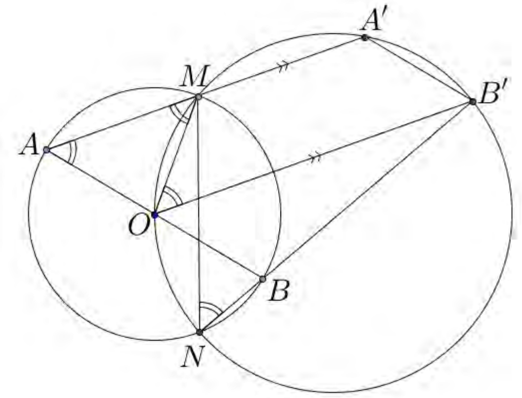
به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۵

---

۱. مرکز دایره‌ی $C_۱$ را O نام‌گذاری کنید. کافی است نشان دهیم $MA' \parallel OB'$. زیرا در این صورت چهارضلعی محاطی با رئوس M، O، A' و B' یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین خواهد بود و در نتیجه‌ی آن $MO = A'B'$ و حکم ثابت می‌شود. برای اثبات توازی MA' و OB' هم داریم:

$$\angle OMA = \angle OAM = \angle BAM = \angle BNM = \angle B'NM = \angle B'OM \Rightarrow B'O \parallel MA'$$



۲. با دو مرتبه استفاده از فرض مسئله داریم:

$$P(x,y) = ۲P(\tfrac{x+y}{۲}, \tfrac{x-y}{۲}) = ۴P(\tfrac{\frac{x+y}{۲}+\frac{x-y}{۲}}{۲}, \tfrac{\frac{x+y}{۲}-\frac{x-y}{۲}}{۲}) = ۴P(\tfrac{x}{۲}, \tfrac{y}{۲})$$

حال دقت کنید که اگر ضریب جمله‌ی x^iy^j در $P(x,y)$ برابر A باشد، ضریب آن در $۴P(\frac{x}{۲}, \frac{y}{۲})$ برابر $۴A \times ۲^{-i-j}$ است و بنابراین در جملات با ضریب ناصفر باید $i+j = ۲$ باشد، یعنی $P(x,y)$ می‌تواند شامل سه جمله‌ی $x^۲$، $y^۲$ و xy باشد.

اگر $P(x,y) = ax^۲ + bxy + cy^۲$، با توجه به رابطه‌ی صورت مسئله خواهیم داشت:

$$۲P(x,y) = ۲ax^۲ + ۲bxy + ۲cy^۲ = P(x+y, x-y) = (a+b+c)x^۲ + ۲(a-c)xy + (a+c-b)y^۲$$

پس $a+b+c = ۲a$، $۲(a-c) = ۲b$ و $a+c-b = ۲c$ که از هر سه نتیجه می‌شود $a = b+c$ پس چندجمله‌ای جواب باید به فرم $P(x,y) = (b+c)x^۲ + bxy + cy^۲$ باشد که به راحتی می‌توان چک کرد که این چندجمله‌ای در صورت مسئله صرق می‌کند.

۳. حکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. پایه‌ی استقرا در پایان ثابت می‌کنیم. برای گام استقرا فرض کنید $b_۱$ کوچک‌ترین عدد در بین b_iها باشد. ادعا می‌کنیم اگر ستاره‌ی مربوط به بازه‌ی $[a_۱, b_۱]$(که آن را در طول راه‌حل ستاره‌ی ۱ می‌نامیم) و همه‌ی ستاره‌هایی که با آن لحظه‌ای در آسمان دیده شده اند را در نظر نگیریم، فرض مسئله برای ستاره‌های باقی‌مانده و $k-۱$ برقرار است. برای این منظور $k-۱$ ستاره‌ی دل‌خواه را از بین ستاره‌هایی در نظر بگیرید که در هیچ لحظه‌ای با ستاره‌ی ۱ در آسمان نبوده‌اند. این $k-۱$ ستاره به همراه ستاره‌ی ۱، k ستاره هستند، پس طبق فرض مسئله لحظه‌ای وجود دارد که دو تا از

آن‌ها در آسمان با هم دیده می‌شوند. دقت کنید که ستاره‌ی ۱ نمی‌تواند در بین این دو ستاره باشد، پس در نهایت در بین $k-1$ ستاره‌ی اولیه دو ستاره یافت می‌شدند که در یک زمان در آسمان ظاهر بودند و فرض مسئله برای $k-1$ برقرار است. حال طبق استقرا می‌توان $k-2$ عکس گرفت به طوری که همه‌ی ستاره‌هایی که با ستاره‌ی ۱ در آسمان دیده نشده‌اند دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شوند. حال اگر در لحظه‌ی b_1 هم عکسی بگیریم، همه‌ی ستاره‌هایی که با ستاره‌ی ۱ اشتراک دارند در این عکس دیده می‌شوند، چرا که b_1 کوچک‌ترین مقدار در بین b_iها فرض شده بود و لذا هر بازه‌ی دیگری که با $[a_1, b_1]$ اشتراک دارد، باید شامل b_1 باشد.

