به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۶

۱. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

با توجه به اینکه مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است، اگر یکی از زوایا بیش‌تر یا مساوی ۶۲ درجه باشد مجموع دو زاویه دیگر کم‌تر یا مساوی ۱۱۸ درجه شده، که مستوجب این است که یکی از زوایا کم‌تر یا مساوی ۵۹ درجه شود.

۲. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

عوامل اول کوچک‌تر از ۱۵ عبارتند از ۲و۳و۵و۷و۱۱و۱۳ (شش عامل). از طرف دیگر با توجه به اینکه این اعداد نباید بر هیچ عدد مکعب کاملی بخش‌پذیر باشند، پس نمای این عوامل باید کم‌تر از ۳ باشد (۰و۱و۲). چرا که در غیر این صورت آن عامل اول به توان ۳ عددی مکعب کامل بوده که عدد مذکور را می شمارد. بدین ترتیب تعداد اعداد برابر است با $۳^۶$ یعنی ۷۲۹.

۳. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

دقت کنید از آنجا که حاصل قدر مطلق یک عدد همواره نامنفی است، پس $|a| \geq ۰$ در نتیجه $|a| + ۳ > ۰$ بنابر این $||a| + ۳| = |a| + ۳$.پس :

$$۱ = \left|۲ - \left||a| + ۳\right|\right| = |۲ - (|a| + ۳)| = \left|-۱ - |a|\right| = \left|۱ + |a|\right|$$

حال با توجه به رابطه ی $\left|۱ + |a|\right| = ۱$ و این که $|a| + ۱$ مثبت است داریم::

$$\left|۱ + |a|\right| = |a| + ۱ = ۱ \Rightarrow |a| = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

پس مسئله تنها دارای یک جواب است.

۴. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۰۰۰ برابر است با $۲^۳\times۵^۳$. بنابر این ارقام عدد مورد نظر یا ۱ یا ۲ یا ۵ هستند. اگر عدد مورد نظر دارای رقم ۱ بود، می توان آن را حذف کرد، پس به عددی کوچک‌تر با شرایط مذکور دست خواهیم یافت. پس تنها باید از رقم‌های ۲و۵ استفاده کنیم. در نتیجه با توجه به اینکه می‌خواهیم کم‌ترین ارقام را داشته باشیم (چراکه عددی که دارای رقم‌های بیش‌تر است، بزرگ‌تر است) پس ارقام عبارتند از ۵و۵و۸ که مجموعشان ۲۳ است.

۵. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

M, L را به ترتیب محل برخورد DE, AK و BE, CD در می‌نظر گیریم

$$\angle CBE = ۹۰ - \angle ECB = ۳۰ \Rightarrow DE || CB$$

$$BKM \sim ELM \Rightarrow \frac{EL}{BK} = \frac{ME}{MB} (I)$$

$$BCM \sim EDM \Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{DE}{BC} (II)$$

$$\text{قضیه تالس} \Rightarrow \begin{cases} \frac{EL}{CK} = \frac{AE}{AC} \\ \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{EL}{CK} (III)$$

$$\xRightarrow{I,II,III} \frac{EL}{BK} = \frac{EL}{CK} \Rightarrow BK = CK \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{۱}{۲}$$

۶. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

اگر در یک مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم، ارقام باید ۲و۱ باشند. پس اعداد ۱۲ و ۲۱ می‌باشند.

حال فرض کنید در دو مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم. پس حاصل‌ضرب ارقام یا به ۱۲ رسیده یا به ۲۱.(چرا که حاصل‌ضرب ارقام هر عدد دو رقمی، خود عددی حداکثر دو رقمی است) در این حالت باید این دو عدد را به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی بنویسیم. لذا داریم:

اعداد ۳۴ و ۴۳ به ۱۲ می‌رسند.⇐۴×۳=۱۲

اعداد ۲۶ و ۶۲ به ۱۲ می‌رسند.⇐۶×۲=۱۲

اعداد ۳۷ و ۷۳ به ۲۱ می‌رسند⇐۷×۳=۲۱

تا اینجا ۸ عدد حاصل شده است. اکنون با توجه به اینکه هیچکدام از ۶ عدد مرحله قبل را نمی‌توان به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی نوشت، پس حالت دیگری نمی‌ماند و کار خاتمه یافته است.

