باسمه تعالی

امتحان خلاقیت

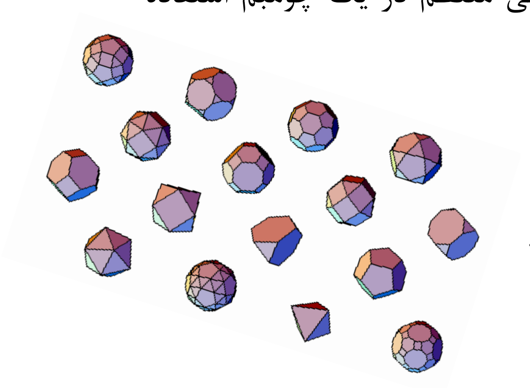
۱۱ شهریور ۱۳۸۵ | زمان امتحان: ۸:۳۰ الی ۱۰:۳۰

**۱. چومبم!**

یک چندوجهی را «منظم» می‌گوییم اگر اولاً محدب باشد و ثانیاً وجوهش چندضلعی‌های منتظم باشند. یک چندوجهی منظم را «چومبم» (چندوجهی منظم بدون مثلث!) گوییم هرگاه هیچ‌کدام از وجه‌های آن مثلث نباشد.

۱. نشان دهید هر چومبم محاطی است؛ یعنی کره‌ای وجود دارد که از همه رئوسش می‌گذرد.

۲. نشان دهید حداکثر سه نوع چندضلعی منتظم در یک چومبم استفاده شده است.



۳. ثابت کنید فقط یک نوع چومبم وجود دارد که وجوهش از تعدادی پنج‌ضلعی و تعدادی شش‌ضلعی تشکیل شده باشد. (یعنی از هر دو نوع چندضلعی استفاده شود.)

۴. برای هر $n > 3$، منشوری که وجوه بالایی و پایینی‌اش دو $n$ ضلعی منتظم برابر و وجوه جانبی‌اش $n$ تا مربع است یک چومبم است. ثابت کنید غیر از این‌ها تنها متناهی نوع چومبم دیگر وجود دارد.

باسمه تعالی

امتحان خلاقیت

۱۱ شهریور ۱۳۸۵ زمان امتحان: ۱۱:۰۰ الی ۱۱:۳۰

**۲. جریان سیال**

در یک لوله دراز و باریک و نامتناهی (!) سیالی در جریان است. می‌دانیم که اگر یک مولکول در نقطه‌ای با مختصات $x$ باشد، بعد از $t$ ثانیه در نقطه‌ای با مختصات $P(t,x)$ خواهد بود.

ثابت کنید اگر $P$ یک چندجمله‌ای دو متغیره باشد سرعت مولکول‌ها ثابت و برابر است.

باسمه تعالی

امتحان خلاقیت

۱۱ شهریور ۱۳۸۵ — زمان امتحان: ۱۱:۴۰ الی ۱۳:۱۰

### ۳. مجموعه کانتور در اعداد صحیح

برای $A \subseteq \mathbb{Z}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم: $aA+b = \quad ax+b | x \in A$. در واقع $aA+b$ از تجانس و انتقال $A$ به دست آمده است و اگر $a \neq 0$ آن را «متشابه» با $A$ می‌نامیم.

در این سؤال منظور از «مجموعه کانتور» مجموعه اعداد صحیح نامنفی‌ای است که در بسط مبنای ۳ آن‌ها رقم ۱ ظاهر نشده است.

$C$ این ویژگی جالب را دارد که می‌توان آن را به دو زیرمجموعه متشابه با خودش افراز کرد:

$$C = (۳C) \dot\bigcup (۳C + ۲) \qquad \text{(I)}$$

البته این تنها روش ممکن نیست، مثلاً:

$$C = (۹C) \dot\bigcup (۹C + ۶) \dot\bigcup (۳C + ۲)$$

منظور از یک «نمایش $C$» افراز آن به تعدادی زیرمجموعه اکید متشابه با $C$ است. یعنی:

$$C = \dot\bigcup_{i=۱}^{n} C_i \qquad \text{(II)}$$

که $C_i = a_iC + b_i$ها با $C$ متشابهند و $n > 1$.

