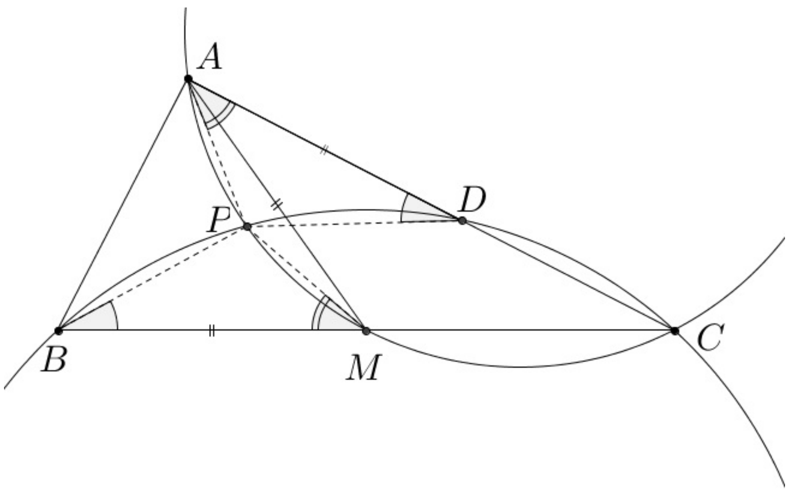
به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۶

---

۱. از آن‌جا که نقطه‌های B، P، D و C روی یک دایره قرار دارند نتیجه می‌گیریم $\angle PBC = \angle ADP$. هم‌چنین نقطه‌های A، P، M و C هم‌دایره هستند، درنتیجه $\angle CAP = \angle PMB$. از آن‌جایی که مثلث ABC قائم‌الزاویه است، میانه‌ی وارد بر وتر (AM) نصف وتر است. پس $AM = MB$ و لذا $BM = AD$. از نتایج بالا به دست می‌آید که دو مثلث PMB و PAD با یک‌دیگر هم‌نهشت هستند. پس طول ارتفاع رسم‌شده از P در این دو مثلث برابر است که نتیجه می‌دهد نقطه‌ی P از دو ضلع زاویه‌ی $\angle ACB$ به یک فاصله است و در نتیجه روی نیم‌ساز این زاویه قرار دارد.



۲. راه‌حل اول. فرض کنید a_n تعداد مسیرهای به طول n از O به خودش(یا به دلیل تقارن تعداد مسیرهای به طول n از یک رأس به خودش)، و b_n تعداد مسیرهای به طول n از O به A باشد (یا به دلیل تقارن تعداد مسیرهای به طول n از یک رأس به رأس غیرمجاور در یک وجه).
یک مسیر از O به خودش را در نظر بگیرید. به $n-۱$امین رأس این مسیر توجه کنید. طبق شرط مسئله این رأس باید خود O و یا رأسی باشد که فاصله‌اش از O برابر ۲ است. می‌دانیم که فاصله‌ی سه رأس از O برابر با ۲ است و هم‌چنین تعداد مسیرهای به طول دو بین دو رأس که در یک وجه روبه‌رو به یک قطر هستند برابر ۲ و تعداد مسیرهای به طول ۲ از یک رأس به خودش برابر ۳ است. در نتیجه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_n = ۲\left(b_{n-۲} + b_{n-۲} + b_{n-۲}\right) + ۳a_{n-۲}$$

به همین ترتیب به سادگی به دست می‌آید که:

$$b_n = ۲\left(a_{n-۲} + b_{n-۲} + b_{n-۲}\right) + ۳b_{n-۲}$$

با کم کردن این دو رابطه از یک‌دیگر داریم:

$$a_n - b_n = a_{n-۲} - b_{n-۲}$$

در نتیجه:

$$a_{۱۳۸۶} - b_{۱۳۸۶} = a_{۱۳۸۴} - b_{۱۳۸۴} = \ldots = a_{۰} - b_{۰} = ۱$$

بنابراین $a_{۱۳۸۶} > b_{۱۳۸۶}$.

راه‌حل دوم. چهار رأس از رئوس مکعب روی عمود منصف OA واقع هستند. این چهار رأس را رئوس میانی می‌گوییم. هر مسیر به طول ۱۳۸۶ از O به A از یکی از این رئوس میانی می‌گذرد. حال با فرآیند زیر از هر مسیر O به A مسیری از O به O می‌سازیم.

