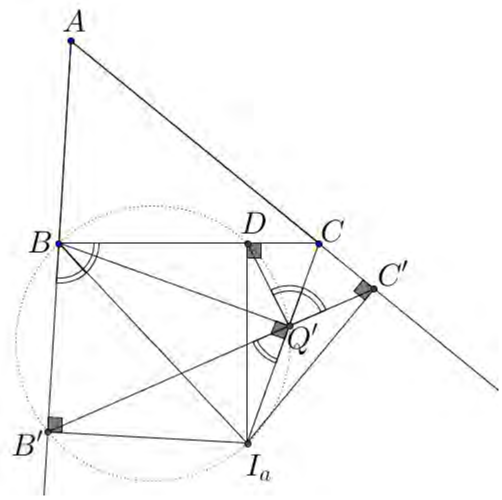
یکی از این دو مثلث را در نظر می‌گیریم. این مثلث می‌تواند یکی از n مثلثی باشد که دو ضلع مجاور از n ضلعی را شامل هستند. حال سومین ضلع از این مثلث را در نظر بگیرید که حتماً یک قطر از چندضلعی است. مثلث دیگری که این قطر یکی از ضلع‌های آن است، می‌تواند یکی از دو مثلثی باشد که این قطر و یکی از دو ضلع nضلعی که مجاور ضلع‌های مثلث قبلی هستند را شامل است.(به شکل زیر دقت کنید.)



حال به همین ترتیب قطری که مثلث جدید شامل است را در نظر بگیرید. برای مثلث سوم هم با همین استدلال دو حالت داریم. با ادامه‌ی همین فرآیند برای هر مثلث جدید (به جز اولین و آخرین مثلث که به ترتیب n حالت و ۱ حالت داشتند) دو حالت محتمل است. اما دقت کنید که هر آرایش از مثلث‌ها دو بار شمرده شده است، چرا که در هر آرایش دو مثلث وجود دارد که با چندضلعی دارای دو ضلع مشترک است و شروع از هر کدام می‌تواند به همین آرایش منجر شود. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با $\frac{n\times 2^{n-4}}{2}=n2^{n-5}$.

۲. D را نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC از مثلث بگیرید. در این صورت $CD=CC'$ چرا که دو مثلث $I_aC'C$ و I_aDC به دلیل داشتن یک زاویه‌ی ۹۰ درجه و دو ضلع برابر هم‌نهشت هستند. Q' را پای عمود وارد از B بر I_aC بگیرید. در این صورت مثلث‌های DCQ' و $C'CQ'$ هم‌نهشت هستند، زیرا $\angle Q'CD=\angle Q'CC'$ ، $Q'C=Q'C$ و $CD=CC'$. در نتیجه $\angle C'Q'C=\angle DQ'C$. از آن‌جا که زاویه‌های $\angle BQ'I_a$ و $\angle BDI_a$ قائمه هستند، چهارضلعی $BDQ'I_a$ محاطی است. در نتیجه $\angle DQ'C=\angle DBI_a$. ضمناً دقت کنید که BI_a نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle DBB'$ است

و لذا $\angle DBI_a = \angle B'BI_a$. قائمه بودن زاویه‌ی $\angle BB'I_a$ نتیجه می‌دهد که نقطه‌ی B' هم روی دایره‌ی محیطی چهارضلعی $BDQ'I_a$ قرار دارد، پس نتیجه می‌گیریم که $\angle B'BI_a = \angle B'Q'I_a$. با جمع‌بندی این رابطه‌ها می‌فهمیم که $\angle B'Q'I_a = \angle CQ'C'$ پس نقطه‌های B'، Q' و C' روی یک خط قرار دارند. در نتیجه نقطه‌ی Q' که محل تقاطع I_aC و $B'C'$ است همان نقطه‌ی Q است. پس در کل نشان دادیم که $BQ \perp I_aC$. مشابه همین استدلال نشان می‌دهد که $CP \perp I_aB$.



