



مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان

۱) ضرایب چندجمله‌ای P صحیح است. تحت کدام یک از شرایط زیر P نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد؟
 الف) $P(5) = 6$ و $P(6) = 6$ ب) $P(5) = 5$ و $P(6) = 5$ ج) $P(5) = 6$ و $P(6) = 6$
 د) $P(5) = 6$ و $P(6) = 5$ ه) تحت هر کدام از این شرایط، P می‌تواند ریشه صحیح داشته باشد.



۲) شازده کوچولو، روی سیاره کوچکی زندگی می‌کند که شعاعش 60π متر است. روزی با شروع از روی خط استوا، 30π متر به شرق، 20π متر به شمال، 30π متر به غرب و سرانجام 20π متر به جنوب می‌رود. شازده کوچولو تا مکان اولش چند متر فاصله دارد؟

الف) صفر ب) 30π ج) 20π د) 40π ه) 15π

۳) چند سه‌تایی طبیعی $10 \leq z < y < x$ وجود دارد که $x + y = z$ ؟

الف) ۱۵ ب) ۲۰ ج) ۴۰ د) ۴۵ ه) ۵۰

۴) به ازای چند عدد طبیعی مانند m حاصل $\sqrt{m-1} + \sqrt{m+15}$ صحیح است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۵) از شهر A جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می‌دانیم که فاصله شهر A از دو شهر دیگر 60 و 50 کیلومتر و فاصله دو شهر B و C از هم 40 کیلومتر است.

الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۷۰

۶) الگوریتم زیر را روی چندجمله‌ای $P(x)$ اجرا کرده‌ایم.

۱. d را برابر درجه P قرار بده و اگر $d < 1$ به سطر ۴ برو.

۲. a را برابر ضریب x^d در P قرار بده و $P(x) - ax^{d-1}(x+2)$ را به جای $P(x)$ بگذار.

۳. به سطر ۱ برو.

۴. P را چاپ کن.

پس از اجرای الگوریتم عدد 1384 چاپ شده است. P در آغاز کدام بوده است؟

الف) $45x^3 - x^{10}$ ب) $13x^7 - 2$ ج) $83x^3 - x^{11}$ د) $16x^8 + x$ ه) $-x^{11} + 84$



مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان

(۷) فرض کنید $(2 + \sqrt{3})^n = 5042 + b\sqrt{3}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

- الف) ۱۳۸۴ (ب) ۳۵۴۳ (ج) ۷۸۰ (د) ۵۸۲۲ (ه) ۲۹۱۱

(۸) مستطیلی در صفحه با رئوس $(0,0)$ ، $(0,100)$ ، $(150,0)$ و $(150,100)$ در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطر گذرا از رأس $(0,0)$ ، اضلاع مستطیل را در دو نقطه متمایز با مختصات صحیح قطع می کند؟ قطر را هم بشمارید.

- الف) ۹۹ (ب) ۱۰۰ (ج) ۱۹۹ (د) ۲۰۰ (ه) ۳۰۰

(۹) کدام یک از مجموعه های زیر نسبت به ضرب بسته است؟ اعداد طبیعی ای که یکانشان در بسط مبنای...
 الف) چهار، ۱ یا ۲ یا ۳ است. (ب) پنج، ۱ یا ۲ یا ۴ است. (ج) هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ است.
 د) نه، ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ است. (ه) ده، ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۵ است.

(۱۰) نیم سازه های داخلی مثلث ABC دایره محیطی آن را در نقاط A' ، B' و C' قطع می کنند. اگر I' مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ باشد، اندازه $\angle B'I'C'$ برابر کدام گزینه است؟

- الف) $90^\circ + \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{4}$ (ب) $180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{4}$ (ج) $2\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}$ (د) $180^\circ - \widehat{A}$ (ه) $2\widehat{A}$

(۱۱) اگر a ، b و c اعدادی حقیقی باشند که $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ، مجموعه همه مقادیر ممکن $ab + bc + ca$ زیرمجموعه کدام یک از بازه های زیر است؟

- الف) $[0, 2]$ (ب) $[-1, 0]$ (ج) $[0, 1]$ (د) $[-2, \frac{1}{2}]$ (ه) $[\frac{-1}{2}, 2]$

(۱۲) دوربینی زیر یک هواپیما نصب شده است. هواپیما روی مسیری خطی در حال اوج گیری است. زمین را مسطح فرض کنید. مساحت فیلم برداری شده، تابع درجه چندی از جابجایی مکانی هواپیما است؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) چند جمله ای نیست.

