به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۷

۱.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

حاصل ضرب اولین ستاره‌ی بالا در عدد ۹، رقم دهگان ۸ دارد و لذا این ستاره تنها می‌تواند ۹ باشد و $۹ \times ۹ = ۸۱$، پس اولین ستاره‌ی پایین رقم ۱ است. حاصل‌ضرب دومین ستاره‌ی بالا در ۹ به اضافه‌ی ۸ رقم دهگان ۲ دارد پس تنها ۲ می‌تواند باشد. در نتیجه دومین ستاره‌ی پایین ۶ است. حاصل‌ضرب سومین ستاره‌ی بالا در ۹، ۲۰ است پس سومین ستاره‌ی بالا برابر ۲ است و در نهایت آخرین ستاره‌ی بالا ضرب در ۹ به اضافه ی ۲، دهگان ۱ دارد پس۱ است. در نتیجه آخرین ستاره‌ی پایین برابر یکان حاصل زیر یعنی ۱ است $۹ \times ۱ + ۲ = ۱۱$. در نتیجه حاصل‌ضرب برابر ۱۱۰۶۱ است که مجموع ارقامش برابر ۹ می‌باشد.

۲.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

۷۰۰۰ یک عامل ۷ دارد، پس حداقل یکی از این اعداد یک عامل ۷ باید داشته باشد پس هر کدام از آنها ۲ حالت دارد(یا ۷ دارد و یا ندارد). البته حالتی که هیچ‌کدام ۷ نداشته باشند پذیرفته نیست. درنتیجه به $۲^۳ - ۱$ طریق تعداد عوامل ۷ تعیین می‌گردد. ۷۰۰۰ سه عامل ۵ و ۲ دارد پس حداقل یکی از این اعداد سه عامل ۲ و ۵ دارد و حالتی که همه‌ی آن‌ها کم‌تر از ۳ عامل ۲ و ۵ داشته باشند قابل قبول نیست و درنتیجه به $۴^۳ - ۳^۳ = ۳۷$ طریق تعداد عوامل ۲ و ۵ تعیین می‌گردد. بنابراین در کل تعداد حالت‌های ممکن برای چنین سه‌تایی‌هایی برابر ۳۷×۳۷×۷=۹۵۸۳ است.

۳.گزینه‌ی (د) صحیح است.

ارتفاع مثلث بزرگ‌تر را رسم می کنیم و $h_۳$ می‌نامیم. نسبت $h_۱$ به $h_۳$ طبق قضیه‌ی تالس ۳ به ۷ است. دو مثلث متحدالرأس با هم متشابه هستند پس نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت اضلاع می‌باشد. بنابراین نسبت $h_۳$ به $h_۲$ برابر ۱۰ به ۶ است، و لذا نسبت $h_۲$ به $h_۱$ برابر ۷ به ۵ یعنی ۴/۱ است.

۴.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

چون مثلث دو میانه‌ی برابر دارد، پس مثلث متساوی‌الساقین است و میانه به طول ۸ که ارتفاع آن نیز هست بر ضلع کوچک‌تر وارد شده است. فرض کنید G مرکز ثقل مثلث و A، B و C سه رأس مثلث به ترتیب متناظر با میانه‌های به طول ۸، ۵ و ۵،

و M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد. از آن‌جایی که مرکز ثقل میانه‌ها را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس $GM = \frac{8}{3}$و $GB = \frac{10}{3}$ چون GM عمود بر BC است، طبق قضیه‌ی فیثاغورس $MB^2 = GB^2 - GM^2 = \frac{100}{9} - \frac{64}{9} = \frac{36}{9} = 4$ ، پس $MB = 2$ و $BC = 4$.

۵.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا به جای x^3در این عبارت y را جای‌گذاری می‌کنیم و عبارت به صورت $(1 + y + y^2)^{50}$ در می‌آید که حاصل این عبارت از جمله‌های به صورت y^0، y^1،... و y^{100} تشکیل شده است که هیچ کدام ضریب صفر ندارند زیرا تمام جملات عبارت اولیه مثبت هستند، پس ۱۰۱ جمله با ضریب ناصفر داریم.

۶.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

می‌توان نوشت $(715 + \frac{1387!}{2}) \times 251 \times 2^4 = (1430 + 1387!) \times 2008$ که $715 + \frac{1387!}{2}$ نسبت به ۲ و ۲۵۱ اول است. به همین ترتیب $(715 + \frac{1387!}{2}) \times 2 = 1430 + 1387!$. اگر $715 + \frac{1387!}{2}$، m مقسوم‌علیه داشته باشد، عبارت اول $m \times (1+1) \times (4+1) \times (1+1) = 10m$ مقسوم‌علیه و عبارت دوم $m \times (1+1) = 2m$ مقسوم‌علیه خواهد داشت و بنابراین نسبت تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۵ است.

۷.گزینه‌ی (د) صحیح است.