حال دقت کنید که CI نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی C است و در نتیجه بر CI_a که نیم‌ساز خارجی این زاویه است عمود می‌باشد. این نکته با توجه به این‌که $BQ \perp I_aC$ نشان می‌دهد که $BQ \parallel IC$ و مشابه همین نتیجه می‌شود که $CP \parallel BI$. پس چهارضلعی $BMCI$ یک متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه فاصله‌ی دو رأس M و I تا قطر BC مساوی است. اما فاصله‌ی I از BC برابر طول شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث است و بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۳. اگر $f^{۱۳۸۷}(a) = a$، آن‌گاه با اثر دادن تابع f روی دو طرف این تساوی می‌توان دید که

$$f^{۱۳۸۷}(f(a)) = f^{۱۳۸۸}(a) = f(f^{۱۳۸۷}(a)) = f(a)$$

و دقت کنید که $f(a) \neq a$، پس $f(a)$ جوابی متمایز از a برای معادله‌ی $f^{۱۳۸۷}(x) = x$ است. با اعمال دوباره‌ی تابع f بر دو طرف عبارت بالا می‌توان دید که

$$f^{۱۳۸۷}(f(f(a))) = f^{۱۳۸۹}(a) = f(f(f^{۱۳۸۷}(a))) = f(f(a))$$

پس $f(f(a))$ هم جواب دیگری برای این معادله است. اما دقت کنید که $f(f(a)) \neq f(a)$. حال ادعا می‌کنیم که $f(f(a))$ و a هم متمایز هستند. در غیر این صورت اگر $f^{۲}(a) = a$ باشد، داریم:

$$f^{۱۳۸۸}(a) = f^{۱۳۸۶}(f^{۲}(a)) = f^{۱۳۸۶}(a) = f^{۱۳۸۴}(f^{۲}(a)) = f^{۱۳۸۴}(a) = \cdots = f^{۴}(a) = f^{۲}(f^{۲}(a)) = f^{۲}(a)$$

اما $f(a) = f(f^{۱۳۸۷}(a)) = f^{۱۳۸۸}(a)$، پس باید $f^{۲}(a) = f(a)$ باشد که امکان ندارد. در نتیجه در کل سه جواب حقیقی متمایز برای معادله‌ی $f^{۱۳۸۷}(x) = x$ یافته‌ایم.

می‌توان به سادگی چک کرد که ترکیب دو تابع به فرم $\frac{ax+b}{cx+d}$ هم به همین فرم است(البته با a، b، c و

d متفاوت). این نتیجه می‌دهد که تابع $f^{۱۳۸۷}(x)$ تابعی به فرم $\frac{mx+n}{px+q}$ است که معادله‌ی $x = \frac{mx+n}{px+q}$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. جواب‌های این معادله به وضوح جواب‌های معادله‌ی $px^۲ + (q-m)x - n = ۰$ هم هستند که یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر دو است. از آن‌جا که یک چندجمله‌ای ناصفر از درجه‌ی حداکثر دو، حداکثر دو جواب حقیقی دارد؛ این چندجمله‌ای باید متحد با صفر باشد که این نتیجه می‌دهد که $p = ۰$، $q = m$ و $n = ۰$. پس داریم $f^{۱۳۸۷}(x) = \frac{mx+n}{px+q} = \frac{mx}{m} = x$، و این یعنی برای هر عدد حقیقی x، $f^{۱۳۸۷}(x) = x$.

۴. راه‌حل اول. $۴(a^۳ + ۱)$ و $۴(a^۹ + ۱)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تقسیم آن‌ها یعنی $\frac{۴(a^۹+۱)}{۴(a^۳+۱)} = a^۶ - a^۳ + ۱$ هم مکعب کامل است. اگر $a > ۱$ باشد، $a^۶ - a^۳ + ۱ < a^۶ = (a^۲)^۳$ و از طرف دیگر $a^۶ - a^۳ + ۱ > a^۶ - ۳a^۴ + ۳a^۲ - ۱ = (a^۲ - ۱)^۳$، زیرا:

$$\begin{aligned}&۳a^۴ - a^۳ - ۳a^۲ + ۲\\&= (a^۴ - a^۳) + (۲a^۴ - ۳a^۲) + ۲\\&= a^۳(a-۱) + a^۲(۲a - ۳) + ۲ > ۰\end{aligned}$$

اما $(a^۲ - ۱)^۳$ و $(a^۲)^۳$ دو مکعب کامل متوالی هستند و عددی که بین آن‌ها قرار دارد نمی‌تواند مکعب کامل باشد. پس a مجبور است برابر یک باشد که در این صورت هم همه‌ی جمله‌ها برابر ۸ و در نتیجه مکعب کامل هستند.

