به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و سومین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۴

---

۱. راه‌حل اول. ابتدا دقت کنید که از آن‌جا که p عددی اول است و $p|(n-1)(n^2+n+1)$، پس $p|n-1$ و یا $p|n^2+n+1$. اگر $p|n-1$، باید $p \leq n-1$ و از طرف دیگر طبق فرض مسئله $n|p-1$ و بنابراین $n \leq p-1$. پس این حالت امکان ندارد و در نتیجه $p|n^2+n+1$.

$n|p-1$، پس عدد طبیعی t وجود دارد که $p = tn+1$. ادعا می‌کنیم $t = n+1$. می‌دانیم:

$$p|n^2+n+1 \Rightarrow tn+1|n^2+n+1 \Rightarrow tn+1|n^2+n+1-tn-1$$

$$\Rightarrow tn+1|(n+1-t)n \Rightarrow tn+1|n+1-t$$

که آخرین نتیجه‌گیری با استفاده از لم اقلیدس و به این دلیل است که $(tn+1, n) = (n, 1) = 1$.

حال اگر $t \neq n+1$، $n+1-t$ صفر نیست و لذا $tn+1 \leq |n+1-t|$. برای $|n+1-t|$ دو حالت داریم:

$$n+1-t > 0 \quad \Rightarrow \quad n+1 \leq tn+1 \leq n+1-t < n+1$$
$$n+1-t < 0 \quad \Rightarrow \quad t < tn+1 \leq t-(n+1) < t$$

که هر دو تناقض است. پس $t = n+1$. حال داریم:

$$t = n+1 \Rightarrow p = tn+1 = n^2+n+1 \Rightarrow 4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

پس $4p-3$ مربع کامل است.

راه‌حل دوم. ابتدای راه‌حل مشابه راه‌حل اول است. حال فرض کنید که $p|n^2+n+1$. از آن‌جا که $n|p-1$ عدد طبیعی k یافت می‌شود که $p = kn+1$. پس باید عدد طبیعی t موجود باشد که $n^2+n+1 = (kn+1)t$. با در نظر گرفتن دو طرف عبارت اخیر به پیمانه‌ی n نتیجه می‌گیریم (به پیمانه‌ی n) $t \equiv 1$، پس عدد صحیح نامنفی s یافت می‌شود که $t = sn+1$. اگر $s > 0$ باشد، آن‌گاه $(sn+1)(tn+1) > n^2+n+1$ که تناقض است، پس $s = 0$ و لذا $t = 1$. بنابراین $p = n^2+n+1$. قسمت آخر راه‌حل هم مشابه است.

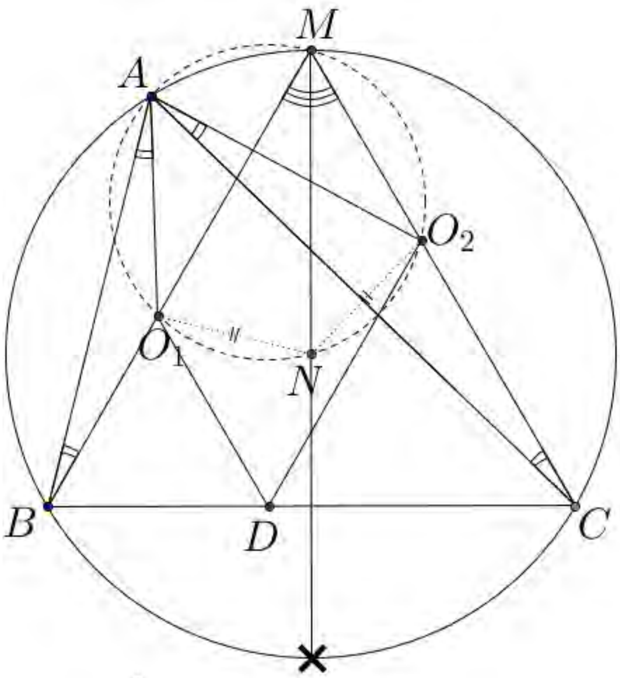
۲. دقت کنید که در بین زاویه‌های $\angle ADB$ و $\angle ADC$ یکی کم‌تر یا مساوی 90° و دیگری بیش‌تر یا مساوی 90° است که بدون کاسته شدن از کلیت مسئله و به دلیل تقارن می‌توان فرض کرد $\angle ADC \geq 90^\circ$. در این صورت با توجه به خواص مرکز دایره‌ی محیطی داریم:

$$\angle ABO_1 = 90^\circ - \angle ADB = \angle ADC - 90^\circ = \angle ACO_2$$

پس BO_1 و CO_2 یک‌دیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قطع می‌کنند. با استدلال مشابه بالا می‌توان نشان داد که $\angle BAO_1 = \angle CAO_2$ و بنابراین $\angle O_1AO_2 = \angle BAC = 60^\circ$.

نقطه‌ی D قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به O_1O_2(عمود منصف AD) است. پس $\angle O_1DO_2 = 60^\circ$ لذا $\angle O_1NO_2 = 120^\circ$ است و با توجه به این‌که M روی دایره‌ی محیطی ABC قرار دارد $\angle O_1MO_2 = 60^\circ$ و

این نتیجه می‌دهد که چهارنقطه‌ی M، N، $O_۱$ و $O_۲$ روی یک دایره قرار دارند. از طرفی $O_۱N = O_۲N$ پس MN نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle O_۱MO_۲ = \angle BMC$ است. می‌دانیم که نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BMC$ از وسط کمان BC در دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گذرد که یک نقطه‌ی ثابت است.



۳. فرض کنید $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ همه‌ی فاصله‌های ظاهر شده در بین این سیارات باشند. به برهان خلف فرض کنید که $r \leq ۷۸$. یکی از ستاره‌های فضا را به دل‌خواه انتخاب کنید و کره‌های به مرکز این ستاره و شعاع‌های $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ را در نظر بگیرید. طبق فرض ما هر کدام از ستاره‌های دیگر باید روی یکی از این r کره باشند. پس طبق اصل لانه‌کبوتری روی یکی از این کره‌ها باید حداقل $۱۲۸۲۱ = \left\lceil \frac{۱۰^۶-۱}{۷۸} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{۱۰^۶-۱}{r} \right\rceil$ ستاره باشد. حال تنها این کره را در نظر بگیرید و یکی از ستاره‌های روی آن را به دل‌خواه انتخاب کنید. مجدداً به مرکز این ستاره‌ی جدید r کره با شعاع‌های $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ در نظر بگیرید. تمام ستاره‌های آسمان غیر از ستاره‌ای که مرکز این کره‌هاست روی این r کره قرار دارند، پس باید طبق اصل لانه کبوتری یکی از این کره‌ها باشد که از بین ۱۲۸۲۱ ستاره‌ای که روی کره‌ی اول قرار داشتند شامل حداقل $۱۶۵ = \left\lceil \frac{۱۲۸۲۰}{۷۸} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{۱۲۸۲۰}{r} \right\rceil$ تا از ستاره‌ها باشد. حال دقت کنید که این ۱۶۵ ستاره روی دو کره‌ی غیرهم‌مرکز قرار گرفته‌اند، پس باید روی اشتراک آن‌ها که یک دایره است باشند. در نهایت تنها این ۱۶۵ ستاره را در نظر بگیرید. اگر یکی از این ۱۶۵تا را به دل‌خواه انتخاب کنیم برای هر $۱ \leq i \leq r$ حداکثر دو ستاره از بین ۱۶۴ ستاره‌ی باقی‌مانده دارای فاصله‌ی d_i با این ستاره هستند. پس تعداد این ستاره‌ها روی این دایره باید حداکثر $۲ \times ۷۸ + ۱ = ۱۵۷$ باشد که این طور نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض اولیه‌ی ما اشتباه است و حداقل ۷۹عدد متمایز در بین فواصل دوبه‌دوی این یک میلیون سیاره وجود دارد.