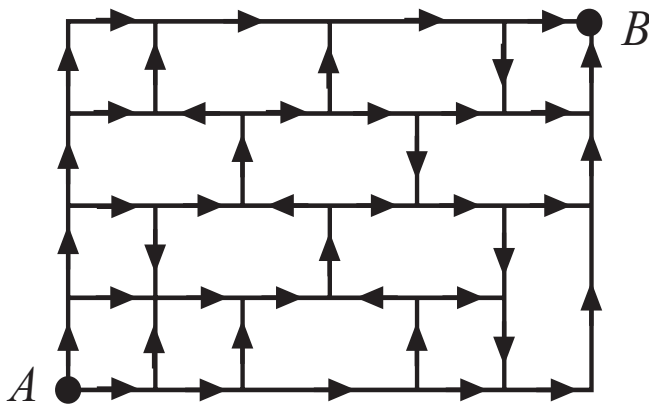
(۱۳) تصاعد حسابی از اعداد اول با قدر نسبت $n^2 + 1$ ، که n عددی طبیعی است حداکثر چند عضو دارد؟

- الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) تصاعد با هر تعداد عضو وجود دارد.



مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان

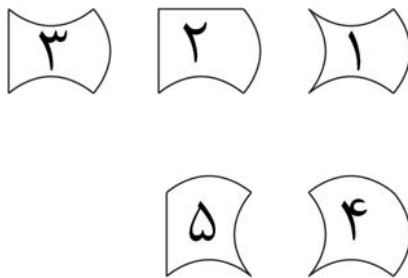


۱۴) در شکل روبرو می‌خواهیم از نقطه A به نقطه B برویم. مسیرها در جهت فلش یک‌طرفه هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار انجام دهیم؟

- الف) ۳۷ ب) ۵۸ ج) ۱۲
د) ۶۳ ه) ۶۴

۱۵) طول یال مکعبی یک واحد است. اگر A ، B و C رأس‌های مجاور به رأس D باشند، کم‌ترین مقدار مجموع مربعات فاصله نقطه دلخواه P از خطوط AB ، BC و CA چقدر است؟

- الف) ۱ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{3}{4}$ ه) $\frac{1}{4}$



۱۶) هر یک از کاشی‌های روبرو با اضافه و یا کم کردن قطاعی از دایره به مربع 1×1 به دست آمده است. هر کدام از این کاشی‌ها را «صفحه‌پرکن» می‌گوییم اگر بتوان با آن صفحه نامتناهی شبکه‌بندی شده را پوشاند؛ هر کاشی را می‌توان 90° درجه و 180° درجه دوران داد و آن را پشت و رو کرد. البته کاشی باید طوری در صفحه قرار داده شود که چهار گوشه آن روی نقاط شبکه قرار گیرد. کدام یک از کاشی‌ها صفحه‌پرکن هستند؟

- الف) ۱ و ۵ ب) ۲ و ۴ و ۵ ج) ۲ و ۳ و ۵ د) ۳ و ۴ ه) ۲ و ۴

۱۷) کدام بزرگ‌تر است؟

- الف) 2^{431} ب) 3^{421} ج) 4^{321} د) 2^{143} ه) 3^{142}

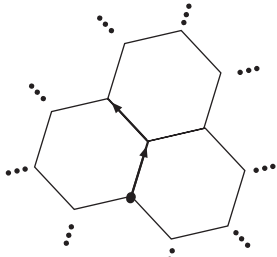
۱۸) در مثلث ABC نقطه D محل برخورد نیم‌ساز زاویه A با ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC است. اگر $BE = ED$ ، کدام گزینه صحیح است؟

- الف) $3A + 2C = 180^\circ$ ب) $2A + 3C = 180^\circ$ ج) $B - C = 90^\circ$ د) $2B + C = 180^\circ$ ه) $B = 2C$



مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان



۱۹) کندوی زنبوری از شش ضلعی‌های منتظم با طول واحد تشکیل شده است. بچه زنبوری روی اضلاع حرکت می‌کند و به هر رأسی که می‌رسد می‌تواند به سمت چپ یا راست خود برود. اگر این زنبور ۱ بار به چپ، ۲ بار به راست، ۴ بار به چپ، ... و 2^{1384} بار به چپ برود، فاصله مکان نهایی او از ابتدای حرکتش چند واحد است؟