در مورد پایه‌ی استقرا، استدلال قسمت پایانی بند بالا کار می‌کند. در این حالت هم فرض کنید b_1 کوچک‌ترین عدد در بین b_iها باشد. از آن‌جا که طبق فرض استقرا در این حالت بازه‌ی حضور هر دو ستاره در آسمان با هم اشتراک دارند، پس باید بازه‌ی حضور هر ستاره‌ی دیگری شامل b_1 باشد و بنابراین اگر در این لحظه (b_1) عکسی بگیریم همه‌ی ستاره‌ها در آن دیده می‌شوند.

۴. الف.

$$\left.\begin{array}{l} m+n\,|mn+1 \\ m+n\,|m^2+nm \end{array}\right\} \Rightarrow m+n\,|m^2-1$$

پس $m+n$ باید مقسوم‌علیه m^2-1 باشد. اما m^2-1 تنها متناهی مقسوم‌علیه دارد و لذا متناهی عدد این‌چنینی یافت می‌شوند.

ب. راه‌حل اول. ابتدا دقت کنید که اگر m و n دو عدد فرد متوالی باشند، آن‌گاه $m+n|mn+1$. با توجه به متقارن بودن رابطه می‌توان فرض کرد $n > m$. در این صورت به راحتی می‌توان چک کرد که دنباله‌ی

$$(m, m^2-m-1, 2m+1, 2m+3, \dots, 2n+1, n^2-n-1, n)$$

شرط مسئله را برآورده می‌کند.

راه‌حل دوم. این راه‌حل هم کاملاً مشابه راه‌حل قبلی است. تنها دقت کنید که اگر $3 \le m < n$، آن‌گاه $m^2-m-1 < n^2-n-1$. پس می‌توان به راحتی دید که دنباله‌ی

$$(m, m^2-m-1, m^2-m+1, m^2+m+3, \dots, n^2-n-3, n^2-n-1, n)$$

هم شرایط مسئله را دارد.

۵. برای حل این مسئله ابتدا یک لم معروف را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید مثلثی با اضلاع به طول a، b و c، دارای مساحت S بوده و شعاع دایره‌ی محیطی آن برابر R باشد. نشان دهید که $4RS = abc$.

اثبات. فرض کنید A زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع a باشد، در این صورت با توجه به قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} \Rightarrow 4RS = abc$$

□

حال در مسئله‌ی اصلی فرض کنید L محل تقاطع AC و BD باشد. M را نقطه‌ای دل‌خواه روی دایره بگیرید. طبق لم بالا در مثلث‌های AMC و BMD داریم: (شعاع دایره را برابر R گرفتیم و مساحت مثلث‌ها را با S نمایش می‌دهیم.)

$$MA.MC.AC = ۴R.S_{AMC},\ MB.MD.BD = ۴R.S_{BMD}$$

اگر نقطه‌ی M در شرط مسئله صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$MA.MC = MB.MD \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{AC}{BD}$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو پاره‌خط AC و BD باید برابر باشد و در نتیجه باید روی نیم‌ساز یکی از چهار زاویه‌ای که دو خط AC و BD با ایجاد می‌کنند، واقع است. حال دقت کنید که این چهار نیم‌ساز دایره را در ۴ نقطه قطع می‌کنند که به راحتی با توجه به نتایج بالا می‌توان چک کرد این چهار نقطه، همان ۴ نقطه‌ی خواسته شده در صورت مسئله هستند.

۶. تعداد کتاب‌ها را برابر n بگیرید. دقت کنید که ترتیب کتاب‌ها حداکثر $n!$ حالت مختلف می‌تواند به خود بگیرد. به علاوه با توجه به این که هر کتاب دو وضعیت می‌تواند داشته باشد حداکثر $۲^n n!$ آرایش مختلف برای کتاب‌ها محتمل است. بعد از n، $۲n$، $۳n$ و ... جابه‌جایی وضعیت کتاب‌ها را نگاه کنید. چون تعداد این مرحله‌ها نامتناهی است و تعداد آرایش‌های ممکن کتاب‌ها متناهی دو مرحله‌ی مختلف هستند که آرایش کتاب‌ها در آن‌ها یکسان است. توجه کنید که اگر در آرایش کتاب‌ها را در یک مرحله بدانیم، آرایش کتاب‌ها در n مرحله قبل با برعکس انجام دادن عمل‌ها تعیین می‌شود. پس با توجه به دو مرحله‌ای که وضعیت کتاب‌ها یکسان است و با برگشت به عقب می‌توان به مرحله‌ای رسید که وضعیت کتاب‌ها همان وضعیت اولیه‌شان باشد.