به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۴

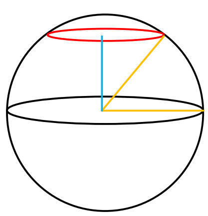
۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

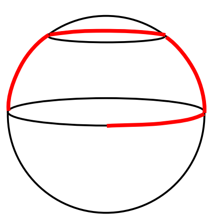
لم: اگر چندجمله‌ای $P(x)$ دارای ضرایب صحیح باشد آن‌گاه $a-b \mid P(a)-P(b)$.

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح دارای ریشه صحیح a باشد، یعنی $P(a)=۰$. حال اگر بخواهد گزینه‌ی (ب) درست باشد طبق لم باید $۵-a \big| P(۵)-P(a)=۵$ و همچنین باید $۶-a \big| P(۶)-P(a)=۵$ که در این صورت باید عدد ۵ دو مقسوم‌علیه متوالی داشته باشد، که این غیر ممکن است.

دقت کنید که برای گزینه‌های (الف)، (ج) و (د) به ترتیب چندجمله‌ای‌های $P(x)=x$، $P(x)=-۳(x-۵)(x-۶)+۶$ و $P(x)=۱۱-x$ شرایط هر گزینه را دارا هستند و به علاوه به ترتیب دارای ریشه‌های صحیح ۰، ۷ و ۱۱می‌باشند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.





محیط مدار استوا $۱۲۰\pi = ۶۰ \times ۲\pi$ است. در حرکت اول به اندازه‌ی یک چهارم محیط خط استوا به سمت شرق می‌رود. سپس به اندازه ۲۰π بالا می‌رود (مانند شکل اول) که در این صورت ۱۰π تا رسیدن به قطب شمال فاصله دارد. یعنی $\frac{۲}{۳}$ مسیر تا قطب شمال طی شده است. پس زاویه‌ی طی شده $\frac{۲}{۳}$ کل زاویه تا رسیدن به قطب است، یعنی ۶۰ درجه. حال بر روی یک دایره جدید باید حرکت کند. اگر از مرکز کره به مرکز این دایره‌ی جدید وصل کنیم؛ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ای ۳۰ درجه خواهیم داشت. ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است. پس شعاع دایره‌ی جدید نصف شعاع کره یعنی ۳۰ متر است. بنابراین محیط این دایره‌ی جدید $۶۰\pi = ۳۰ \times ۲\pi$ و حال که ۳۰π روی محیط این دایره حرکت کرده است؛ یعنی نصف محیط را رفته است. در آخرین حرکت به مدار استوا بر می‌گردد. در این حرکت نصف خط استوا را طی کرده است. پس نسبت به جای اول خود یک چهارم محیط استوا (۳۰π) طی کرده است.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

z بین ۳ تا ۱۰ می‌تواند باشد. اگر z ۳ یا ۴ باشد برای x یک حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۵ یا ۶ باشد برای x دو حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۷ یا ۸ باشد برای x سه حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۹ یا ۱۰ باشد، برای x چهار حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود؛ پس در مجموع: ۲۰ = ۴×۲ + ۳×۲ + ۲×۲ + ۱×۲ حالت داریم.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

باید $\sqrt{m-۱}+\sqrt{m+۱۵}=n$ باشد که در آن n عددی طبیعی است. پس داریم:

$$\sqrt{m+۱۵}-\sqrt{m-۱}=\frac{۱۶}{\sqrt{m+۱۵}+\sqrt{m-۱}}=\frac{۱۶}{n}\in\mathbb{Q}$$

حال چون $\sqrt{m-۱}+\sqrt{m+۱۵}$ و $\sqrt{m+۱۵}-\sqrt{m-۱}$ هر دو گویا هستند میانگین آن‌ها یعنی $\sqrt{m+۱۵}$ و به تبع آن $\sqrt{m-۱}$ هر دو گویا هستند. پس $m+۱۵$ و $m-۱$ هر کدام مربع عددی گویا هستند. می‌توان به سادگی نشان داد که اگر عددی طبیعی مربع عددی گویا باشد لزوماً مربع عدد طبیعی است. پس حتماً باید $\sqrt{m-۱}$ و $\sqrt{m+۱۵}$ طبیعی باشند.