یک نمایش به شکل (II) را «نمایش اولیه» می‌گوییم اگر نتوان با اجتماع تعدادی از $C_i$ها مجموعه‌ای متشابه با $C$ ساخت که برابر $C$ نباشد.

در این مسأله می‌خواهیم همه نمایش‌های اولیه مجموعه کانتور را پیدا کنیم. برای این منظور نمایشی مانند (II) را برای $C$ در نظر بگیرید. نشان دهید:

۱. $a_i$ها اکیداً از یک بزرگ‌ترند.

۲. $a_i$ها توانی از سه هستند.

۳. برای هر $i$، $b_i < a_i$.

۴. (I) تنها نمایش اولیه $C$ است.

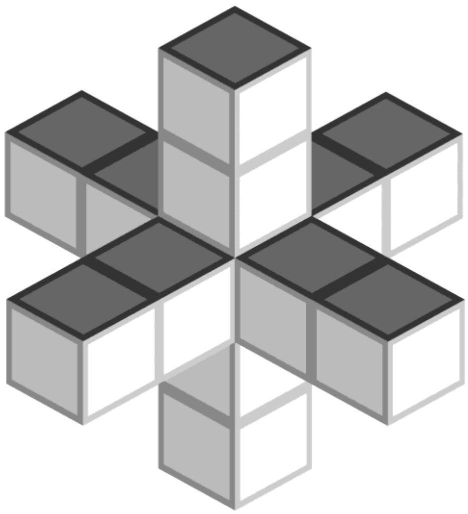
توضیح: مجموعه کانتور واقعی، مجموعه اعداد حقیقی بین صفر و یکی است که بسط مبنای سه آن‌ها تنها از صفر و دو تشکیل شده است.

باسمه تعالی

امتحان خلاقیت

۱۲ شهریور ۱۳۸۵ زمان امتحان: ۹:۰۰ الی ۱۱:۰۰

### ۴. آجرکاری با صلیب



شکل مقابل یک «صلیب سه بعدی» با طول بازوی ۲ است. اگر طول بازوی صلیبی سه بعدی، $k$ باشد آن را «$k$-صلیب» می‌نامیم.

منظور از «آجرکاری» فضای سه بعدی با تعدادی شکل سه بعدی، پوشاندن فضا با آن‌هاست به گونه‌ای که شکل‌ها با یکدیگر حداکثر در مرز اشتراک داشته باشند.

ثابت می‌شود که در آجرکاری فضا با $k$-صلیب، صلیب‌ها بدون دوران و تنها با انتقال‌های صحیح شرکت می‌کنند. از این نکته می‌توانید استفاده کنید.

۱. نشان دهید فضا را می‌توان با ۱-صلیب آجرکاری کرد.

۲. نشان دهید فضا را می‌توان با ۲-صلیب آجرکاری کرد.

۳. ثابت کنید برای $k \geq 5$ نمی‌توان فضا را با $k$-صلیب آجرکاری کرد.

۴. برای $k = 3, 4$ هر چه می‌توانید در مورد آجرکاری با $k$-صلیب ثابت کنید.