مجموع دو عدد متمایز بین ۱ تا ۵ اعداد بین ۳ تا ۹ می‌تواند باشد. دقت کنید که برای مجموع‌های ۹، ۸، ۳ و ۴ تنها یک حالت وجود دارد، به طور مثال برای ۴ تنها یک حالت وجود دارد $(3 + 1 = 4)$. اما برای عدد ۷ دو حالت وجود دارد $(6 + 1 = 5 + 2 = 7)$. برای جای‌گذاری چهار رقم در جای‌گاه‌های اول، دوم، چهارم و پنجم $2 \times 4 = 8$ حالت وجود دارد(چهار حالت برای رقم اول، دو حالت برای رقم دوم و تنها یک حالت برای رقم‌های چهارم و پنجم). از بین اعداد ۱تا ۵ یک عدد باقی می‌ماند که در جای‌گاه سوم قرار می‌گیرد. بنابراین برای هر یک از مجموع‌ها ۸ حالت وجود دارد و در کل ۸×۳=۲۴ عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت.(دقت کنید که برای سه مجموع ۵، ۶ و ۷ دو حالت وجود دارد که مجموع برابر آن عدد شود.)

۸.گزینه‌ی (د) صحیح است.

وقتی هر کدام از نفرات یک دور بازی خود را انجام دادند، هر نفر دو مهره به نفر سمت راستش داده و یک مهره از نفر سمت راستش و یک مهره‌ی دیگر از نفر دوم سمت راستش گرفته است، پس تعداد مهره‌های هیچ‌کس تغییر نکرده است. بنابراین بعد از ۸۰ مرحله بازی هم تعداد مهره‌های همه برابر ۱۰۰ می‌ماند. حال در هفت دور بازی باقی‌مانده، نفر هشتم تنها در بازی نفر هفتم دخیل می‌شود و از این بازی یکی از دو مهره‌ای که نفر هفتم از نفر شماره‌ی شش می‌گیرد به او می‌رسد، پس نفر هشتم دارای ۱۰۱ مهره می‌شود.

۹.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

دونده‌ای که به محیط دایره‌ی بزرگ‌تر نزدیک‌تر است، محیط بیش‌تری را طی می‌کند پس باید نقطه‌ی پایان نزدیک‌تری داشته باشد و دونده‌ای که به محیط دایره کوچک‌تر نزدیک‌تر است باید نقطه‌ی پایان دورتری داشته باشد.

۱۰.گزینه‌ی (د) صحیح است.

$M-G=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ و با فرض $b \geq a$ خواهیم داشت:

$$\left|a-b\right|=b-a=(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})$$

درنهایت $k \geq \frac{M-G}{b-a}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ اگر $a=0$ در نظر بگیریم $\frac{1}{2} \geq k$، در نتیجه کم‌ترین مقدار k حداقل $\frac{1}{2}$ است. ضمناً اگر k برابر $\frac{1}{2}$ باشد، از آن‌جا که $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ نامساوی را برقرار می‌کند. پس کم‌ترین مقدار ممکن برای k، همان $\frac{1}{2}$ است.

۱۱.گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ازجست‌وجوی الگو استفاده کنید. به جای تا کردن کاغذ خطوطی که از روی آن‌ها در هر مرحله کاغذ تا می‌شود را رسم کنید و به جای سوراخ کردن کاغذ جاهایی در کاغذ که سوراخ ایجاد می‌شوند را علامت بزنید. به این ترتیب، بعد از گذشت مرحله‌ی اول چهار نقطه‌ی گوشه‌ای کاغذ علامت خورده می‌شوند، با گذشت دو مرحله در مرحله‌ی سوم نقطه‌ی وسط هر ضلع و مرکز مربع هم علامت می‌خورند یعنی تعداد نقطه‌های علامت خورده به ۹تا می‌رسد. با گذشت دو مرحله‌ی بعدی نقطه‌ی وسط هر ضلع و هم‌چنین مرکز چهار مربع کوچک مرحله‌ی سوم علامت می‌خورند. به همین ترتیب می‌توان حدس زد که در مرحله‌ی $2n+1$ام (یعنی در یک مرحله‌ی فرد)، k^2 نقطه‌ی علامت‌خورده داشته باشیم در مرحله‌ی فرد بعدی(مرحله‌ی $2n+3$ام) $(2k-1)^2$

نقطه‌ی علامت‌خورده داریم. پس در مرحله‌ی ۱۱ام $۳۳^۲$ نقطه‌ی علامت‌خورده خواهیم داشت که چون نقاط روی مرز مد نظر ما نیستند، تنها $۳۱^۲ = ۹۶۱$ نقطه‌ی علامت‌خورده داریم.(اثبات این حدس هم می‌تواند به کمک استقرا انجام شود.)

.۱۲

.۱۳گزینه‌ی (د) صحیح است.

عبارت گزینه‌ی (الف) درست است، زیرا اگر $A^m = B^n$ و $B^p = C^q$، آن‌گاه $A^{mp} = B^{np} = C^{qn}$ پس A و C نیز هم‌توانند.

عبارت گزینه‌ی (ب) درست است، زیرا اگر $A^n = I^m = I$ در نتیجه اگر $n = ۱$ که $A = I$ وارون‌پذیر است و اگر $n > ۱$، $I = A^n = A \times A^{n-۱}$ پس $A^{n-۱}$ وارون A است و A وارون‌پذیر است.

عبارت گزینه‌ی (ج) درست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

عبارت گزینه‌ی (ه) درست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^۴ = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^۲$$

بنابراین عبارت گزینه‌ی (د) غلط است. اگر ماتریسی با ماتریس همانی هم‌توان باشد باید عدد طبیعی n موجود باشد که وقتی آن ماتریس به توان n می‌رسد برابر ماتریس همانی شود. اما می‌توان به راحتی دید که اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ به توان n برسد روی قطر آن اعداد ۱ و ۲^n خواهند بود، پس هیچ توانی از این ماتریس برابر همانی نمی‌شود.