راه‌حل دوم. اگر $a > ۱$ باشد، $۴(a^n + ۱)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب n است. حال دقت کنید که $۴(a^{n+۳} + ۱)$ و همین‌طور $a^۳ \times ۴(a^n + ۱) = ۴(a^{n+۳} + a^۳)$ مکعب کامل هستند. اما تفاضل این دو مقدار برابر $۴a^۳ - ۴$ است که مستقل از n است. این یعنی تفاضل دو مکعب کامل که هر دو با افزایش n زیاد می‌شوند مقداری ثابت است که امکان ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که a باید برابر یک باشد.

راه‌حل سوم. از لم زیر که حالت خاصی از گزاره‌ای است که به لم دو خط معروف است استفاده می‌کنیم:

لم. فرض کنید x عددی طبیعی و p عددی اول و فرد باشد که $p|x+۱$. اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، تعداد عوامل p در $x^n + ۱$ برابر تعداد عوامل p در $x + ۱$ به اضافه‌ی تعداد عوامل p در n است.

اثبات. تعداد عوامل p در عدد طبیعی m را با $||m||_p$ نمایش می‌دهیم و حکم را به استقرا روی $||n||_p$ ثابت می‌کنیم.

اگر n بر p بخش‌پذیر نباشد، با توجه به این که $(x^n + ۱) = (x + ۱)(x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱)$ باید نشان دهیم که $p \nmid x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱$. برای این منظور دقت کنید که:

$$x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱ \equiv (-۱)^{n-۱} - (-۱)^{n-۲} + \cdots - (-۱) + ۱ \equiv n \not\equiv ۰ \pmod p$$

اگر n تنها یک عامل p داشته باشد، باید نشان دهیم که تعداد عوامل p در $x^n + ۱$ یکی بیش‌تر از عوامل p در $x + ۱$ است. در این حالت می‌توان نوشت $n = pm$ که m بر p بخش‌پذیر نیست. حال طبق استدلال قسمت قبل

$$||x^{mp} + ۱||_p = ||(x^p)^m + ۱||_p = ||x^p + ۱||_p$$

پس کافی است حکم این قسمت را برای حالت $n=p$ ثابت کنیم. از آن‌جا که $x+۱$ بر p بخش‌پذیر است می‌توان عدد صحیح t یافت که $x=tp-۱$.

$$x^p+۱=(tp-۱)^p+۱=\sum_{i=۱}^{p}\binom{p}{i}(tp)^i(-۱)^{p-i}=tp\left(\sum_{i=۲}^{p}\binom{p}{i}(tp)^{i-۱}(-۱)^{p-i}+p\right)=(x+۱)\left(\cdots\right)$$

از آن‌جا که تمام $\binom{p}{i}$ها بر p بخش‌پذیر هستند، عبارت داخل پرانتز تنها یک عامل p دارد. این نشان می‌دهد که تعداد عوامل p در $x^p+۱$ یکی بیش‌تر از عوامل p در $x+۱$ است. حال فرض کنید که حکم برای اعدادی که k عامل p دارند ثابت شده باشد و n، $k+۱$ عامل p داشته باشد، در این صورت عدد طبیعی فرد m وجود دارد که $n=mp$ و m، k عامل p دارد. حال با توجه به فرض استقرا داریم:

$$||x^{mp}+۱||_p=||(x^p)^m+۱||_p=||x^p+۱||+||m||_p=||x+۱||_p+||p||_p+||m||_p=||x+۱||_p+||mp||_p$$

پس حکم برای هر عدد طبیعی برقرار است.

$\square$

حال دقت کنید که $۴(a^۳+۱)=۴(a+۱)(a^۲-a+۱)$. اگر $a>۱$ باشد، $a^۲-a+۱$ عدد فردی بزرگ‌تر از یک است، پس عامل اول فردی مثل p دارد. با استفاده از لم بالا داریم:

$$||۴(a^{۳p}+۱)||_p=||a^{۳p}+۱||_p=||a^۳+۱||_p+||p||_p=||۴(a^۳+۱)||_p+۱$$

اما $۴(a^۳+۱)$ و $۴(a^{۳p}+۱)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تعداد عوامل p در آن‌ها باید مضرب ۳ باشد که چون اختلاف این تعداد برابر یک است امکان ندارد. در نتیجه a نمی‌تواند بیش‌تر از ۱ باشد و در نتیجه تنها $a=۱$ ممکن است.