بنابراین باید داشته باشیم:

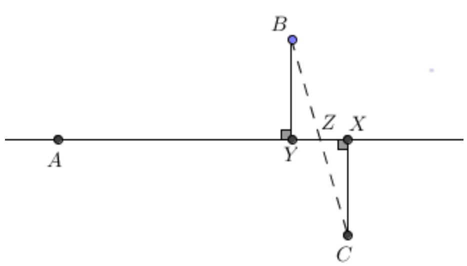
$$m+۱۵=a^۲\ ,m-۱=b^۲\Rightarrow a^۲-b^۲=۱۶\Rightarrow(a-b)(a+b)=۱۶$$

حال با بررسی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۶ به این نتیجه می رسیم که m فقط می‌تواند اعداد ۱ و ۱۰ باشد.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر X و Y به ترتیب نقاطی روی خط جاده باشند که کم‌ترین فاصله را تا C و B دارند و Z محل تقاطع پاره‌خط BC و جاده باشد، می‌دانیم که مثلث‌های BYZ و CXZ قائم‌الزاویه هستند و همواره در یک مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگ‌ترین ضلع است، بنابراین:

$$BY\le BZ \text{ و } CX\le CZ$$



در نتیجه: $BY+CX\le BC$ پس مجموع فاصله‌ی دو شهر از جاده حداکثر برابر فاصله‌ی دو شهر است که برابر ۴۰ کیلومتر است. زمانی هم این مقدار برابر ۴۰ می‌شود که BC بر جاده عمود باشد که این حالت هم محتمل است.

۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید $p(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$ باشد. در این صورت $p(x)$ بعد از یک تغییر به چندجمله‌ای زیر تبدیل می شود:

$$(a_{n-۱} - ۲a_n)x^{n-۱} + a_{n-۲}x^{n-۲} + \ldots + a_۱ x + a_۰$$

در تغییر دوم این چندجمله‌ای به چندجمله‌ای زیر تبدیل خواهد شد:

$$(a_{n-۲} - ۲a_{n-۱} + ۴a_n)x^{n-۲} + a_{n-۳}x^{n-۳} + \ldots + a_۱ x + a_۰$$

با ادامه‌ی این روند به چندجمله‌ای درجه صفر زیر می‌رسیم:

$$(-۲)^۰ a_۰ + (-۲)^۱ a_۱ + (-۲)^۲ a_۲ + \ldots + (-۲)^{n-۱} a_{n-۱} + (-۲)^n a_n$$

حال اگر گزینه‌ها را در این مسئله امتحان کنیم فقط گزینه‌ی (الف) است که حاصل بالا ۱۳۸۴ برابر می‌شود:

$$(-۲)^۳ \times \left(-۴۵\right) + (-۲)^{۱۰} \times ۱ = ۱۳۸۴$$

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

می‌دانیم که اگر آن عبارت را در مزدوجش ضرب کنیم حاصل برابر یک می‌شود؛ یعنی

$$(۲ + \sqrt{۳})^n (۲ - \sqrt{۳})^n = ۱$$

حال اگر بتوانیم مقدار مزدوج را بر حسب خود عبارت بدست آوریم، مسئله حل خواهد شد. برای این منظور با استقرا به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $(۲ + \sqrt{۳})^n = r_n + s_n \sqrt{۳}$ باشد؛ در این صورت $(۲ - \sqrt{۳})^n = r_n - s_n \sqrt{۳}$ خواهد شد. بنابراین با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ۱ &= (۲ + \sqrt{۳})^n (۲ - \sqrt{۳})^n = (r_n + s_n \sqrt{۳})(r_n - s_n \sqrt{۳}) \\ &= (۵۰۴۲ + b\sqrt{۳})(۵۰۴۲ - b\sqrt{۳}) = ۵۰۴۲^۲ - b^۲ \times ۳ \\ &\Rightarrow ۱ = ۵۰۴۲^۲ - ۳b^۲ \Rightarrow b^۲ = \frac{۵۰۴۲^۲ - ۱}{۳} \Rightarrow b = ۲۹۱۱ \end{aligned}$$