توضیح: می‌توان استدلال دیگری را نیز برای اشتباه بودن عبارت گزینه‌ی (د) به کمک دترمینان ارائه کرد. اگر $A^m = B^n$ (یعنی دو ماتریس هم‌توان باشند.) $\det(A)^m = \det(\mathrm{B})^n$. اما دترمینان ماتریس همانی یک است ولی دترمینان $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}^n$ برابر ۲^n است. پس این دو ماتریس هم‌توان نیستند.

۱۴.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

$a \neq ۱$، زیرا اگر a برابر ۱ باشد آنگاه $b = c$ که طبق فرض صورت سؤال درست نیست.

اگر $a \times b = \overline{xy}$ و $a \times c = \overline{yx}$(دقت کنید که $x \neq y$، زیرا اگر این دو برابر باشند مجدداً b و c برابر خواهند شد.) آن‌گاه $a \times b + a \times c = ۱۱x + ۱۱y = ۱۱(x+y)$ بنابراین $۱۱ \big| a(b+c)$ و چون a یک‌رقمی است و نمی‌تواند بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، پس $۱۱ \big| b+c$. با این توصیفات خواهیم داشت:

$$(b,c) \in \{(۲,۹),(۳,۸),(۴,۷),(۵,۶),(۶,۵),(۷,۴),(۸,۳),(۹,۲)\}$$

از طرف دیگر $a(b-c) = a \times b - a \times c = ۹(x-y)$ بنابراین $۹ \big| a(b-c)$

حال روی حالت‌های مختلف a بحث می‌کنیم.

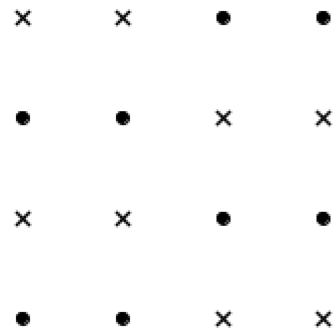
اگر $a = ۹$باشد همه‌ی حالت‌های بالا برای زوجِ (b,c) امکان دارند.

اگر $a = ۳$ و یا $a = ۶$ آن‌گاه باید $b - c$ بر ۳ بخش‌پذیر شود که بین حالت‌های بالا تنها $(۴,۷)$ و $(۷,۴)$ این خاصیت را دارند.

و در بقیه حالات باید $۹ \big| b-c$ که هیچ b و c تک‌رقمی نابرابر چنین شرایطی ندارند. بنابراین کل حالات ۱۲تا می‌شود.

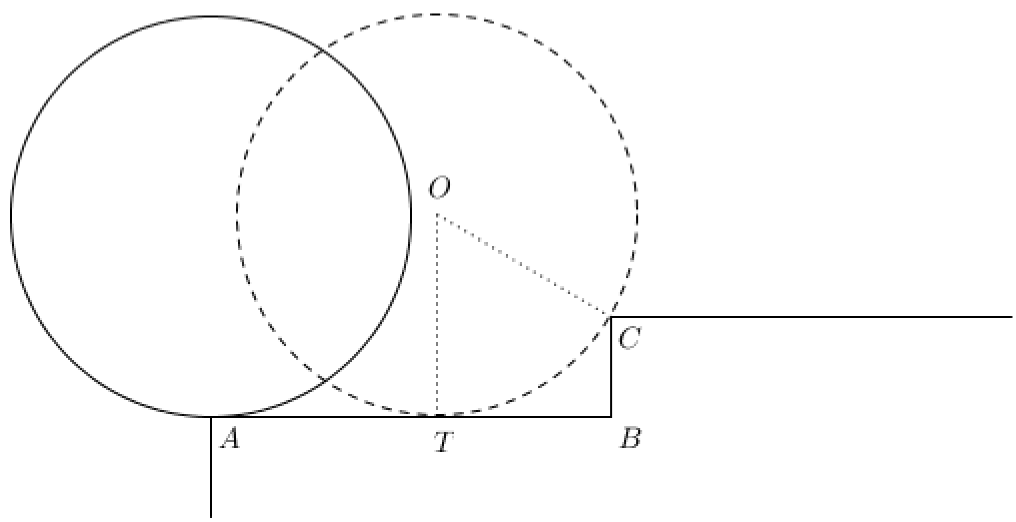
۱۵.گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که اگر از یک سطر بیش از دو نقطه انتخاب کنیم، قطعاً سه‌نقطه‌ی هم‌خط یافت می‌شوند و بنابراین تعداد نقطه‌ها نمی‌تواند از ۸تا بیش‌تر باشد. برای ۸ نقطه هم اگر نقاطی که در شکل زیر با × مشخص شده‌اند را انتخاب کنیم، خاصیت مسئله را دارا هستند.



۱۶.گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا چرخ شروع به غلطیدن روی پله‌ی اول می‌کند تا نقطه‌ای از آن به پله‌ی دوم برخورد کند.(شکل زیر)



در این صورت زاویه‌ای که چرخ به رادیان می‌چرخد، برابر طول AT تقسیم بر شعاع دایره است. زیرا طول یک کمان از دایره برابر زاویه‌ی آن به رادیان در شعاع دایره است و در این‌جا طول کمانی که یک نقطه‌ای از دایره می‌چرخد برابر طول AT است.

