به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۵

کد سوالات: ۲

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر فرض ارقام سمت چپ دو عدد $CAAB$ و $ACBC$ متفاوت هستند. پس لزوما $A = C + 1$.
همچنین با توجه به ردیف‌های اول و سوم از سمت راست می‌توان گفت که $A + B = 10 + C$.
از ردیف دوم (از سمت راست) هم می‌توان متوجه شد که $2 \times A + 1 = B$. حال به راحتی می‌توان این سه رقم را مشخص کرد.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر a و b طول و عرض مستطیل مفروض باشد:

$$ab + 2(a + b) = 140 \text{ و } (a + b)^2 - 4ab \geq 0 \Rightarrow$$

$$ab + 4\sqrt{ab} \leq 140 \Rightarrow \left(\sqrt{ab} + 2\right)^2 \leq 144 \Longrightarrow ab \leq 10$$

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اشعه‌های نوری نواحی دایره شکل روی پرده ایجاد می‌کنند که شعاع آن‌ها بنابر رابطه‌ی تالس، به دست خواهد آمد. در نتیجه شعاع دایره‌ی تشکیل شده در پرده‌ی سمت چپ برابر دو برابر شعاع استوانه و در پرده دیگر چهار برابر شعاع استوانه است.

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

می‌دانیم $\overline{abab} = 101 \times \overline{ab}$ و ۱۰۱ عددی اول است. پس $\overline{ab}$، ۷ مقسوم علیه دارد و بنابر رابطه‌ی تعداد مقسوم علیه‌ها(تعداد مقسوم علیه‌های عدد به شکل $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ که $p_1, p_2, \cdots, p_k$ اعدادی اول هستند برابر است با$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$) می‌توان گفت که تنها عدد ۶۴ این خاصیت را داراست.

۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای رقم اول ۹ حالت ممکن است. برای رقم دوم هم با توجه به انتخاب رقم اول، ۹ حالت ممکن است. برای رقم سوم هم به همین ترتیب ۹ حالت ممکن است.

۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که پاره‌خط واصل بین دو نقطه یک خط را هنگامی قطع می‌کند که آن دو نقطه در دو طرف آن خط حضور داشته باشند. در این سوال در دو طرف خط بودن بدین معنا است که یکی دارای مولفه‌ی y منفی و دیگری دارای مولفه‌ی y مثبت باشد.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

دو خط هستند که یکی طول و دیگری عرض را نصف می‌کنند. همچنین دو خط موازی عرض مستطیل(یکی در سمت چپ و دیگری در سمت راست خط نصف‌کننده‌ی طول مستطیل که طول مستطیل را به نسبت $1:4$ تقسیم می‌کنند.) وجود دارند که این خاصیت را دارند.

۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر a تعداد پاسخ‌های صحیح و b تعداد پاسخ‌های نادرست او باشد، می‌دانیم

$4a - b = 89$ و $a + b \leq 30$ و $a, b \in \mathbb{N}$

پس تنها جواب‌های ممکن $a = 23$ و $b = 3$ است.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر الگوریتم غربال اراتستن، عددی که کوچک‌ترین مقسوم علیه اولش از سایر گزینه‌ها بیش‌تر باشد، دیرتر حذف می‌شود. کوچک‌ترین مقسوم علیه اول گزینه‌ها به ترتیب برابر $5, 3, 11, 41, 2$ است.

۱۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به وضوح در حالتی که دوتا از این اعداد مثبت هستند، حاصل‌ضرب منفی است. پس می‌توان فرض کرد که دو تا از این اعداد مانند x و y منفی هستند و z مثبت. حال می‌توان نشان داد که $xyz \leq \frac{z^3}{4}$.

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که $2^{2^5} \equiv 256^4 \equiv 36^2 \equiv 96 (mod\ 100)$.

۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

در حالتی که دو وجه آبی باشند، تنها دو حالت متفاوت داریم. یکی اینکه دو وجه روبرو باشند و دیگری آن که دو وجه آبی مجاور باشند. به همین ترتیب نیز دو حالت برای دو وجه قرمز داریم. اگر سه وجه آبی داشته باشیم نیز دو حالت برای آن‌ها ممکن است. یکی آن که سه وجه آبی در یک رأس مشترک باشند. در این حالت سه وجه قرمز نیز در رأس روبرو به این رأس مشترک هستند. یا این که دو وجه از این سه وجه روبه روی هم باشند و سومی بین این دو قرار بگیرد. دو حالت هم مربوط به زمانی است که تنها یک وجه آبی یا تنها یک وجه قرمز داشته باشیم.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$A \cap C = (B \cap C) \cup D \Longrightarrow A = (A \cap C) \cup A \backslash C = (B \backslash C) \cup \big((B \cap C) \cup D\big) \\ = B \cup D$$

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث باشد. اضلاع این مثلث در شرط فیثاغورس برای مثلث‌های قائم‌الزاویه صدق می‌کند. پس مثلث مذکور قائم‌الزاویه است. حال نقطه‌ی P را بر ضلع به طول ۳ تصویر کنید و نام نقطه را Q بگذارید. می‌توان نشان داد که مجموع فواصل Q از سه ضلع از این مجموع برای P کم‌تر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مجموع این فواصل برای رأس قائمه‌ی مثلث از Q کم‌تر است. پس کم‌ترین مجموع فواصل را رأس قائمه‌ی مثلث دارد.

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

این هشت وجهی در واقع از یک مربع به قطر ۱ و دو نقطه به فواصل $\frac{1}{2}$ از این مربع در بالا و پایین آن تشکیل شده است. در واقع اجتماع دو هرم مربع القاعده به سطح قاعده $\frac{1}{2}$ و ارتفاع $\frac{1}{2}$ است.

۱۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید H پای عمود از M بر AB باشد. اکنون با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث BMH، طول BM به راحتی محاسبه می‌شود. از طرفی در ذوزنقه AMND مساحت برابر است با $\frac{1}{4}(1+\mathrm{MN})$.

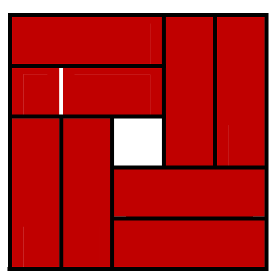
۱۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

بنابر شرط ماتریس A، اگر در سطر iام ماتریس ۱ داشته باشیم، در ستون iام نمی‌توانیم ۱ داشته باشیم و بالعکس. فرض کنید در t سطر درایه ۱ وجود داشته باشد. پس در t ستون هیچ درایه ۱ای وجود ندارد. پس حداکثر $\mathrm{t}(10-\mathrm{t}) \leq 25$ درایه ۱ می‌توانیم داشته باشیم. برای حالت تساوی هم ماتریسی را در نظر بگیرید که تمامی خانه‌های ربع بالا سمت راست آن ۱ باشد.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

طبق قضیه‌ی تالس اگر شعاع خواسته شده r باشد، $\frac{3}{5}=\frac{\mathrm{r}}{r+10}$.

۱۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.



۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به وضوح اگر x ریشه‌ی این معادله باشد، $\sin(24x)$ و $\sin(32x)$هر دو صفر باشند. به عبارتی ریشه‌ها هم به شکل $\frac{k\pi}{24}$ هستند و هم به شکل $\frac{l\pi}{32}$. اعداد مثبت بدین شکل که از π بیش‌تر نیستند، به صورت $\frac{m\pi}{8}$ هستند که m عددی صحیح است که $0 \leq \mathrm{m} \leq 8$.

۲۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

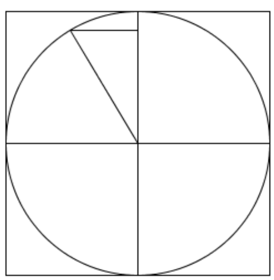
می‌دانیم $\ln 9 > 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{81^2 \times 2}$ و $\log e > \frac{1}{3}$ و $\log 9 = \log e \times \ln 9 > \frac{467}{486} > \frac{19}{20}$.