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شیب قطر برابر $\frac{۲}{۳} = \frac{۱۰۰}{۱۵۰}$ است و تعداد ۴۹ خط داریم که دارای این شیب هستند و زیر خط قطر قرار دارند. این تعداد از آن جا به دست می‌آید که به ازای هر ۳ واحد حرکت در راستای محور افقی به سمت

راست و ۲ واحد حرکت در راستای محور عمودی به سمت پایین به نقاط جدیدی در این مستطیل می‌رسیم که خط گذرنده از آن‌ها موازی قطر است.

دقیقاً به همین میزان هم بالای قطر پاره خط وجود دارد. پس در مجموع ۹۹ خط موازی داریم.

۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای رد گزینه‌ی (الف) ۲×۲ در مبنای چهار را در نظر بگیرید که حاصل ۱۰ می‌شود. که یکانش ۰ است.

برای رد گزینه‌ی (ب) ۴×۲ در مبنای پنج را در نظر بگیرید که حاصل ۱۳ می‌شود. که یکانش ۳ است.

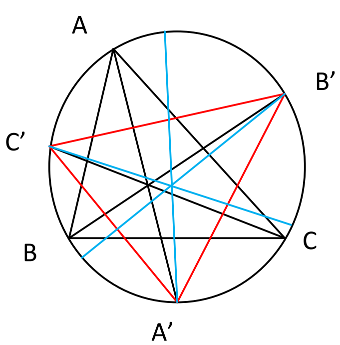
برای رد گزینه‌ی (د) ۶×۲ در مبنای نه را در نظر بگیرید که حاصل ۱۳ می‌شود. که یکانش ۳ است.

برای رد گزینه‌ی ه ۲×۲ در مبنای ده را در نظر بگیرید که حاصل ۴ می‌شود. که یکانش ۴ است.

برای اثبات گزینه‌ی (ج) باید نشان دهیم که اگر رقم یکان هر عددی در مبنای هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ باشد در ضرب درون همین مجموعه قرار خواهد گرفت که با بررسی هر ۹ حالت به این نتیجه خواهیم رسید.

۱۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شکل این سوال به صورت روبه‌رو خواهد شد:



$$\angle B'I'C' = \frac{\widehat{B'AC'}}{۲} + \frac{\widehat{C''A'B''}}{۲}$$

که در آن B'' و C'' به ترتیب پای نیم‌سازهای زوایای B' و C' بر دایره‌ی محیطی هستند. همان طور که در شکل نیز واضح است:

$$\frac{\widehat{B'AC'}}{۲} = \angle A'$$ و

$$\frac{\widehat{C''A'B''}}{۲} = \frac{\widehat{C''A'}}{۲} + \frac{\widehat{A'B''}}{۲} = \frac{\angle C'}{۲} + \frac{\angle B'}{۲}$$

در نتیجه $\angle B' = \angle A' + \frac{\angle B'}{۲} + \frac{\angle C'}{۲} = ۹۰^\circ + \frac{\angle A'}{۲}$ و از آن‌جا که زاویه‌ی A' روبه‌رو به کمان $B'AC'$ است داریم: $\angle A' = \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲}$ در نتیجه: $\angle B'I'C' = ۹۰^\circ + \frac{\angle B + \angle C}{۴}$

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ممکن در بازه‌ی $[-\frac{۱}{۲},۱]$ قرار دارد. برای این منظور دو نامساوی‌های زیر را ثابت می‌کنیم:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ac \geq -\frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

برای اثبات نامساوی سمت چپ داریم:

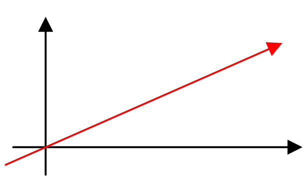
$$\begin{aligned}
& a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ac \\
\Leftrightarrow\ & ۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ \geq ۲ab + ۲bc + ۲ac \\
\Leftrightarrow\ & (a^۲ + b^۲) + (b^۲ + c^۲) + (c^۲ + a^۲) \geq ۲ab + ۲bc + ۲ac \\
\Leftrightarrow\ & (a^۲ + b^۲ - ۲ab) + (b^۲ + c^۲ - ۲bc) + (c^۲ + a^۲ - ۲ac) \geq ۰ \\
\Leftrightarrow\ & (a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