۷)گزینه ۵

۱×۲×۳×۴ یعنی ۲۴ عدد داریم که رقم اولشان ثابت باشد. به همین ترتیب ۱×۲×۳ یعنی ۶ عدد نیز داریم که ۲ رقم اولشان ثابت باشد. رقم اول از سمت چپ عدد ۳ است بنابراین ۲۴×۲ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم(اعدادی که رقم اولشان ۲و۱ بوده) برای رقم دوم از سمت چپ که رقم ۲ می‌باشد نیز ۶ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. پس ۵۴ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. از میان سه رقم باقی‌مانده هم به ترتیب ۱۴۵و۱۵۴و۴۱۵و۴۵۱ یعنی ۴ عدد دیگر باید جلو برویم. پس ۳۲۴۵۱، ۵۸ امین عدد است.

۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مرکز دایره است.O

$$\begin{cases} AA' \perp OA, BB' \perp OB \\ OA = OB \\ AA' = BB' \end{cases} \Rightarrow OAA' = OBB' \Rightarrow \begin{cases} OA' = OB'(I) \\ \angle AOA' = \angle BOB'(II) \end{cases}$$

$$\angle A'OB' = \angle A'OA + \angle AOB'(III)$$
$$\angle AOB = \angle B'OB + \angle AOB'(IV)$$

(اگر دو مثلث $A'OA$ و $B'OB$ هم پوشانی داشته باشند، علامت جمع فوق، علامت تفریق خواهد شد)

$$\xrightarrow{II,III,IV} \angle A'OB' = \angle AOB(V)$$
$$\overset{I}{\Rightarrow} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}(VI)$$
$$\xrightarrow{V,VI} AOB \sim A'OB'$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB} , \frac{C'A'}{CA} = \frac{OC'}{OC}$$
$$\Rightarrow ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \angle B'A'C' = \angle BAC = ۸۰$$

۹. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$a = \frac{n(n+۱)}{۲}$$
$$b = \frac{m(m+۱)}{۲}$$
$$a - b = ۱۰۱$$
$$\Rightarrow a - b = \frac{(n-m)(n+m+۱)}{۲}$$
$$\Rightarrow (n-m)(n+m+۱) = ۲۰۲ = ۲ \times ۱۰۱$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} n - m = ۱ \\ n + m + ۱ = ۲۰۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = ۱۰۱ \\ m = ۱۰۰ \end{cases} \\ \begin{cases} n - m = ۲ \\ n + m + ۱ = ۱۰۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = ۵۱ \\ m = ۴۹ \end{cases} \end{matrix}$$

پس دو دسته جواب دارد.

۱۰. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

اگر n عددی طبیعی باشد،در میان $\binom{n}{n}, \dots, \binom{n}{۲}, \binom{n}{۱}, \binom{n}{۰}$، بزرگ‌ترین اعداد $\binom{n}{\lceil \frac{n}{۲} \rceil}, \binom{n}{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}$ می باشند.

پس بزرگ‌ترین ضریب $\binom{۱۰۰}{۵۰}$ می باشد.

$$\binom{۱۰۰}{۵۰} = \frac{۱۰۰!}{۵۰!\,۵۰!} = \frac{۱۰۰ \times ۹۹ \times \dots \times ۱}{(۵۰ \times ۴۹ \times \dots \times ۱)^{۲}}$$

$$= ۲^{۵۰} \frac{۹۹ \times ۹۷ \times \ldots \times ۱}{۵۰ \times ۴۹ \times \ldots \times ۱} < ۲^{۵۰} \frac{۱۰۰}{۵۰} \times \frac{۹۸}{۴۹} \times \ldots \times \frac{۲}{۱} < ۲^{۵۰} \times ۲^{۵۰} = ۲^{۱۰۰}$$

$$= ۲ \times (۲^{۳})^{۳۳} < ۲ \times ۱۰^{۳۳} < ۱۰^{۳۴}$$

برای طرف دیگر داریم:

$$\binom{۱۰۰}{۵۰} = ۲^{۵۰} \frac{۹۹ \times ۹۷ \times \ldots \times ۱}{۵۰ \times ۴۹ \times \ldots \times ۱} = ۲^{۵۰} \times \frac{۹۹}{۴۹} \times \frac{۹۷}{۴۸} \times \ldots \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۱}{۵۰}$$