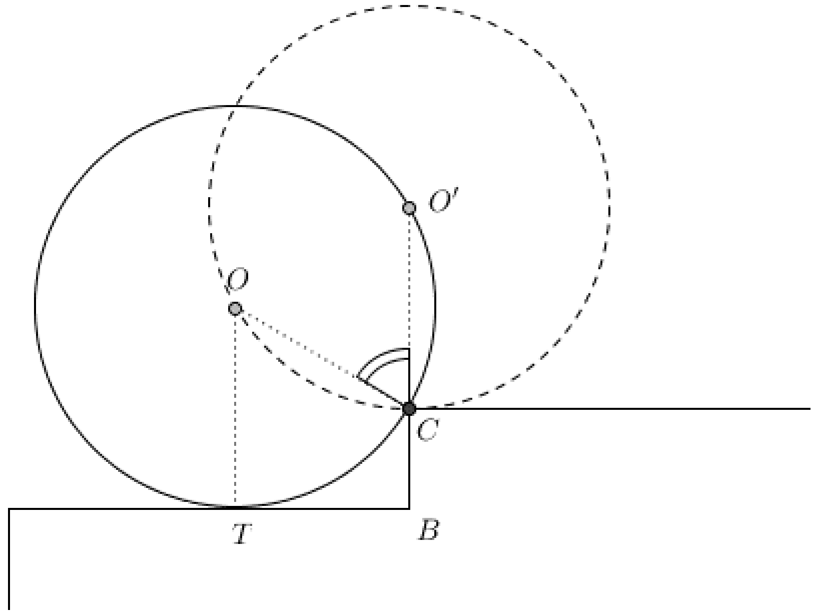
حال دقت کنید که $AT = AB - BT = ۲ - BT$. پس کافی است طول BT را پیدا کنیم.

$$BT^۲ = OC^۲ - (OT - CB)^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow BT = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AT = ۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

دقت کنید که چون شعاع دایره یک است، زاویه‌ی طی شده هم برابر همین مقدار $۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

حال چرخ حول نقطه‌ی C باید بچرخد تا به پله‌ی بالاتر منتقل شود. مقدار این چرخش برابر زاویه‌ی $\angle OCO'$ است.

$$\sin(\angle OCO') = \frac{BT}{OC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \angle OCO' = \frac{\pi}{۳}$$



این فرآیند باید یک بار دیگر برای پله‌ی دوم هم انجام شود. پس چرخ در مجموع $۲(۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = ۴ - \sqrt{۳} + \frac{۲}{۳}\pi$ زاویه می‌چرخد.

۱۷.گزینه‌ی (د) صحیح است.

از هشت رابطه‌ی اول نتیجه می‌شود:

$$x_۲ - x_۱ = x_۳ - x_۲ = \cdots = x_{۱۰} - x_۹$$

این مقدار مشترک را d می‌نامیم. پس $x_n = x_۱ + (n - ۱)d$.

$$x_۹ + x_۱ = ۲x_۱ + ۸d = ۲۲ \Rightarrow x_۵ = x_۱ + ۴d = ۱۱$$

توضیح: با راه‌حلی که ارائه شد، به رابطه‌ی آخر صورت سؤال نیازی نیست. اما به کمک این رابطه و رابطه‌ای که در بالا داریم می‌توان مقدار $x_۱$ و d را به تنهایی محاسبه کرد. کاری که در راه‌حل بالا انجام نشد.

۱۸.گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اگر $m,n \leq 8$ تعداد مستطیل های به طول m و عرض n این‌گونه تعیین می‌گردد که از ضلع عمودی مستطیل ۸×۸ دو سطر که فاصله‌ی آن‌ها به اندازه‌ی m باشد و از ضلع افقی دو ستون که فاصله‌ی آن‌ها از یک‌دیگر به اندازه‌ی n باشد انتخاب می‌کنیم که به ترتیب $9-m$ و $9-n$ حالت دارد. پس تعداد مستطیل‌ها با این ابعاد برابر $(9-n)(9-m)$ و مساحت هر کدام نیز برابر mn است پس مجموع مساحت کل این مستطیل‌ها برابر است با:

$$\sum_{m=1}^{8}\sum_{n=1}^{8}(9-m)(9-n)mn = 81(\sum_{m=1}^{8} m)^2 - 18(\sum_{m=1}^{8} m)(\sum_{m=1}^{8} m^2) + (\sum_{m=1}^{8} m^2)^2$$
$$= 81\times 36^2 - 18\times 36\times 204 + 204^2 =$$
$$= 104976 - 132192 + 41616 = 14400$$

۱۹.گزینه‌ی (الف) صحیح است.

برای بدست آوردن سه رقم سمت راست، باقی‌مانده‌ی این عدد در تقسیم بر ۱۰۰۰را بدست می آوریم.

$$21^{64} = (20+1)^{64} = \sum_{i=0}^{64}\binom{64}{i}20^i = 1 + 64\times 20 + \frac{64\times 63}{2}\times 20^2 + 20^3(\cdots) = 80681 + 20^3(\cdots)$$

پس سه رقم سمت راست برابر ۶۸۱ است.