۵. مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۹\}$ را S می‌نامیم. مسئله را برای شماره‌های با هر تعداد رقم مطرح می‌کنیم و سعی می‌کنیم حداکثر تعداد شماره‌های ممکن با n رقم را پیدا کنیم که هر دو شماره‌ی انتخاب‌شده یا حداقل در دو رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم حداقل دو واحد اختلاف داشته باشند. می‌توان یک شماره‌ی n رقمی با ارقام موجود در مجموعه‌ی S را به صورت یک nتایی مرتب از اعضای مجموعه‌ی S دید که آن را با S^n نمایش می‌دهیم. به استقرا روی n نشان می‌دهیم حداکثر تعداد اعضایی از S^n که می‌توانند انتخاب شوند تا شرط مسئله را برآورده کنند برابر $\frac{۹^n+۱}{۲}$ است. حکم برای حالت $n=۱$ به سادگی و با اندکی چک‌کردن ساده به دست می‌آید.(حتی می‌شد $n=۰$ را به عنوان پایه‌ی استقرا در نظر گرفت!) حال فرض کنید که حکم برای $n-۱$ برقرار باشد و ما می‌خواهیم حداکثر nتایی‌هایی مرتب با خاصیت مطلوب را بیابیم. اعضای S^n را با توجه به عضو اول آن‌ها می‌توان به ۹ دسته تقسیم کرد. اعضایی که عضو اول آن‌ها ۱ است را $A_۱$، آن‌هایی که عضو اول آن‌ها ۲ است را $A_۲$ و... واضح است که برای هر $i\in S$ تعداد اعضای A_i برابر $۹^{n-۱}$ است(برای هر جای‌گاه یکی از عناصر S باید انتخاب شود و بنابراین ۹ حالت داریم.) بنابراین تعداد عناصر S^n هم برابر ۹^n خواهد بود. حال دقت کنید که هر عنصر $A_۱$ را می‌توان با تغییر عضو اولش از یک به دو به عنصری از $A_۲$ تبدیل کرد و بالعکس. بنابراین هر عضو از $A_۱$ را با یک عضو از $A_۲$ جفت می‌شود، به گونه‌ای که تنها در رقم اول تفاوت داشته باشند. توجه کنید

که از آن‌جا که دو شماره‌ی یک جفت در یک رقم و آن هم تنها یک واحد اختلاف دارند، نمی‌توانند هر دو جزء شماره‌های انتخابی باشند. بنابراین از هر جفت معرفی شده حداکثر یک عضو انتخاب می‌شود و در نتیجه تعداد اعضای انتخابی از $A_۱ \cup A_۲$ حداکثر برابر $۹^{n-۱} = \frac{|A_۱|+|A_۲|}{۲}$ است. به همین ترتیب تعداد اعضای انتخابی از $A_۳ \cup A_۴$، $A_۵ \cup A_۶$ و $A_۷ \cup A_۸$ هم حداکثر همین $۹^{n-۱}$ است. اما در مورد $A_۹$ دقت کنید که رقم اول تمام اعضای $A_۹$ یکسان است و بنابراین اگر اختلافی در دو عنصر انتخاب‌شده باشد، تفاوت در $n - ۱$ رقم بعدی است. دقت کنید که یک تناظر بین اعضای $S^{n-۱}$ و $A_۹$ با اضافه کردن و یا برداشتن رقم ۹ از ابتدای شماره وجود دارد. بنابراین طبق فرض استقرا حداکثر $\frac{۹^{n-۱}+۱}{۲}$تا از اعضای $A_۹$ را می‌توان انتخاب کرد. بنابراین در نهایت تعداد کل شماره‌های انتخابی حداکثر برابر است با:

$$۹^{n-۱} + ۹^{n-۱} + ۹^{n-۱} + ۹^{n-۱} + \frac{۹^{n-۱} + ۱}{۲} = \frac{۹ \times ۹^{n-۱} + ۱}{۲} = \frac{۹^n + ۱}{۲}$$

بنابراین اثبات استقرا به پایان می‌رسد. دقت کنید که اگر همه‌ی nتایی‌هایی که زوجیت مجموع ارقام‌شان با n یکی است را انتخاب کنیم تعدادشان برابر همین مقدار حداکثر است. از طرفی اگر دو شماره‌ی متفاوت با این خاصیت را در نظر بگیریم، نمی‌توانند تنها در یک شماره و آن هم یک واحد اختلاف داشته باشند، زیرا در این صورت زوجیت مجموع ارقام آن‌ها متفاوت خواهد شد. بنابراین می‌توان به تعداد حداکثر معرفی‌شده عضو انتخاب کرد.