$$> ۲^{۵۰} \times \frac{۹۸}{۴۹} \times \frac{۹۶}{۴۸} \times \ldots \times \frac{۲}{۱} \times \frac{۲}{۱۰۰} = ۲^{۵۰} \times ۲^{۴۹} \times ۲ \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۲^{۱۰۰}}{۱۰۰}$$

$$= \frac{(۲^{۱۰})^{۱۰}}{۱۰۰} > \frac{(۱۰^{۳})^{۱۰}}{۱۰۰} = ۱۰^{۲۸}$$

۱۱. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هر قطعه از آن اول است، پس هر قطعه از آن نیز باید بسیار اول باشد. پس دو رقم سمت چپ آن نیز بسیار اول است. حال در صورتیکه با ۲۳ شروع شود، رقم سوم باید ۷ باشد زیرا ۳۷ تنها عدد بسیار اولی است که با ۳ آغاز می‌شود. به همین منوال، تنها اعدادی که می‌توانند بسیار اول باشند عبارتند از: ۲۳۷و ۳۷۳و۵۳۷و۷۳۷ . خود این اعداد نیز باید اول باشند که از این اعداد تنها ۳۷۳ اول است.(دو تا بر ۳ و دیگری بر ۱۱ بخش‌پذیر است)

۱۲. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هیچ یک از احزاب بیش از نصف رای نیاورده است، پس حداکثر تعداد نمایندگان هر حزب ۱۴۲ نفر است. حال اگر از حزب اول ۱۴۲ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموعا از حزب دوم و سوم ۱۴۳ نفر رای آورده‌اند که تعداد آراء حزب دوم از ۱ تا ۱۴۲ می‌تواند باشد(آراء حزب سوم خود به خود تعیین می‌شود.).اگر از حزب اول ۱۴۱ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموع آراء دو حزب دیگر ۱۴۴ رای می‌شود و حزب دوم می‌تواند از ۲ تا ۱۴۲ باشد(زیرا اگر ۱ رای داشته باشد حزب سوم ۱۴۳ رای دارد که بیش از نصف است).به همین ترتیب هر بار تعداد حالات یکی کم‌تر می‌شود. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$۱۴۲ + ۱۴۱ + \cdots + ۱ = \frac{۱۴۲ \times ۱۴۳}{۲} = ۱۰۱۵۳$$

۱۳. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$x - ۱ = yz \Rightarrow x - yz = ۱(I)$$
$$y - ۱ = zx \Rightarrow y - zx = ۱(II)$$
$$\overset{I,II}{\Rightarrow} x - yz = y - zx \Rightarrow x + zx = y + yz \Rightarrow x(۱ + z) = y(۱ + z) \overset{z \neq -۱}{\Longrightarrow} x = y$$

به طریق مشابه اگر $x \neq -۱$ خواهیم داشت $y = z$.پس $x = y = z$.در نتیجه $x - ۱ = x^۲$ که در این حالت جواب حقیقی نداریم.اگر $x = -۱$ در نتیجه $x = y = -۱$ در نتیجه $z - ۱ = ۱$ پس $z = ۲$ که سه تایی $(-۱, -۱,۲)$ در معادله صدق می کند.حال اگر یکی از x, y, z برابر -۱ نباشد،همانند فوق تنها جواب این است که آن مجهول ۲ بوده و دوتای دیگر -۱ باشند.پس بدین ترتیب ۳ جواب زیر را داریم:

$$(-۱, -۱,۲), (-۱,۲, -۱), (۲, -۱, -۱)$$

پس اگر حداقل یکی از مجهولات مخالف -۱ باشد جواب‌ها به صورت فوق خواهند بود. تنها می‌ماند اینکه همه -۱ باشند که این به وضوح جواب نیست. پس ۳ جواب داریم.

۱۴. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

ابتدا به این توجه می‌کنیم که معادله زیر چند جواب مختلف دارد:

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = k, x_i \geq ۱$$

برای حل به این نکته دقت می‌کنیم که حل این معادله به منزله این است که k شی مشابه را به n قسمت افراز کنیم. حال فرض کنید که این k شی کنار هم قرار گرفته‌اند حال برای افراز این اشیاء ،تعداد $n - ۱$ جداکننده بین این اشیاء قرار می‌دهیم. بین این k شی، $k - ۱$ جا برای قرار دادن این جداکننده‌ها وجود دارد.پس پاسخ عبارتست از:

$$\binom{k-۱}{n-۱}$$

حال می‌خواهیم این ۵ مهره‌ی سیاه به ۳ قسمت افراز کنیم که این کار را می‌توان به ۶ حالت انجام داد. اما برای قرار دادن مهره‌های سفید می‌دانیم که این مهره‌ها را در ۴ جا (قبل از قسمت اول مهره‌های سیاه، بین قسمت اول و دوم، بین قسمت دوم و سوم و بعد از قسمت سوم) می‌توان قرار داد. به طوری که حتما بین قسمت اول و دوم و قسمت دوم و سوم، حداقل یک مهره سفید قرار داشته باشد. بنابراین داریم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۵; x_۱, x_۴ \geq ۰; x_۲, x_۳ \geq ۱$$

که با شرایط مطلوب ما اندکی تفاوت دارد. برای حل این مشکل ترفندی به کار می‌گیریم:

$$x'_۱ = x_۱ + ۱; x'_۴ = x_۴ + ۱$$
$$\Rightarrow x'_۱ + x_۲ + x_۳ + x'_۴ = ۷; x'_۱, x_۳x_۲, x'_۴ \geq ۱$$

که شرایط مطلوب ماست. بنابراین پاسخ مساله عبارتست از:

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۶}{۳} = ۶ \times ۲۰ = ۱۲۰$$

۱۵. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

با توجه به اینکه عدد فقط عامل ۲ دارد، پس همه ۵ عدد توانی از ۲ هستند. داریم:

$$۲^{۲۷۶} \times ۲^{۲۷۶} \times ۲^{۲۷۷} \times ۲^{۲۷۸} \times ۲^{۲۷۹} = ۲^{۱۳۸۶}$$
$$۲^{۲۷۶} + ۲^{۲۷۶} + ۲^{۲۷۷} + ۲^{۲۷۸} + ۲^{۲۷۹} = ۲^{۲۷۶}(۱ + ۱ + ۲ + ۴ + ۸) = ۲^{۲۸۰}$$

که بیش‌ترین گزینه است.

۱۶. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\angle MAN = \angle M'AN' = ۳۳ \Rightarrow MN = M'N'$$

P و P' را به ترتیب وسط MN و $M'N'$ می‌نامیم و O مرکز دایره است.

$$\begin{cases} \angle MON = \angle M'ON' = ۶۶ \\ MO = M'O \\ NO = N'O \end{cases} \Rightarrow MON = M'ON' \Rightarrow \begin{cases} OP = OP' \\ OP \perp MN, OP' \perp M'N' \end{cases}$$

پس وترها همگی از وسط به دایره‌ای به مرکز O مماسند.

۱۷. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$c = ۱ - a - b - d \Rightarrow A = ab + bc + cd = ab + (b+d)(۱ - a - b - d)$$
$$= -ad + (b+d)(۱ - b - d)$$

از طرفی با استفاده از نابرابری حسابی هندسی داریم:

$$(b+d)(۱ - b - d) \leq \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow A = -ad + (b+d)(۱ - b - d) \leq -ad + \frac{۱}{۴} \leq \frac{۱}{۴}$$

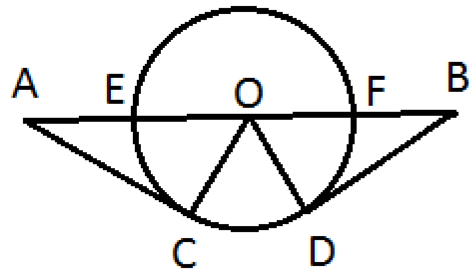
پس A کم‌تر مساوی با $\frac{۱}{۴}$ است و به ازای $a = d = ۰, b = c = \frac{۱}{۲}$ مقدار $\frac{۱}{۴}$ را اتخاذ می کند.

در نتیجه $\frac{۱}{۴}$ جواب مورد نظر است.