۲۰.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر تصویر بر روی صفحه‌ی $x-y$ شکل سمت چپ باشد، جسم می‌تواند از لایه‌های ۵تایی که روی سایه‌هایشان قرار گرفته‌اند تشکیل شده باشد، اما چون تصویر جسم بر روی صفحه‌ی عمود براین صفحه به صورت شکل ۲ است. بنابراین باید ۲ لایه باشد که لایه‌ی اول از ۵ و لایه‌ی دوم از ۳ مکعب ۱×۱ تشکیل شده است که در مجموع ۸ مکعب می‌شوند.

۲۱.گزینه‌ی (الف) صحیح است.

لم اول. قرینه‌ی نقطه‌ی (a,b) نسبت به خط $y+5x=0$، نقطه‌ی $(a,b)-2(5,1)\dfrac{5a+b}{26}$ خواهد بود.

روند اثبات. ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی (a,b) و عمود بر خط $y+5x=0$ را می‌یابیم. قرینه‌ی نقطه‌ی (a,b) نسبت به محل برخورد این دو خط همان نقطه‌ی مورد نظر خواهد بود.

بنا بر لمِ بالا، قرینه‌ی نقطه‌ی $(a, ۰)$ نسبت به این خط نقطه‌ی $(-\frac{۲۴}{۲۶}a, -\frac{۱۰}{۲۶}a)$ است و لذا قرینه‌ی خط $y = ۰$ نسبت به این خط، $y = \frac{۱۰}{۲۴}x$ خواهد بود. حال دقت کنید که خط $y = \frac{۱۰}{۲۴}x$، نمودار تابع $y = x^۳$ را در سه نقطه قطع می‌کند و بنابراین قرینه‌ی این نمودار نسبت به $y + ۵x = ۰$ و خط $y = ۰$ در سه نقطه متقاطع هستند. لذا اگر قرینه‌ی این نمودار، خود نمودارِ تابع باشد، تابع جدید نمی‌تواند یک به یک و صعودی یا نزولی باشد.

از طرف دیگر برای هر عدد حقیقیِ k'، معادله‌ی $x^۳ = \frac{۱۰}{۲۴}x + k'$ جواب حقیقی دارد. این یعنی تمام خطوط به شکل $y = \frac{۱۰}{۲۴}x + k'$ و منحنی $y = x^۳$ متقاطع هستند. بنابراین قرینه‌ی نمودار $y = x^۳$ هر خط افقی را در حداقل یک نقطه قطع می‌کند و این یعنی قرینه‌ی این نمودار اگر تابع باشد، تابعی پوشا است.

با استدلالی شبیه به آن‌چه در بالا آورده شد قرینه‌ی خط $x = ۰$ نسبت به خط $y + ۵x = ۰$، خط $y = -\frac{۲۴}{۱۰}x$ است. با توجه به نکته‌ای که در بالا توضیح داده شد، قرینه‌ی خطوط به شکل $x = k$ به صورت $y = -\frac{۲۴}{۱۰}x + k'$ در می‌آیند. حال برای این که نشان دهیم قرینه‌ی نمودار $y = x^۳$ خود نمودار یک تابع است، ادعا می‌کنیم قرینه‌ی این نمودار هر خط به صورت $x = k$ را در دقیقاً یک نقطه قطع می‌کند. به طور معادل بعد از قرینه کردن نسبت به خط $y + ۵x = ۰$، نمودار $y = x^۳$ هر خط به صورت $y = -\frac{۲۴}{۱۰}x + k'$ را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند و این هم یعنی معادله‌ی $x^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x - k' = ۰$ برای هر عدد حقیقی k' دقیقاً یک جواب حقیقی دارد. اولاً دقت کنید که این یک معادله‌ی درجه سه است که حداقل یک جواب حقیقی دارد. ثانیاً می‌توان به صورت زیر نشان داد تابع $P(x) = x^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x - k'$ یک به یک است و بنابراین این معادله تنها یک جواب می‌تواند داشته باشد.

$$\begin{aligned} P(x_۱) = P(x_۲) &\Rightarrow x_۱^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x_۱ - k' = x_۲^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x_۲ - k' \\ &\Rightarrow x_۱^۳ - x_۲^۳ + \frac{۲۴}{۱۰}x_۱ - \frac{۲۴}{۱۰}x_۲ = ۰ \\ &\Rightarrow (x_۱ - x_۲)(x_۱^۲ + x_۱x_۲ + x_۲^۲ + \frac{۲۴}{۱۰}) = ۰ \end{aligned}$$

اما $۲(x_۱^۲ + x_۱x_۲ + x_۲^۲ + \frac{۲۴}{۱۰}) = (x_۱ + x_۲)^۲ + x_۱^۲ + x_۲^۲ + ۴/۸ > ۰$ پس $x_۱ = x_۲$ و لذا $P(x)$ یک به یک است.

۲۲.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دو رقم سمت راست $۲^{۱۰۰}$ را به وسیله‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ به دست می‌آوریم.

$$۲^{۱۰۰} \equiv ۱۰۲۴^{۱۰} \equiv ۲۴^{۱۰} \equiv (۲۰ + ۴)^{۱۰} \equiv ۴^{۱۰} + ۲۰ \times ۴^{۹} \times \binom{۱۰}{۱} + ۴۰۰(\cdots)$$
$$\equiv ۲^{۲۰} \equiv ۱۰۲۴^{۲} \equiv ۲۴^{۲} \equiv ۵۷۶ \equiv ۷۶$$

(که منظور از $\equiv$، هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ است.)

