

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۵

روز اول

۱. فرض کنید دایره‌ی C_2 از مرکز دایره‌ی C_1 گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دل‌خواهی از C_1 و A' و B' محل تقاطع خط‌های AM و BN با دایره‌ی C_2 باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره است.

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی $P(x, y)$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$P(x + y, x - y) = 2P(x, y)$$

۳. در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل رؤیت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره ($k > 1$)، دست‌کم دو تایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم $k - 1$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی را که ستاره‌ی i ام در آسمان دیده می‌شود بازه‌ی بسته‌ی $[a_i, b_i]$ بنامید که در آن $a_i < b_i$).

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۵

روز دوم

۴. الف) عدد طبیعی m بزرگ‌تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $1 + mn$ بر $m + n$ بخش پذیر است.

ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m, n > 2$ ثابت کنید دنباله‌ی (a_0, a_1, \dots, a_k) از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ موجود است که $a_0 = m$ و $a_k = n$ و برای هر $(i = 0, 1, \dots, k-1)$ داریم

$$a_i + a_{i+1} \mid a_i a_{i+1} + 1$$

۵. نقاط A, B, C و D با همین ترتیب، روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M که $\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$ چهار تاست و به علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمود هستند.

۶. تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند. سپس دو کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند. بعد سه کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند و الی آخر. پس از این که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعداد جابه‌جایی، کتاب‌ها دقیقاً به همان وضع اول برمی‌گردند.