۱۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

بهترین مسیر آن است که به دریاچه مماس باشد. در این حالت داریم:

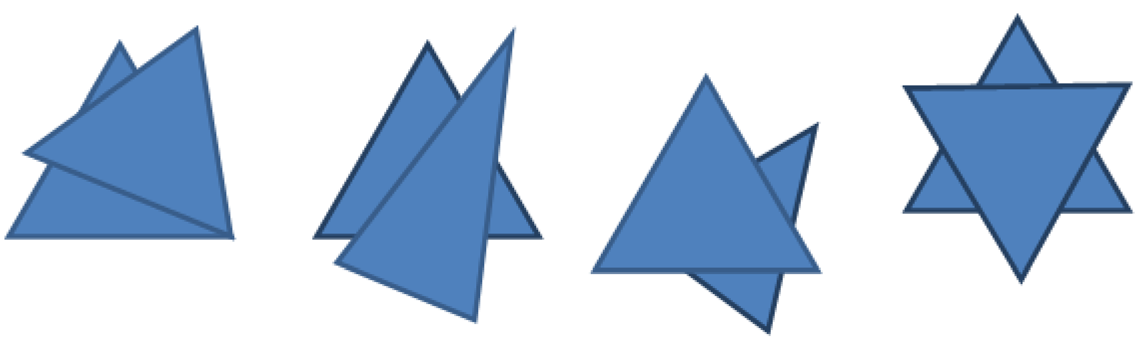
$$AB = ۴ \Rightarrow AO = ۲\,, OC = ۱$$
$$AC^۲ = AO^۲ - OC^۲ = ۴ - ۱ = ۳ \Rightarrow AC = \sqrt{۳}$$
$$OC = ۱, AO = ۲ \Rightarrow OC = \frac{۱}{۲}AO \Rightarrow \angle OAC = ۳۰ \Rightarrow \angle AOC = ۶۰ \Rightarrow \angle DOB = ۶۰$$
$$\Rightarrow \angle COD = ۶۰$$
$$\Rightarrow \text{کمان}\, DC = ۲\pi(\text{شعاع}) \times \frac{۶۰}{۳۶۰} = ۲\pi \times ۱ \times \frac{۱}{۶} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \qquad \text{جواب} = ۲\sqrt{۳} + \frac{\pi}{۳}$$



۱۹. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

اضلاع هر مثلث شامل وترهایی می‌شود که رئوس آن‌ها روی دایره‌اند. از طرفی می‌توان هر ضلع مثلث را با تعداد اضلاعی از ۱۰ ضلعی که میان دو راس آن ضلع قرار دارند،مقایسه کرد. پس مثلث‌ها به صورت زیر هستند: (۸و۱و۱)،(۷و۲و۱)،(۶و۳و۱)،(۵و۴و۱)،(۶و۲و۲)،(۵و۳و۲)،(۴و۴و۲)،(۴و۳و۳) (اعداد نشان‌گر تعداد اضلاعی از ۱۰ ضلعی هستند که میان دو راس مثلث قرار گرفته‌اند.)

۲۰. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



اشکال فوق مثال‌هایی برای ۱۲،۹،۱۰و۸ ضلع می‌باشند.

۲۱. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

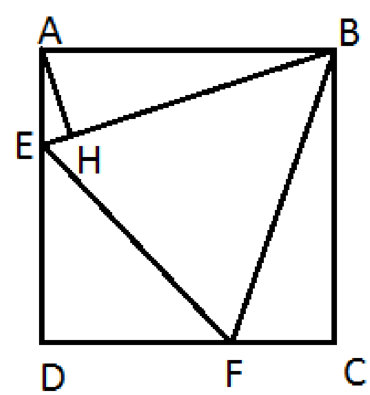
جعبه‌ها را از کوچک به بزرگ به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۶ شماره گذاری می‌کنیم. جعبه شماره ۵ به یک صورت درون جعبه۶ قرار می‌گیرد. حال برای قرار دادن جعبه ۴، دو حالت داریم، یکی درون جعبه ۵ و یکی بیرون آن. به همین ترتیب هر جعبه‌ای که اضافه می‌شود، یک فضا به فضاهای ممکن برای قرار دادن جعبه بعدی اضافه می‌کند. پس در کل ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰ حالت داریم.

۲۲. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$f(۰) \leq ۲ \Rightarrow b \leq ۲$$
$$f(۱) \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq a + b (I)$$
$$f(۲) \leq ۴ \Rightarrow ۲a + b \leq ۴ (II)$$
$$\xRightarrow{(I),(II)} a \leq ۴ \Rightarrow ۸a \leq ۳۲ \xRightarrow{(II)} ۱۰a + b \leq ۳۶ \Rightarrow f(۱۰) \leq ۳۶$$

حالت تساوی به ازای $a = ۴$ و $b = -۴$ حاصل می‌شود.