۴. ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم که اگر حداقل $۲^{n-۱}$ مهره در یک جدول $۱ \times n$ داشته باشیم و حرکات

مجاز ما این باشد که اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره قرار داشت بتوانیم دو مهره از آن خارج کنیم و یک مهره در خانه‌ی سمت راستش قرار دهیم، می‌توانیم با جابه‌جایی مهره‌ها در نهایت مهره‌ای را به آخرین خانه‌ی سمت راست برسانیم. این حکم برای $n = ۱$ بدیهی است. حال فرض کنید حکم برای k درست باشد و ما ۲^k مهره در یک جدول $۱ \times (k + ۱)$ داریم. اگر از ابتدا مهره‌ای در آخرین خانه‌ی سمت راست باشد، چیزی برای ثابت کردن باقی نمی‌ماند. پس فرض می‌کنیم که این خانه خالی باشد. حال ۲^k مهره را که همگی در یک جدول $۱ \times k$ قرار دارند به دو دسته‌ی $۲^{k-۱}$ تایی تقسیم می‌کنیم. حال طبق فرض استقرا می‌توان با جابه‌جایی مهره‌ها در هر دسته یک مهره را به خانه‌ی دوم از سمت راست رساند. پس در نهایت حداقل دو مهره به این خانه می‌رسد و با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی سمت راست برد.

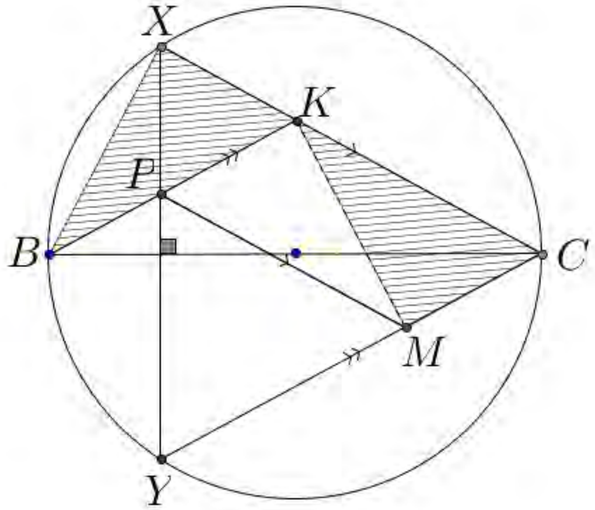
حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.

حکم مسئله‌ی اصلی را هم شبیه به بالا به کمک استقرا ثابت می‌کنیم. باز هم حالت $n = ۱$ به سادگی قابل بررسی است. حال فرض کنید که حکم برای k برقرار باشد و ما $۲^{k+۱}$ مهره در یک جدول $۲ \times (k + ۱)$ داشته باشیم. مشابه بالا اگر در ابتدا مهره‌ای در خانه‌ی بالا سمت راست(خانه‌ی ستاره‌ای) باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. این بار اگر حداقل دو مهره در خانه‌ی پایین سمت راست باشد می‌توان دو مهره از این خانه برداشت و یک مهره به خانه‌ی بالا راست منتقل کرد که باز مسئله حل است. پس باید فرض کنیم که در خانه‌ی پایین راست حداکثر یک مهره قرار دارد. حال بر حسب تعداد مهره‌های این خانه مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم.

اگر در خانه‌ی پایین راست مهره‌ای نباشد، همه‌ی $۲^{k+۱}$ مهره در یک جدول $۲ \times k$ قرار دارند. حال اگر مشابه بالا $۲^{k+۱}$ مهره را به دو دسته‌ی ۲^kتایی به دل‌خواه تقسیم کنیم، طبق فرض استقرا می‌توان با هر کدام از این دسته‌ها یک مهره را به خانه‌ی دوم از سمت راست از ردیف بالایی رساند. حال با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی مورد نظر رساند.