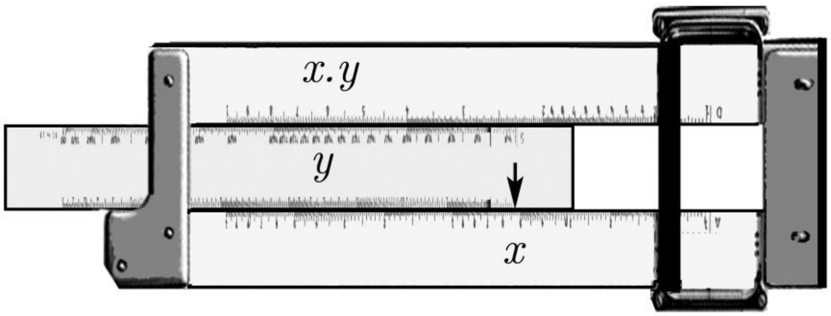
باسمه تعالی

امتحان خلاقیت

۱۲ شهریور ۱۳۸۵ — زمان امتحان: ۱۱:۱۰ الی ۱۲:۴۰

### ۵. خط‌کش محاسبه

خط‌کش محاسبه ابزاری است برای انجام عملیات جبری و از اجداد ماشین حساب‌های امروزی محسوب می‌شود! این خط‌کش سه بازو دارد. بازوهای بالایی و پایینی ثابت و بازوی میانی متحرک است. هر یک از بازوها به شیوه‌ای مخصوص مدرج شده است. توجه کنید که این درجه‌بندی لزوماً یکنواخت نیست و درجه‌بندی بازوها ممکن است با یکدیگر فرق داشته باشد و بستگی به عمل جبری خاصی دارد که خط‌کش برای آن طراحی شده است. مثلاً در خط‌کش شکل پایین که برای ضرب طراحی شده است هر سه بازو به صورت لگاریتمی مدرج شده‌اند.




روش کار با خط‌کش به این صورت است که برای محاسبه عبارت مربوط به $x$ و $y$ (مثلاً $x.y$ در خط‌کش مخصوص ضرب) بازوی میانی را جابه‌جا می‌کنیم تا علامت ابتدای آن (فلش سیاه رنگ) بالای مقدار $x$ روی بازوی پایینی قرار گیرد. عدد $y$ را روی بازوی میانی پیدا می‌کنیم، مقدار نوشته‌شده روی بازوی بالایی مقابل این عدد، پاسخ مورد نظر ماست.

۱. خط‌کشی برای محاسبه $x^y$ طراحی کنید که بازوی اول ($x$) از دو تا ده و بازوی دوم ($y$) از یک تا ده مدرج شده باشد.

۲. تمام خط‌کش‌های ممکن را که عمل ضرب را در بازه یک تا ده انجام می‌دهند پیدا کنید.

۳. ثابت کنید خط‌کش مدرجی برای محاسبه $x^2 + xy + y^2$ وجود ندارد که بازوهای اول و دوم آن از صفر تا ده مدرج شده باشد.

باسمه تعالی

امتحان خلاقیت

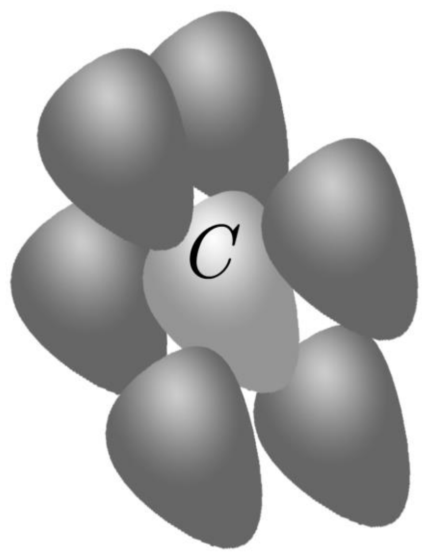
۱۳ شهریور ۱۳۸۵ زمان امتحان: ۹:۰۰ الی ۱۰:۳۰

**۶. انتقال‌های نامتقاطع**

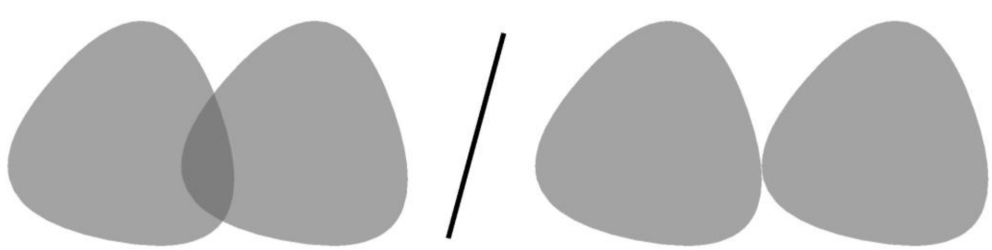
اگر $C$ شکلی محدب در فضا باشد حداکثر تعداد انتقال‌یافته‌های شکل $C$ که هیچ دوتایی با هم تداخل نداشته باشند ولی همگی با $C$ اشتراک داشته باشند ۲۶ تا است و به‌علاوه ۲۶ بهترین کران ممکن است.

۱. حکم بالا را برای حالتی که $C$ نسبت به مبداء متقارن باشد ثابت کنید.

۲. حکم را برای $C$ دل‌خواه ثابت کنید. (می‌توانید از قسمت قبل استفاده کنید.)