۲۳. گزینه‌ی ۵ صحیح است.



$$\begin{cases} \angle A = \angle C = ۹۰ \\ BE = BF \\ AB = BC \end{cases} \Rightarrow ABE = CBF \Rightarrow AE = CF \Rightarrow$$
$$DF = DE$$
$$\angle ABE = \angle CBF = \frac{۹۰ - ۶۰}{۲} = ۱۵ \Rightarrow AH = \frac{۱}{۴} BE$$
$$BE = BF = EF = l$$
$$DE = DF = \frac{\sqrt{۲}}{۲} l$$
$$S_{ABCD} = ۲S_{ABE} + S_{BEF} + S_{DEF}$$

$$\Rightarrow ۱ = AH.BE + \frac{\sqrt{۳}}{۴} BE^{۲} + \frac{۱}{۲} DE^{۲}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۴} l^{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۴} l^{۲} + \frac{۱}{۴} l^{۲} \Rightarrow l^{۲} = \frac{۴}{۲ + \sqrt{۳}}$$

$$S_{BEF} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} l^{۲} \Rightarrow S_{BEF} = \frac{\sqrt{۳}}{۲ + \sqrt{۳}}$$

۲۴. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

$$AB^{۲} + AD^{۲} = BD^{۲} \Rightarrow BD = \sqrt{۵}$$

H را پای ارتفاع Aمی گیریم

$$S_{ABCD} = AB \times AD = AH \times BD \Rightarrow AH = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$AP = AC = BD = \sqrt{۵}$$

$$AH^{۲} + PH^{۲} = AP^{۲} \Rightarrow PH = \sqrt{\frac{۲۱}{۵}}$$

$$PQ = ۲PH \Rightarrow PQ = \sqrt{\frac{۸۴}{۵}}$$

۲۵. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$۲^{x} + ۲x^{۲} = y^{۲}$$
$$x^{۲}, y^{۲} \in \mathbb{Z} \Rightarrow ۲^{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq ۰$$
$$x = ۰ \Rightarrow ۱ + ۰ = y^{۲} \Rightarrow y = \pm ۱$$

حال فرض کنید $x = ۲^{k}m$ که m عددی فرد است.

$$\Rightarrow ۲^{۲^{k}m} + ۲^{۲k+۱}m^{۲} = y^{۲}$$
$$m = ۱ \Rightarrow ۲^{۲^{k}} + ۲^{۲k+۱} = y^{۲}$$
$$(I)۲^{k} > ۲k + ۱ \Rightarrow ۲^{۲k+۱}\left(۲^{۲^{k}-۲k-۱} + ۱\right) = y^{۲}$$

چون $۲^{۲k+۱}$ و $۱ + ۲^{۲^{k}-۲k-۱}$ نسبت به هم اولند،پس هر دو باید مربع کامل باشند. اما $۲^{۲k+۱}$ نیست.

$$(II) ۲^k \leq ۲k + ۱ \Rightarrow k \leq ۲ \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow ۲ + ۲ = y^۲ \Rightarrow y = \pm ۲ \\ k = ۱ \Rightarrow ۴ + ۸ = y^۲ \text{در اعداد صحیح جواب ندارد} \\ k = ۲ \Rightarrow ۱۶ + ۳۲ = y^۲ \text{در اعداد صحیح جواب ندارد} \end{cases}$$

$$m \geq ۳ \Rightarrow ۲^k m \geq ۳ \times ۲^k > ۲k + ۱ (III)$$
$$\Rightarrow ۲^{۲k+۱} \left(۲^{۲^k m - ۲k - ۱} + m^۲ \right) = y^۲$$

که همانند بالا جواب نخواهد داشت(چون $۲^{۲^k m - ۲k - ۱} + m^۲$ فرد است). پس ۴ تا جواب داریم.

۲۶. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مرکز دایره را O می‌نامیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} OM_۱ \perp AD \\ OM_۲ \perp BC \\ OM_۳ \perp PQ \end{cases} \Rightarrow OM_۱M_۲N, OM_۱NM_۳ \text{محاطی}$$

با توجه به این که از هر سه نقطه یک دایره می‌گذرد.

$$\Rightarrow M_۱M_۲NM_۳ \text{ محاطی } \Rightarrow \angle M_۱M_۲M_۳ = \angle M_۱NM_۳ \Rightarrow\Rightarrow \angle M_۱M_۲M_۳ = ۴۰ \blacksquare$$