حال با توجه به این که دو رقم سمت راست ۷۶ است، جمع کردن $۲^{۱۰۰}$ با اعداد حاضر در گزینه‌های سؤال در ارقام سوم به بعد $۲^{۱۰۰}$ تأثیری ندارد، پس باید مجموع دو رقم سمت راست گزینه‌ها را بیابیم.

	دو رقم سمت راست	مجموع دو رقم سمت راست
گزینه‌ی (الف)	۹۶	۱۵
گزینه‌ی (ب)	۸۸	۱۶
گزینه‌ی (ج)	۸۴	۱۲
گزینه‌ی (د)	۸۰	۸
گزینه‌ی (ه)	۷۶	۱۴

پس بیش‌ترین مجموع ارقام مربوط به گزینه‌ی (ب) است.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

اولاً واضح است که ۱ باید در پایین‌ترین خانه قرار بگیرد. حال از بین ۸ عدد باقی‌مانده، ۳ عدد را به $\binom{۸}{۳} = ۵۶$ برای سه جای‌گاه سمت چپ انتخاب می‌کنیم. کوچک‌ترین عدد بین این سه عدد باید در پایین‌ترین خانه قرار بگیرد و دو عدد دیگر به دو حالت در خانه‌ی بالایی جای می‌گیرند. حال از بین ۵ عدد دیگر که باید در ۵ دایره‌ی سمت راست جای بگیرند، کوچک‌ترین عدد در پایین‌ترین خانه قرار می‌گیرد و می‌توان به ۴ طریق یکی از ۴ عدد باقی‌مانده را برای خانه‌ی تنهای ردیف سوم انتخاب کرد. ۳ عدد باقی‌مانده هم شبیه بالا به دو حالت در سه دایره‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند.(عدد کوچک‌تر در دایره‌ی پایین‌تر و دو عدد دیگر به دو حالت در دو دایره‌ی بالاتر) پس در کل این عمل به $۵۶ \times ۲ \times ۴ \times ۲ = ۸۹۶$ طریق امکان دارد.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اولاً a و b هر دو صحیح هستند پس 2^{b-a} هم صحیح است و لذا $a \leq b$. اگر $a = b$، باید $b^2 = b + 1$ که با توجه به تفاوت زوجیت دو طرف برای هیچ عدد صحیحی امکان ندارد. بنابراین $b - a \geq 1$ و لذا 2^{b-a} زوج است. حال با توجه به این زوجیت a و b یک‌سان خواهد بود و لذا $b - a = 2k$ برای یک عدد طبیعی k.

$$b^2 = a + 2^{2k} \Rightarrow a = (b - 2^k)(b + 2^k)$$

دقت کنید از آن‌جا که a نامنفی است، $b \geq 2^k$. حال اگر $b > 2^k$، آن‌گاه $a = (b + 2^k)(b - 2^k) \geq b > a$ که امکان ندارد، پس $b = 2^k$ و بنابراین $a = 0$. حال معادله به صورت $b^2 = 2^b$ در می‌آید و معادلاً $2^{2k} = 2^{2^k}$. از رابطه نتیجه می‌شود که $k = 2^{k-1}$. اگر $k > 3$ به سادگی با استقرا می‌توان نشان داد که $2^{k-1} > k$ و $k = 0,1$ جواب این معادله هستند که منجر به $b = 2,4$ می‌شوند. پس این معادله دارای دو جواب $(0,2)$ و $(0,4)$ است.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم نقطه‌ی P باید مرکز ارتفاعی این مثلثی باشد. به برهان خلف فرض کنید این چنین نباشد و برای مثال نقطه‌ی A روی خط عمود بر BC که از P می‌گذرد قرار نداشته باشد. دو نقطه روی خط عمود بر BC و گذرا از P وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها تا P برابر ۷ است. این دو نقطه را A_1 و A_2 می‌نامیم. به علاوه فرض کنید l_1 و l_2 به ترتیب خط‌های موازی با BC گذرا از A_1 و A_2 باشند. به وضوح دایره‌ی به شعاع ۷ به مرکز P بین این دو خط قرار دارد و بنابراین دو خط l_1 و l_2 در دو طرف نقطه‌ی A که روی دایره است قرار دارند. بنابراین با توجه به این که BC هم با این دو خط موازی است نقطه‌ی A بین یکی از این دو خط(مثلاً l_1) و خط BC قرار دارد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که فاصله‌ی BC با خط l_1(ارتفاع نظیر A_1 از مثلث A_1BC) بیش‌تر از فاصله‌ی نقطه‌ی A با BC(ارتفاع نظیر A از مثلث ABC) است و چون قاعده‌ی هر دو مثلث BC است، مساحت مثلث اول بیش‌تر است که با بیش‌ترین بودن مساحت مثلث ABC تناقض دارد. بنابراین باید P روی ارتفاع نظیر A باشد. با استدلال مشابه P باید روی دو ارتفاع دیگر هم قرار داشته باشد و بنابراین مرکز ارتفاعی مثلث است.