الف) بین صفر و ۲۵ (ب) بین ۲۵ و ۲۱۰ (ج) بین ۲۱۰ و ۲۱۵ (د) بین ۲۱۵ و ۲۲۰ (ه) بین 2^{1384} و 2^{1385}

۲۰) می‌خواهیم برای سه روستا به فاصله دوه‌دوی ۹، ۱۴ و ۱۹ کیلومتر، مدرسه‌ای بسازیم. کم‌ترین مقدار a که بتوان مدرسه را جایی ساخت که فاصله‌اش از هر سه روستا بیش از a کیلومتر نباشد چند است؟

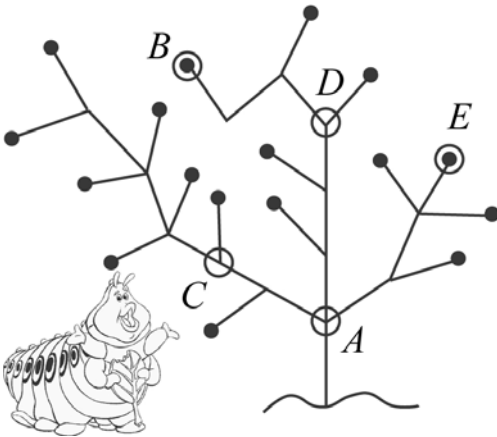
الف) ۹ (ب) $9/5$ (ج) $7\sqrt{2}$ (د) $\frac{57\sqrt{2}}{8}$ (ه) ۱۰

۲۱) بسط مبنای ۲- را با استفاده از ارقام صفر و یک، شبیه بسط مبنای ۲ تعریف می‌کنیم. مثلاً

$$(101)_{-2} = 1 \times (-2)^2 + 0 \times (-2)^1 + 1 \times (-2)^0 = 5$$

۱۱۷ در مبنای ۲-، چند تا یک دارد؟ (توجه کنید گذاشتن علامت منفی، مثلاً $(101)_{-2}$ ، مجاز نیست.)

الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۱۱۷ بسط مبنای ۲- ندارد. (ه) ۱۱۷ بیش‌تر از یک بسط در مبنای ۲- دارد.



۲۲) کرمی شکمو می‌خواهد همه میوه‌های درخت روبرو را بخورد و در عین حال مسافتی که روی شاخه‌ها طی می‌کند، کم‌ترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید کرم می‌تواند مکان خود را برای شروع انتخاب کند. کدام نقطه بهتر است؟ فاصله بین دو نقطه متوالی روی درخت یک متر است و تمام شاخه‌های انتهایی، میوه دارند. میوه‌ها با دایره سیاه توپر مشخص شده‌اند.

الف) A (ب) B (ج) C (د) D (ه) E

۲۳) *، عملی روی اعداد صحیح است با این خاصیت که جابجایی و شرکت‌پذیر است ولی روی جمع پخش نمی‌شود. به جای آن برای هر a ، b و c صحیح $a * (b + c) = (a * b) + (a * c) - a$ می‌دانیم که $3 = 1 * 1$. در این صورت $10 * 10$ چند است؟

الف) ۱۰۰ (ب) ۱۰۲ (ج) ۱۲۰ (د) ۲۵۰ (ه) ۳۰۰



مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان



۲۴) در افسانه‌ها آمده است وقتی پادشاه هند می‌خواست به مخترع شطرنج پادشاه دهد، طرف در دیزی را باز دید (!) و خواست به ازای خانه اول شطرنج یک دانه گندم، به ازای خانه دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه‌ای، دو برابر خانه قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه‌های صفحه شطرنج مانند شکل روبرو شماره‌گذاری شده‌اند. چه کسری از کل گندم‌ها به ازای خانه‌های سفید درخواست شده است؟ (جواب تا دو رقم اعشار است.)