بعد از اولین باری که مسیر از یک رأس میانی عبور کرد، قرینه‌ی حرکت‌هایی که انجام داده‌ایم را نسبت به صفحه‌ی عمود منصف OA انجام می‌دهیم تا این بار به نقطه‌ی O برسیم.

پس هر مسیر از O به A به مسیری یکتا از O به O تبدیل می‌شود. دقت کنید که از آن‌جا که می‌توان عکس این کار را انجام داد هیچ دو مسیری به یک مسیر تبدیل نمی‌شود. پس تعداد مسیرهای از O به O بیش‌تر یا مساوی مسیرهای O به A است. اما دقت کنید که مسیری که از تعدادی پایین و سپس بالا رفتن از رأس O تشکیل شده است هیچ‌گاه از رئوس میانی نمی‌گذرد و بنابراین تبدیل یافته‌ی هیچ مسیری از O به A نیست.، بنابراین در کل تعداد مسیرهای از O به O بیش‌تر است.

۳. فرض کنید ارتفاع ساختمان در نقطه‌ی X از صفحه را با h_X نمایش دهیم. اگر ساختمان‌های بناشده در دو نقطه‌ی A و B بر یک‌دیگر مشرف نباشند، با توجه به تعریف مشرف بودن این معادل آن است که زاویه‌ای که خط واصل بین دو سر ساختمان‌ها می‌سازند با زمین کم‌تر یا مساوی $۴۵°$ باشد. اگر این زاویه را θ بنامیم، داریم:

$$۱ = |\tan(۴۵°)| \geq |\tan\theta| = \frac{|h_A - h_B|}{|A - B|} \Leftrightarrow |h_B - h_A| \leq |B - A|$$

که منظور از $|B - A|$ فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B در صفحه‌ی شهر است. فرض کنید که نقطه‌ای که می‌خواهیم در آن ساختمان جدید را بنا کنیم، نقطه‌ی P باشد و ارتفاع ساختمان مورد نظر را با h نمایش‌دهیم. شرط مشرف نبودن هیچ دو ساختمانی بعد از بنای این ساختمان ایجاب می‌کند که بعد از بنای این ساختمان برای هر ساختمان دیگر مثل ساختمان نقطه‌ی A داشته باشیم $|h - h_A| \leq |P - A|$ و معادلاً $h \in [-|P - A| + h_A, |P - A| + h_A]$.

کافی است نشان دهیم که اشتراک این بازه‌ها برای ساختمان‌های مختلف شامل نقطه‌ای مثبت است، زیرا در این صورت h را برابر این نقطه می‌گیریم و بنابراین همه‌ی شرط‌های مورد نیاز برای مشرف نبودن‌ها برآورده می‌شود.

h را برابر کوچک‌ترین عدد در بین کران بالایی بازه‌های بالا برای ساختمان‌های مختلف بگیرید(دقت کنید که از آن‌جا که تعداد ساختمان‌های شهر متناهی است، حتماً کوچک‌ترین عددی وجود دارد). فرض کنید این عدد مربوط به ساختمانی باشد که در نقطه‌ی B بنا شده است. پس $h = h_B + |P - B|$.

مثبت بودن این عدد واضح است. حال باید نشان دهیم که این عدد در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که این عدد در بازه‌ی مربوط به ساختمان A نباشد.

$$h \notin [-|P - A| + h_A, |P - A| + h_A]$$

با توجه به این که h کوچک‌ترین کران بالایی در بین کران بالای بازه‌ها بود، تنها حالت ممکن برای این که h در این بازه نباشد، این است که h از کران پایین آن کم‌تر باشد.($h < -|p-A| + h_A$) اما این با توجه به نامساوی مثلث نتیجه می‌دهد که:

$$h_B + |P-B| < -|P-A| + h_A \Rightarrow h_A - h_B > |P-A| + |P-B| \geq |A-B|$$

پس $|h_A - h_B| > |A-B|$ و بنابراین این دو ساختمان قبلاً به هم مشرف بوده‌اند که خلاف فرض مسئله است. این تناقض نشان می‌دهد که h معرفی‌شده در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۴. . برای اثبات حکم کافی است که به ازای هر عدد طبیعی n، n عدد طبیعی با شرایط مسئله بیابیم. اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$۱^۳, ۲^۳, \ldots, n^۳$$