حال اگر A' و C' به ترتیب پای ارتفاع‌های نظیر A و C باشند، می‌دانیم چهارضلعی $AC'A'C$ محاطی است و لذا

$$PC'.PC = PA'.PA \Rightarrow \frac{PC'}{PA'} = \frac{PA}{PC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

پس نسبت مورد نظر برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲۶.گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=-\sin z\\ \cos x+\cos y=-\cos z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^{۲}x+\sin^{۲}y+۲\sin x\ \sin y=\sin^{۲}z\\ \cos^{۲}x+\cos^{۲}y+۲\cos x\ \cos y=\cos^{۲}z\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲+۲(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=۱ \qquad .$$

$$\Rightarrow\ \cos(x-y)=\frac{-۱}{۲}$$

(ابتدا دو طرف رابطه‌ها را به توان دو رسانده و سپس دو رابطه را با هم جمع کرده‌ایم.)

حال از آن‌جا که $x,y\in(-\pi,\pi]$ نتیجه می‌گیریم $x-y\in(-۲\pi,۲\pi)$. ضمناً $\cos(x-y)=\frac{-۱}{۲}$ و بنابراین $x-y\in\{\frac{\pm۲\pi}{۳},\frac{\pm۴\pi}{۳}\}$. با استدلال کاملاً مشابه برای دیگر متغیرهای درمی یابیم $y-z,z-x\in\{\frac{\pm۲\pi}{۳},\frac{\pm۴\pi}{۳}\}$.

از آن‌جا که $(x-y)+(y-z)+(z-x)=۰$ با اندکی بررسی درمی‌یابیم تنها حالات ممکن برای این سه عدد این است که دو تا از آنها برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ و یکی $\frac{-۴\pi}{۳}$ و در حالت دیگر دو تا برابر $\frac{-۲\pi}{۳}$ و یکی برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ باشد.

حال با اندکی آزمون و خطا و با توجه به رابطه‌ی سوم (که تا کنون استفاده نشده) می‌توان تمام جواب‌های مسأله را پیدا کرد اما خواسته‌ی مساله مقدار $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ است. بنابراین چنین کاری لازم نیست، بل‌که می‌توانیم با همین اطلاعات مقدار خواسته شده را محاسبه کنیم:

$$x+y+z=۰\Rightarrow(x+y+z)^{۲}=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+۲xy+۲yz+۲zx=۰$$
$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=-۲(xy+yz+zx)$$

از سوی دیگر $\frac{۸\pi^{۲}}{۳}=(\frac{۴\pi}{۳})^{۲}+(\frac{۲\pi}{۳})^{۲}+(\frac{۲\pi}{۳})^{۲}=(x-y)^{۲}+(y-z)^{۲}+(z-x)^{۲}$ و بنابراین

$$(x-y)^{۲}+(y-z)^{۲}+(z-x)^{۲}=۲(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})-۲(xy+yz+zx)=۳(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})$$

$$\Rightarrow\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=\frac{۸\pi^{۲}}{۹}$$

۲۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با الگویابی و بررسی مقادیر اولیه برای A_n می‌توان حدس زد که

$$A_n = \{n, n-۱, n-۳, n-۴, , \dots\}$$

یعنی اعداد کوچک‌تر از n مثل k که باقی‌مانده‌ی $n-k$ بر ۳ برابر دو باشد در A_n نیستند. این ادعا را می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد. فرض کنید حکم برای $A_{m-۱}$ و $A_{m-۲}$ برقرار باشد. در این صورت برای A_m

اگر $k < m$ و (به پیمانه‌ی ۳) $m-k \equiv ۰$، در صورت $k \notin A_{m-۱}$ ولی $k \in A_{m-۲}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $k \in (A_{m-۱} \Delta A_{m-۲}) \cup \{m\} = A_m$.

اگر $k < m$ و (به پیمانه‌ی ۳) $m-k \equiv ۱$، در صورت $k \in A_{m-۱}$ ولی $k \notin A_{m-۲}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $k \in (A_{m-۱} \Delta A_{m-۲}) \cup \{m\} = A_m$.

اگر $k < m$ و (به پیمانه‌ی ۳) $m-k \equiv ۲$، در صورت $k \in A_{m-۱}$ و ضمناً $k \in A_{m-۲}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $k \notin (A_{m-۱} \Delta A_{m-۲}) \cup \{m\} = A_m$.

و اگر $k = m$ به وضوح طبق تعریف $k \in (A_{m-۱} \Delta A_{m-۲}) \cup \{m\} = A_m$.

پس حکم به طور کامل ثابت می‌شود. تنها باید اعداد ابتدایی را به عنوان پایه‌ی استقرا بررسی کرد.

حال برای $n = ۱۰۰$، تنها $۱۰۰ - ۷۱ = ۲۹$ دارای باقی‌مانده‌ی ۲ در تقسیم به ۳ است و بنابراین تنها ۷۱ در $A_{۱۰۰}$ ظاهر نمی‌شود.

۲۸.گزینه‌ی (ب) صحیح است.