الف) $\frac{0}{33}$ ب) $\frac{0}{50}$ ج) $\frac{0}{66}$ د) $\frac{0}{75}$ ه) هیچ کدام

۲۵) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی مثلث با ضلع BC است. اگر نقطه L وسط AM و K محل برخورد AE با BL باشد و بین اضلاع مثلث رابطه $2(AC - AB) = BC$ باشد، آنگاه $\frac{AK}{AE}$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د) $\frac{1}{2}$ ه) $\frac{3}{4}$

کس را خبر مکن که کجا می‌فرستم مرغ که طور تویی خسته به منقار مرا دل بی‌تو به جان آمد وقت است که بازآیی مزد آن گرفت جان برادر که کار کرد به زیر آوری چرخ نیلوفری را دل شکستن هنر نمی‌باشد دیدار خوب یوسف کنعانم آرزوست کی خبر یابی ز جانان یک زمان در پی سرو روان چشمه و گلزار بین در پریشان حالی و درماندگی

این سر به مهر نامه بدان مهربان رسان نور تویی سور تویی دولت منصور تویی ای پادشاه خوبان داد از غم تنهایی ناپرده رنج گنج میسر نمی‌شود درخت تو گر بار دانش بگیرد تا توانی دلی به دست آور یعقوب‌وار وا اسفاها همی‌زنم تا نگردی بی‌خبر از جسم و جان یار شو و یار بین دل شو و دل دار بین دوست آن باشد که گیرد دست دوست

۲۶) دو نفر با هم مشاعره می‌کنند؛ اولی بیتی از اشعار روبرو را می‌خواند و دومی باید بیت جدیدی بگوید که با حرف آخر بیت قبلی شروع شده باشد. چند بیت وجود دارد که با شروع از آن‌ها نفر اول می‌تواند مستقل از بازی نفر دوم برنده شود؟ بازنده کسی است که نتواند شعری بخواند.

الف) صفر ب) ۲ ج) ۵ د) ۸ ه) ۱۰

۲۷) A ، B و C سه زیرمجموعه دلخواه مجموعه اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعه مختلف می‌توان ساخت؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۸ د) ۱۲۸ ه) ۲۵۶



مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

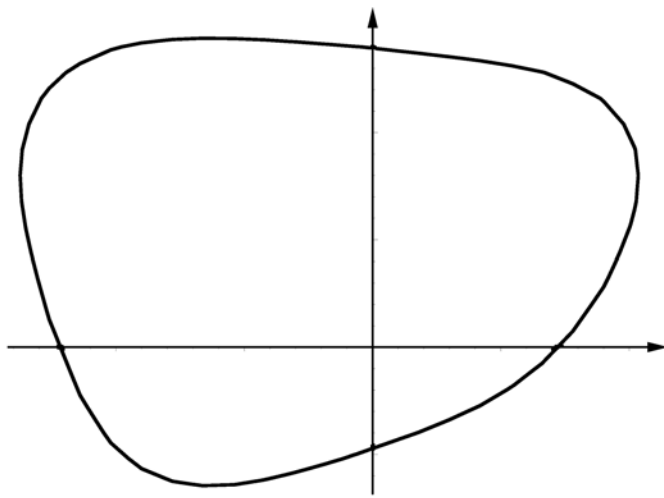
ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان

۲۸) فاصله مرکزهای دو دایره به شعاع $\sqrt{3}$ ، برابر ۴ است. نقاطی را در نظر بگیرید که خارج دو دایره هستند و هر خط گذرنده از آن نقاط، دست کم یکی از دو دایره را قطع می کند. مساحت این مجموعه چقدر است؟

- (الف) صفر (ب) $2\pi - \sqrt{3}$ (ج) $4\pi - 2\sqrt{3}$ (د) $2\sqrt{3} - \pi$ (ه) $4\sqrt{3} - 2\pi$

۲۹) خانه های یک مستطیل 4×5 را می خواهیم با چهار رنگ طوری رنگ کنیم که در هر مربع 2×2 ، هر چهار رنگ ظاهر شوند. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

- (الف) ۱۲۰ (ب) ۱۹۲ (ج) ۲۴ (د) ۲۶۴ (ه) ۲۸۸



۳۰) شکل روبرو مجموعه جواب های کدام یک از

معادلات زیر در صفحه است؟

(الف) $x^3 + xy + y^3 = 4$

(ب) $\cos x + x^2 + y^2 + y = 2$

(ج) $x^2y^3 + xy^2 + y = 1$

(د) $x^4 + y^4 = 2y - x + 1$

(ه) $\sin(x + y) + \sin x + \sin y = 1$