پس $20 \log 9 > 19$. همچنین به وضوح $20 \log 9 < 20$. پس 9^{20} عددی ۲۰ رقمی است.

۲۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در واقع باید ۱۱ ستون دارای خانه‌ی سیاه باشند، زیرا در یک ستون نمی‌توانیم دو خانه‌ی سیاه داشته باشیم. پس در اول ما یک ستون را انتخاب می‌کنیم که فاقد خانه سیاه است. اگر این ستون یکی از دو ستون کناری جدول باشد، خانه‌های دیگر دقیقا به ۲ روش می‌توان رنگ کرد. در غیر این صورت ۴ روش مختلف می‌توان داشت.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.



اگر نصف ضلع مربع را r فرض کنیم، فاصله‌ی این نقطه از قطر عمودی دایره برابر $r-2$ و از قطر افقی برابر است با $r-1$. پس بنابر رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت: $r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2$. پس $r = 5$.

۲۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$AB = B, BA = A \Longrightarrow A^2 = ABA = BA = A$ به همین ترتیب $B^2 = B$.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$\Longrightarrow \big(2y - (2x+1)\big)\big(2y + (2x+1)\big) = 31$$
$$\Longrightarrow 2y - (2x+1) = 1, \big(2y + (2x+1)\big) = 31$$

پس تنها جواب معادله $\mathrm{x} = 7, y = 8$ است.

توجه کنید که ۳۱ اول است.

۲۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

هر عدد طبیعی n را می‌توان به صورت یکتا به شکل qd^2 نوشت که q حاصل‌ضرب چند عدد اول متمایز است. به راحتی ثابت می‌شود که اگر kn مربع کامل باشد آنگاه $q \mid k$. در این مسئله گزینه‌ای درست است که q در آن از ۱۰۰۰ بیش‌تر باشد.

۲۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

خط‌هایی که ایجاد می‌شود، از نقطه‌ای واقع بر طول می‌گذرد که فاصله‌ی آن از دو رأس روبرو مستطیل به یک اندازه است. برای این فاصله x داریم: $x^2 = 1 + (5-x)^2$. پس $x = \frac{13}{5}$. حال مساحت ناحیه یک لایه متشکل از دو مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه‌ی ۱ و $\frac{12}{5}$ است.

۲۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ما هر حرکت پاسبان را با یکی از حروف U(بالا)، D(پایین)، R(راست) و L(چپ) مشخص می‌کنیم. به وضوح باید تعداد Uها با Dها برابر باشد. همچنین تعداد Rها و Lها. پس تعداد حالات برابر است با تعداد کلمات ۶ حرفی متشکل از این حروف به گونه‌ای که در شرط فوق صدق کنند.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اولاً به وضوح x^2 عددی صحیح است و هم‌چنین نامنفی است. برای $x = 0, 1$ که به وضوح برابری برقرار است. اگر $x > 1$

$$x^2 = [x^3] = x^2 + [x^2(x-1)] \Longrightarrow 0 \leq x^2(x-1) \leq 1$$

که تنها $\sqrt{2}$ در این شرط صدق می‌کند.

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید تعداد این افراد a باشد. A را مجموعه‌ی بازی‌هایی در نظر بگیرید که یکی از این a نفر در آن پیروز شده باشد. به وضوح در $\binom{a}{2}$ بازی که این افراد با هم انجام می‌دهند در مجموعه‌ی A هستند. همچنین این افراد در دیدار با کشتی گیران دیگر حداکثر می‌توانند $a(9-a)$ پیروزی کسب کنند. از طرفی بنابر فرض مسئله $|A| \geq 5a$. پس

$$\frac{1}{2}a(a-1) + a(9-a) \geq |A| \geq 5a \Longrightarrow \frac{1}{2}(a-1) + 9 - a \geq 5$$

حال یک گروه ۷ نفره را در نظر بگیرید که هرکدام در گروه خود دقیقا ۳ نفر را برده‌اند (کافی است سه دور مجزای یالی را در نظر بگیریم که گراف کامل ۷ راسی را افراز می‌کنند.)و همگی آن‌ها ۲ نفر باقی‌مانده را شکست داده‌اند.