اگر در خانه‌ی پایین سمت راست یک مهره قرار داشته باشد. $۲^{k+۱} - ۱$ مهره در بقیه‌ی جدول قرار دارند. پس طبق اصل لانه‌کبوتری یا ۲^k در ردیف بالایی قرار دارد که طبق استدلال قسمت اول راه‌حل می‌توان یک مهره را به خانه‌ی مورد نظر رساند و یا ۲^k مهره در ردیف پایینی غیر از خانه‌ی سمت راست آن قرار دارد. در این جا باز با استفاده حکمی که در ابتدای راه‌حل ثابت شد می‌توان یک مهره‌ی دیگر به خانه‌ی پایین راست اضافه کرد که در این صورت ۲ مهره در این خانه قرار می‌گیرد و حال با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی بالا راست رساند.

۵. راه‌حل اول. دقت کنید که BC قطر دایره و لذا عمود منصف XY است، پس $\angle BCY = \angle BCX$، و $\angle YBC = \angle XBC$. از آن‌جا که $BK \parallel CY$، $\angle KBC = \angle BCY = \angle BCK$ و بنابراین $BK = KC$. هم‌چنین $\angle XPK = \angle XYC = \angle YXC$ و لذا $KX = KP$. از آن‌جا که $KCPM$ متوازی‌الاضلاع است، $KP = CM$. از طرف دیگر $\angle BKX = \angle MCK$ و لذا دو مثلث XKB و CMK هم‌نهشت هستند. از آن‌جا که BC قطر دایره است، $\angle BXC = ۹۰^\circ$ و با توجه به هم‌نهشتی این دو مثلث $\angle KMC$ قائمه است و $KM \perp YC$. در نهایت باز با توجه به موازی بودن PB و CY حکم مورد نظر ثابت می‌شود.



راه‌حل دوم. برای اثبات حکم از قضیه‌ی کارنو استفاده می‌کنیم، یعنی نشان می‌دهیم تحت شرایط مسئله $BM^۲ - PM^۲ = BK^۲ - PK^۲$. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BYM، $BM^۲ = BY^۲ + YM^۲$. دقت کنید که $PM \parallel XC$ و لذا $\angle YPM = \angle YXM = \angle CYP$. پس مثلث PMY متساوی‌الساقین است و $PM = MY$. در راه‌حل اول هم نشان دادیم که $KP = XK$ و $BK = KC$. در نهایت با ترکیب این روابط و استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث BXK داریم:

$$BM^۲ - PM^۲ = (BY^۲ + YM^۲) - YM^۲ = BY^۲ = BX^۲ = BK^۲ - KX^۲ = BK^۲ - KP^۲$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۶. ابتدا نشان می‌دهیم f تابعی یک به یک است. اگر $f(a) = f(b)$ باشد، با قرار دادن $y = ۱$ در معادله و یک بار جای‌گذاری a و بار دیگر b به جای x داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(a+۱)f(f(a)) = a^۲ f(f(a)+f(۱))\\(b+۱)f(f(b)) = b^۲ f(f(b)+f(۱))\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^۲}{a+۱} = \frac{b^۲}{b+۱} \Rightarrow \cdots \Rightarrow (a-b)(ab+a+b) = ۰$$

حال با توجه به این که a و b و در نتیجه $ab+a+b$ مثبت است، نتیجه می‌گیریم $a = b$ و بنابراین تابع یک به یک است. اگر برای یک $x > ۱$ در رابطه‌ی اصلی به جای y، $x^۲ - x$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rc}& (x+(x^۲-x))f(f(x)(x^۲-x)) = x^۲ f(f(x)+f(x^۲-x))\\ \Rightarrow & f(f(x)(x^۲-x)) = f(f(x)+f(x^۲-x))\\ \Rightarrow & f(x)(x^۲-x) = f(x)+f(x^۲-x)\\ \Rightarrow & f(x)(x^۲-x-۱) = f(x^۲-x)\end{array}$$

در خط دوم به سوم از یک به یکی تابع f استفاده شده است. در نهایت دقت کنید که معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - x - ۱$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد که یکی از آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. حال اگر این ریشه را α بنامیم، با قرار دادن $x = \alpha$ در معادله‌ی آخر به $f(۱) = ۰$ می‌رسیم که با فرض این که مقادیر F مثبت هستند تناقض دارد. پس چنین تابعی اصلاً وجود ندارد.