۲۷. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که این عدد حتما متناوب است. برای این کار کافیست ثابت کنیم که دو رقم اول پس از تعدادی مرحله به تکرار می‌افتد. حال برای یافتن دو رقم اول کافیست که عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم و باقی‌مانده همان دو رقم اول خواهد بود. فرض کنید ۱۰۱ مرحله گذشته باشد. با توجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به اینکه باقی‌مانده بر ۱۰۰ از ۰ تا ۹۹ (۱۰۰عدد) مختلف می‌تواند باشد، پس حداقل دو عدد یکسان در این ۱۰۰ عدد پیدا می‌شود. با توجه به اینکه هر بار در عدد ثابتی ضرب می‌کنیم لذا اعداد بعدی این دو نیز برابر خواهند بود و همین طور دو تای بعدیشان (منظور به هنگ ۱۰۰ آنهاست) و ... پس عدد اعشاری حتما متناوب است و با عنایت به این موضوع که این عدد اعشاری برای عدد ۲۰ متناوب مرکب و برای عدد ۱۰۰ متناوب ساده است، گزینه‌ی ۵ صحیح خواهد بود.

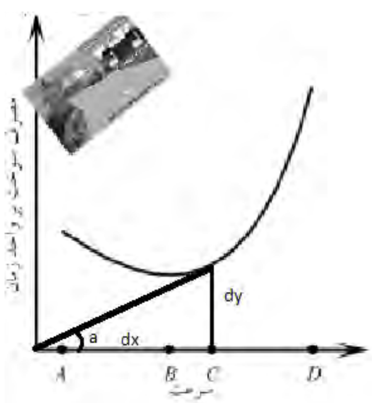
۲۸. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

دو وجه روبروی هم را در نظر بگیرید. فرض کنید اعداد این وجوه یکی a و دیگری b باشد. فرض کنید اعداد چهار وجه دیگر زمانی که از وجه با عدد a به مکعب می نگیریم، به ترتیب c, d, e, f باشد.در نتیجه مجموع اعداد رئوس روی وجه a برابر خواهد بود با $\mathrm{a(cd + de + ef + fc)}$.به طریق مشابه مجوع اعداد رئوس روی وجه با عدد b نیز$\mathrm{b(cd + de + ef + fc)}$ خواهد بود. پس مجموع اعداد رئوس مکعب برابر است با= ۲۳۱

$$(a + b)(c + e)(d + f) = (a + b)(cd + de + ef + fc)$$

از طرفی با توجه به اینکه ۲۳۱ برابر ۱۱×۷×۳ است و اینکه مجموع اعداد دو وجه مقابل از ۱ بیش‌تر است، مجموع اعداد وجوه مقابل ۳ و ۷ و ۱۱ خواهد بود. پس مجموع اعداد وجوه مکعب برابر ۱۱+۷+۳ یعنی ۲۱ خواهد بود.

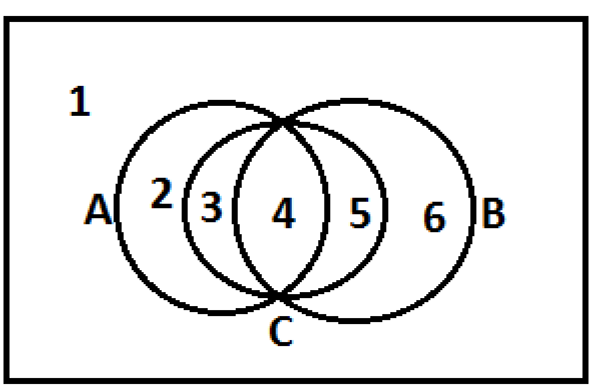
۲۹. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



با توجه به اینکه نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی(تانژانت زاویه) نشان‌گر مصرف سوخت بر مسافت است با عنایت به این موضوع که ما می‌خواهیم این مقدار به حداقل برسد(با توجه به شکل) بنابراین نقطه سوم به‌ترین نقطه می‌باشد.

$$\tan a = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\text{مصرف سوخت}}{\text{زمان}}}{\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}} = \frac{\text{مصرف سوخت}}{\text{مسافت}}$$

۳۰. گزینه‌ی ۵ صحیح است.



سه مجموعه‌ی مورد نظر به صورت ذیل می‌باشند و هر کدام از اعداد در یکی از ۶ جای اشاره شده در شکل می‌توانند باشند. پس پاسخ $۶^۵$ برابر ۷۷۷۶ خواهد بود.