توضیح: در شکل زیر، در هر دو حالت دو شکل با هم اشتراک دارند ولی تنها در حالت سمت چپ تداخل رخ داده است.



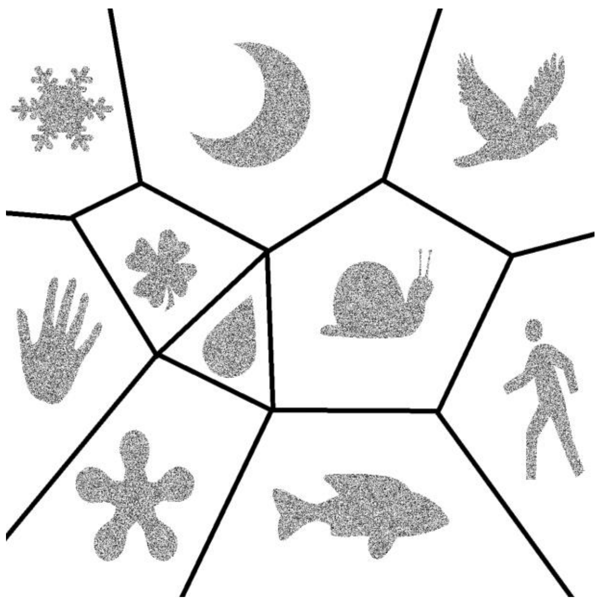
باسمه تعالی

امتحان خلاقیت

۱۳ شهریور ۱۳۸۵ زمان امتحان: ۱۱:۱۵ الی ۱۲:۱۵

**۷. کرت‌بندی محدب!**

تعدادی شکل مجزا در صفحه داریم. «کرت‌بندی محدب» این اشکال عبارت است از پوشاندن صفحه با نواحی محدب که هر کدام شامل دقیقاً یکی از شکل‌ها باشد و نواحی مذکور حداکثر در مرزها با هم اشتراک داشته باشند.



در کدام یک از موارد زیر کرت‌بندی محدب همواره ممکن است؟ اثبات کنید یا مثال نقض بزنید.

۱. متناهی نقطه متمایز

۲. متناهی پاره‌خط مجزا

۳. متناهی دایره توپر مجزا

باسمه تعالی

امتحان خلاقیت

۱۳ شهریور ۱۳۸۵ — زمان امتحان: ۱۴ الی ۱۵:۳۰

**۸. نشاندن در فضای گویا**

قضیه معروفی در نظریه اعداد می‌گوید هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت جمع مربعات چهار عدد صحیح نوشت و چهار کوچک‌ترین عدد با این خاصیت است. به عنوان مثال اعدادی که به صورت $4^k(8t+7)$ هستند را نمی‌توان جمع مربعات سه عدد صحیح نوشت. در این سؤال می‌توانید از این قضیه استفاده کنید.

منظور از مثلثی در $\mathbb{Q}^n$ سه نقطه ناهم‌خط در $\mathbb{Q}^n$ است.

۱. ثابت کنید اگر $ABC$ مثلثی در $\mathbb{Q}^n$ باشد، آنگاه مثلث $A'B'C'$ در $\mathbb{Q}^5$ یافت می‌شود که زاویه $\angle BAC$ و زاویه $\angle B'A'C'$ برابر باشد.

۲. عدد طبیعی $m$ را به نحوی بیابید که هر مثلث که در $\mathbb{Q}^n$ای قابل نشاندن باشد در $\mathbb{Q}^m$ نیز بنشیند.

۳. مثلثی بیابید که در $\mathbb{Q}^n$ای قابل نشاندن باشد ولی مثلثی متشابه با آن در $\mathbb{Q}^3$ ننشیند.

۴. عدد طبیعی $m'$ را به نحوی بیابید که هر مثلث که در $\mathbb{Q}^n$ای قابل نشاندن باشد مثلثی متشابه با آن در $\mathbb{Q}^{m'}$ بنشیند.

نکته: طراحان سؤال توانسته‌اند برای $m=9$ و $m'=6$ قسمت ۲ و ۴ را ثابت کنند. برای به دست آوردن نمره کامل، شما نیز باید این مطالب را ثابت کنید. اثبات احکام قوی‌تر، در هر قسمت، می‌تواند نمره اضافه داشته باشد.