به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز اول

---

۱. n عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و p عددی اول است که $n \mid p-1$ و $p \mid n^3-1$. نشان دهید $4p-3$ مربع کامل است.

۲. در مثلث ABC، $\angle A = 60^\circ$. نقطه‌ی متغیر D روی پاره‌خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید O_1 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABD و O_2 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع BO_1 و CO_2 را M و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث DO_1O_2 را N می‌نامیم. ثابت کنید خط MN از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. کهکشان راه دوغی(!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دوبه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید.)

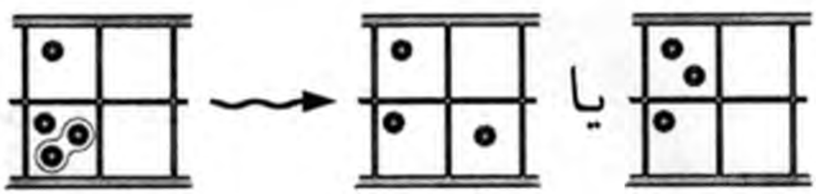
به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز دوم

۴. در برخی از خانه‌های یک جدول $۲ \times n$ تعدادی مهره قرار دارد.

اگر درخانه‌ای بیش از یک مهره باشد، می‌توانیم دو مهره از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه‌ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه‌ی بالایی‌اش قرار دهیم.



فرض کنید که در ابتدا دست‌کم ۲^n مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره به خانه‌ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵. BC قطر یک دایره و XY وتری عمود بر BC است. نقاط P و M به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن‌ها به گونه‌ای قرار گرفته اند که $PB \parallel CY$ و $MP \parallel CX$. محل تقاطع CX و PB را K می‌نامیم. ثابت کنید $MK \perp PB$.

۶. تمام توابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$،

$$(x+y)f(f(x)y) = x^۲ f(f(x)+f(y))$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست!)