در ادامه نشان می‌دهیم که تنها یک راه (همین راه بالا) برای انتخاب $\frac{۹^n+۱}{۲}$ شماره‌ی nرقمی با خاصیت خواسته شده وجود دارد. این حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. باز هم صحت گزاره در حالت $n = ۱$ با یک بررسی ساده قابل چک‌کردن است.(در این‌جا هم می‌توان $n = ۰$ را به عنوان پایه‌ی استقرا در نظر گرفت.) فرض کنید حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد. طبق بالا برای رسیدن به حداکثر باید از $A_۹$، $\frac{۹^{n-۱}+۱}{۲}$ عضو انتخاب شود که طبق فرض استقرا تنها به یک صورت امکان دارد.(یادآوری می‌کنیم که اعضای $A_۹$ همان اعضای $S^{n-۱}$ هستند که یک رقم ۹ به ابتدای آن‌ها اضافه شده است.) دقت کنید که اعضایی که انتخاب می‌شوند دقیقاً اعضایی از $A_۹$ هستند که مجموع ارقام آن‌ها زوجیت متفاوتی با $n - ۱$ و بنابراین زوجیت یکسانی با n دارد.(زیرا با اضافه شدن رقم ۹ به ابتدای شماره زوجیت مجموع رقم‌ها تغییر می‌کند.) حال مشابه جفت کردنی که در مورد اعضای $A_۱$ و $A_۲$ در بالا اتفاق افتاد می‌توان اعضای $A_۸$ و $A_۹$ را هم با یک‌دیگر جفت کرد، به گونه‌ای که اعضای هر جفت تنها در رقم اول متفاوت باشند. برای رسیدن به حداکثر بالا باید از هر جفت دقیقاً یک عضو انتخاب شود. اما در $\frac{۹^{n-۱}+۱}{۲}$ تا از جفت‌ها شماره‌ای که رقم اولش ۹ بود انتخاب شده است. بنابراین از مابقی زوج‌ها باید عنصری از $A_۸$ انتخاب شود که باز هم دارای این خاصیت است که زوجیت مجموع ارقامش با n یکی است. در ادامه اعضای $A_۸$ و $A_۷$ را با هم جفت می‌کنیم و استدلال قبلی را این بار برای این دو تکرار می‌کنیم. با ادامه‌ی این استدلال تا رسیدن به $A_۱$ می‌بینیم که همه‌ی اعداد انتخاب‌شده باید به صورت مثالی که گفته شد باشند و بنابراین یک راه یکتا برای انتخاب این تعداد شماره وجود دارد.

۶. ابتدا باید این فرض را به صورت مسئله اضافه کرد که زاویه‌ی $\angle B$ قائمه نیست!

با استفاده از روابط مربوط به قوت نقطه‌ی T نسبت به دایره‌ی محیطی ABC می‌فهمیم $R^۲ - OT^۲ =$

$TA.TB$ که R شعاع دایره است. (این نتیجه را می‌شد با استفاده از رابطه‌ی استوارت در مثلث OAB و قاطع OT هم به دست آورد.) با توجه به تشابه دو مثلث قائم‌الزایه‌ی ATH و BTH می‌توان نتیجه گرفت که $TA.TB = TH^۲$ و لذا:

$$OT^۲ = R^۲ - TH^۲ = R^۲ - AH^۲ . \cos^۲(\angle B)$$

با استدلال‌های کاملاً مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $(OT')^۲ = R^۲ - AH^۲ . \cos^۲(\angle C)$. دقت کنید که تا کنون از فرض $AC = ۲OT$ استفاده نکرده‌ایم. حال اگر این رابطه برقرار باشد، داریم:

$$OT = \frac{۱}{۲}AC = R.\sin(\angle B) \Rightarrow R^۲ \sin^۲(\angle B) = R^۲ - AH^۲ \cos^۲(\angle B) \Rightarrow R^۲ = AH^۲$$

پس طول ارتفاع AH برابر طول شعاع دایره یعنی R است.(دقت کنید که در این‌جا از قائمه نبودن $\angle B$ و در نتیجه صفر نبودن کسینوسش استفاده کردیم.) حال اگر روابط مشابهی را برای پاره‌خط OT' بنویسیم حکم نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &(OT')^۲ = R^۲ - AH^۲ .\cos^۲(\angle C) = R^۲(۱ - \cos^۲(\angle C)) = R^۲ .\sin^۲ \angle C \\ \Rightarrow \quad & OT' = R.\sin(\angle C) = \tfrac{۱}{۲} \times ۲R.\sin(\angle C) = \tfrac{۱}{۲}AB \end{aligned}$$