باتری‌ها را از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. ابتدا جفت‌های $\{۱,۲\}$ و $\{۴,۵\}$ را امتحان می‌کنیم اگر سالم بودند که چراغ‌قوه روشن شده است و به هدف خود رسیده‌ایم. اگر نه پس قطعاً باتری شماره ۳ سالم است و ضمناً چون از بین هر کدام از این جفت‌ها حتما یکی خراب بوده و فقط ۲ باتری خراب داریم در هر جفت یک باتری خراب و یک باتری سالم است. در نهایت اگر جفت $\{۱,۳\}$ و $\{۲,۳\}$ را امتحان کنیم حتماً در یکی از این دو امتحان چراغ‌قوه روشن می‌شود(چون یکی از ۱ و ۲ حتماً سالم است.) پس در مجموع با چهار بار امتحان حتماً می‌توان چراغ‌قوه را روشن کرد.

ضمناً ادعا می‌کنیم با سه بار امتحان لزوماً چراغ‌قوه روشن نمی‌شود. زیرا دقت کنید که حتماً باتری‌ای یافت می‌شود که در حداقل دو امتحان در چراغ‌قوه قرار داده شده باشد.(در غیر این صورت باید حداقل شش باتری داشته باشیم.) فرض کنید این باتری

مشترک در امتحان‌های اول و دوم آمده باشد. در این صورت اگر این باتری مشترک و یکی از باتری‌های امتحان سوم خراب باشند، چراغ‌قوه روشن نمی‌شود.

۲۹.گزینه‌ی (ج) صحیح است.

رأس مثلث را A می‌نامیم از A عمودی بر محور رسم می‌کنیم که چون ضلع قاعده و محور موازی‌اند این خط بر قاعده نیز عمود است و آن را نصف می کند(مثلث متساوی‌الساقین است) پس می‌توان این‌گونه تصور کرد که حجم مورد نظر از یک استوانه که ارتفاع آن ۶ و شعاع قاعده‌ی آن برابر $\sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$ است تشکیل شده که از آن دو مخروط به ارتفاع ۳و شعاع برابر شعاع استوانه بیرون آورده شده است. حال حجم استوانه برابر $۴^۲\pi \times ۶ = ۹۶\pi$ و حجم هر مخروط برابر $\frac{۱}{۳}۴^۲\pi \times ۳ = ۱۶\pi$ بنابراین حجم شکل حاصل برابر است با $۹۶\pi - ۲ \times ۱۶\pi = ۶۴\pi$.

۳۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

دقت کنید که این مهره به هر تعداد دل‌خواهی حرکت می‌کند ولی تعداد خانه‌هایی که از آن‌ها می‌گذرد محدود است، پس زمانی می‌رسد که از خانه‌ای که قبلاً از آن گذشته عبور می‌کند. حال خانه‌ای که مهره بعد از nاُمین حرکتش در آن قرار می‌گیرد را A_n می‌نامیم. توضیحات بالا نشان می‌دهد می‌توان دو عدد طبیعی $k < l$ یافت که $A_k = A_l$. از آن‌جا که می‌توان حرکت مهره را در جهت عکس انجام داد(۳۰ خانه به سمت چپ و ۲۰ خانه به سمت پایین حرکت کرد.) اگر $A_k = A_l$ باید $A_{k-۱} = A_{l-۱}$ و به همین ترتیب $A_{k-۲} = A_{l-۲}$ و ... تا این که $A_{k-l} = A_۰$. یعنی زمانی می‌رسد که مهره از خانه‌ی اولیه عبور می‌کند. حال m را کوچک‌ترین عدد طبیعی بگیرید که $A_m = A_۰$ در این صورت باید $A_۰, A_۱, \ldots, A_{m-۱}$ متمایز باشند زیرا در غیر این صورت، مهره زودتر از مرحله‌ی mاُم هم به خانه‌ی اولیه‌ی خود برگشته است که با فرض ما مبنی بر کوچک‌ترین بودن m تناقض دارد. حال دقت کنید که در این شرایط کل خانه‌هایی که مهره از آن‌ها عبور می‌کند همین m خانه هستند. پس جواب مسئله $\frac{m}{۱۴۰ \times ۷۲}$ است و هدف باید پیدا کردن m باشد.

با توجه به نحوه‌ی حرکت مهره بعد از مرحله‌ی nام مهره در خانه‌ای که قرار دارد که شماره‌ی ستونش باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳۰n + ۱$ بر ۱۴۰ و شماره‌ی سطرش باقی‌مانده‌ی تقسیم $۲۰n + ۱$ بر ۷۲ باشد. بنابراین هدف ما یافتن کوچک‌ترین عدد طبیعی m است که $۳۰m + ۱ \equiv ۱$ (به پیمانه‌ی ۱۴۰) و $۲۰m + ۱ \equiv ۱$ (به پیمانه‌ی ۷۲).

$$\left.\begin{array}{l} ۱۴۰ \mid ۳۰m \Rightarrow ۱۴ \mid ۳m, (۱۴,۳) = ۱ \Rightarrow ۱۴ \mid m \\ ۷۲ \mid ۲۰m \Rightarrow ۱۸ \mid ۵m, (۱۸,۵) = ۱ \Rightarrow ۱۸ \mid m \end{array}\right\} \Rightarrow ۲ \times ۷ \times ۹ = [۱۴,۱۸] \mid m$$

و چون m کم‌ترین مقدار طبیعی ممکن است $m = ۲ \times ۷ \times ۹$ و بنابراین مهره به $\frac{۱}{۸۰} = \frac{۲\times۷\times۹}{۱۴۰\times۷۲} = \frac{m}{۱۴۰\times۷۲}$ از خانه‌های جدول می‌تواند برسد.