می‌دانیم که هر کدام از این اعداد مکعب کامل هستند. در نتیجه حاصل‌ضرب آن‌ها نیز مکعب کامل است. همچنین به کمک استقرا اثبات می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر $\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$ است و در نتیجه مربع کامل است. این حکم برای $n = ۱$ به وضوح درست است. حال فرض کنید که حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد، یعنی:

$$۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + (n-۱)^۳ = \left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲$$

برای نتیجه گرفتن حکم در حالت n باید نشان دهیم که:

$$\left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲ + n^۳ = \left(\frac{n\,(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

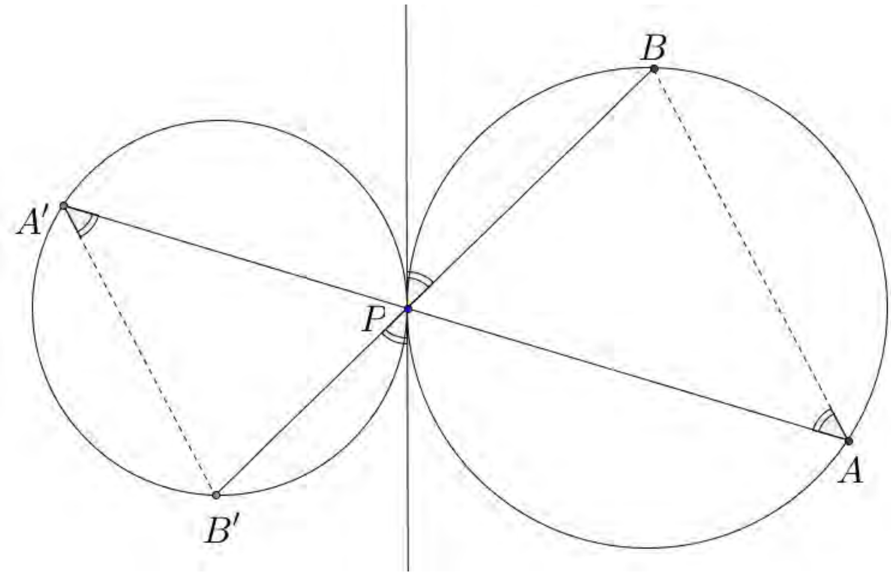
که این هم به سادگی قابل بررسی است:

$$\left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲ + n^۳ = \frac{n^۴ - ۲n^۳ + n^۲}{۴} = \left(\frac{n\,(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۵. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ در P مماس خارجی باشند. دو قاطع گذرا از P، به ترتیب $C_۱$ را در A و B، و $C_۲$ را در A' و B' قطع می‌کند(برای بار دوم). در این صورت دو مثلث ABP و $A'B'P$ متشابه هستند.



اثبات.

مماس مشترک دو دایره در P را رسم می‌کنیم. در این صورت زاویه‌ی $\angle PAB$ با زاویه‌ی ظلی به رأس P که مربوط به کمان BP است برابر است.(کمانی که شامل A نیست.) این زاویه‌ی ظلی با زاویه‌ی ظلی مربوط به کمان $B'P$ در C_2 با رأس P متقابل به رأس است و لذا با هم برابر هستند. در نهایت این زاویه‌ی ظلی جدید هم با زاویه‌ی $\angle PA'B'$ که روبه‌رو به همین کمان است برابر است. پس در کل $\angle PA'B' = \angle PAB$. با استدلال کاملاً مشابه $\angle PBA = \angle P'B'A'$ و بنابراین حکم اثبات می‌شود. $\square$

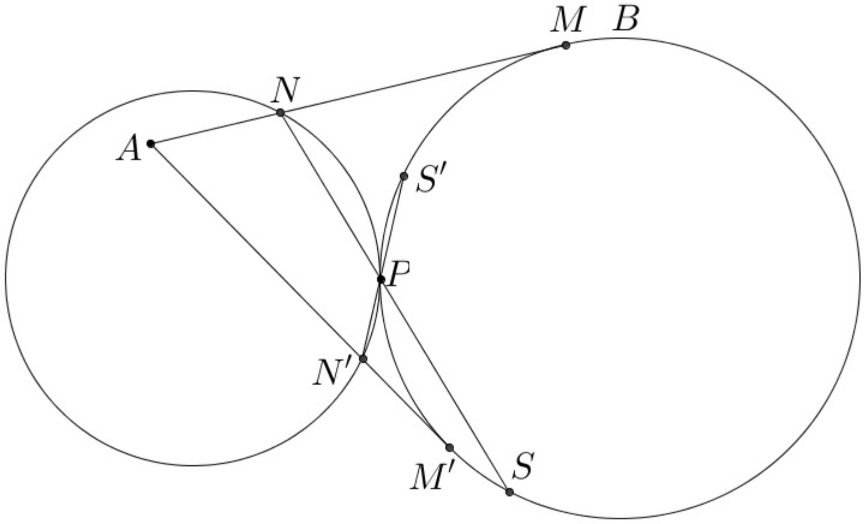
فرض کنید S و S' به ترتیب، محل تقاطع دوم NP و $N'P$ با دایره‌ی C_2 باشند. در این صورت با توجه به این که $N'M'$ و NM بر C_2 مماس هستند، برای قوت N و N' نسبت به C_2 می‌توان نوشت:

$$NM^2 = NP.NS, \quad N'M'^2 = N'P.N'S'$$

حال دقت کنید که طبق لم بالا دو مثلث PSS' و PNN' متشابه هستند و لذا $\frac{N'P}{PS'} = \frac{NP}{PS}$ که این نتیجه می‌دهد $\frac{N'P}{N'S'} = \frac{NP}{NS}$. حال با ترکیب این نتایج داریم:

$$\left(\frac{NM}{N'M'}\right)^2 = \frac{NM^2}{N'M'^2} = \frac{NP}{N'P}.\frac{NS}{N'S'} = \frac{NP}{N'P}.\frac{NP}{N'P} = \left(\frac{NP}{N'P}\right)^2$$

در نهایت گرفتن جذر از دو طرف حکم را نتیجه می‌دهد.



۶. برای حل سؤال ابتدا دو لم را ثابت می‌کنیم:

لم ۱. اگر n عددی طبیعی باشد و $۶n$ چاپ شود، n نیز چاپ می‌شود.

اثبات. اثبات کاملاً سرراست است.
بین سه عدد $۲n$، $۴n$ و $۶n$، عدد $۶n$ چاپ شده است، پس $۲n$ و $۴n$ چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد $۳n$، $۶n$ و $۹n$، عدد $۶n$ چاپ شده است، پس $۳n$ و $۹n$ چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد n، $۲n$ و $۳n$، عددهای $۳n$ و $۲n$ چاپ نمی‌شوند، پس n باید چاپ شود.

□

لم ۲. اگر n عددی طبیعی باشد و $۲n$ چاپ شود، $۸n$ چاپ نمی‌شود ولی $۱۶n$ چاپ می‌شود.

اثبات. اثبات این لم هم مشابه لم قبلی است.
بین سه عدد n، $۲n$ و $۳n$، عدد $۲n$ چاپ شده است، پس n و $۳n$ چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد $۲n$، $۴n$ و $۶n$، عدد $۲n$ چاپ شده است، پس $۴n$ و $۶n$ چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد $۳n$، $۶n$ و $۹n$، عددهای $۳n$ و $۶n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۹n$ باید چاپ شود.
بین سه عدد $۹n$، $۱۸n$ و $۲۷n$، عدد $۹n$ چاپ شده است، پس $۱۸n$ و $۲۷n$ چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد $۶n$، $۱۲n$ و $۱۸n$، عددهای $۶n$ و $۱۸n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۱۲n$ باید چاپ شود.
بین سه عدد $۴n$، $۸n$ و $۱۲n$، عدد $۱۲n$ چاپ شده است، پس $۴n$ و $۸n$ چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد $۱۲n$، $۲۴n$ و $۳۶n$، عدد $۱۲n$ چاپ شده است، پس $۲۴n$ و $۳۶n$ چاپ نمی‌شوند.
بین سه عدد $۸n$، $۱۶n$ و $۲۴n$، عددهای $۸n$ و $۲۴n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۱۶n$ باید چاپ شود.

□

حال در مورد مسئله‌ی اصلی به برهان خلف فرض کنید $۱۳۸۲۴ = ۲^۹ \times ۳^۳$ چاپ شود. با سه بار استفاده از لم ۱ این نتیجه می‌دهد که باید عدد ۶۴ هم چاپ بشود. از طرف دیگر با توجه به این که ۲ چاپ شده است، طبق لم ۲ عدد ۱۶ هم باید چاپ شود. استفاده‌ی دوباره از لم ۲ نتیجه می‌دهد که $۶۴ = ۴ \times ۱۶$ چاپ نمی‌شود که با صحبت‌های بالا متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که ۱۳۸۲۴ نباید چاپ بشود.