برای اثبات نامساوی سمت راست هم داریم:

$$\begin{aligned}
& ab + bc + ac \geq -\frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲) \\
\Leftrightarrow\ & ۲ab + ۲bc + ۲ac \geq -(a^۲ + b^۲ + c^۲) \\
\Leftrightarrow\ & a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲bc + ۲ac \geq ۰ \\
\Leftrightarrow\ & (a + b + c)^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

حال دقت کنید که اگر $a = b = c = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، $ab + bc + ca = ۱$ و اگر $a = -b = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $c = ۰$ باشد، $ab + bc + ca = \frac{-۱}{۲}$. بنابراین گزینه‌ی صحیح باید شامل ۱ و $\frac{-۱}{۲}$ باشد که تنها گزینه‌ای که این خاصیت را دارد گزینه‌ی (ه) است.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.



دقت کنید که حرکت هواپیما مشابه خط روبه‌رو است که طبق قضیه‌ی تالس نتیجه می‌دهد ارتفاع هواپیما به صورت خطی رشد می کند و در نتیجه مساحت به صورت تابعی درجه دو خواهد بود.

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید که a اولین عضو این دنباله باشد. در این صورت باید همه‌ی اعداد دنباله‌ی زیر اول باشند:

$$a\ ,a + n^۲ + ۱\ ,a + ۲n^۲ + ۲\ ,a + ۳n^۲ + ۳\ ,\ldots$$

می‌خواهیم نشان دهیم که در این صورت چهارمین عضو دنباله نمی‌تواند عددی اول باشد و در نتیجه دنباله حداکثر سه عضوی می‌شود.

برای این منظور باید دقت شود که باقیمانده $n^۲ + ۱$ بر ۳ نمی‌تواند صفر باشد.(این موضوع را می‌توانید با بررسی حالت‌های مختلفی که باقی‌مانده‌ی n بر ۳ می‌تواند داشته باشد تحقیق کنید.) پس با اضافه شدن به a باقی‌مانده‌ی آن بر ۳ با a متفاوت خواهد شد. به همین ترتیب باقیمانده $a + ۲n^۲ + ۲$ بر ۳ با باقیمانده $a + n^۲ + ۱$ بر ۳ و با باقی‌مانده‌ی a بر ۳ متفاوت است.

پس در بین این اعداد یکی باید مضرب ۳ باشد و چون این عددها اول هستند باید یکی از این اعداد ۳ باشد.

اما دقت کنید کنید که a عددی اول است و در نتیجه $a \geq ۱$. پس

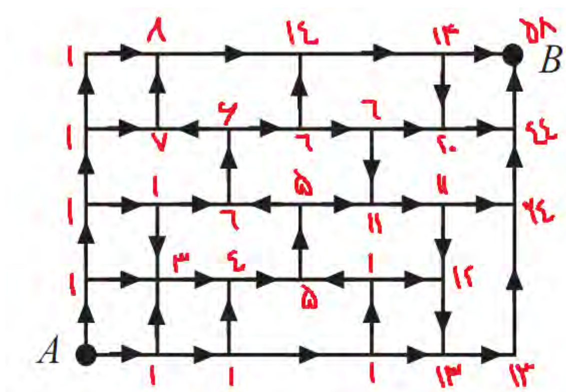
$$a + ۲n^۲ + ۲ > a + n^۲ + ۱ > ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

پس تنها a می‌تواند برابر ۳ باشد. حال اگر دنباله عضو چهارمی داشته باشد باید باقی‌مانده‌ی این عضو یعنی $a + ۳n^۲ + ۳$ بر ۳ با باقی‌مانده‌ی a بر ۳ برابر باشد. که در این صورت این عدد مضرب ۳ است که نمی‌تواند اول باشد.

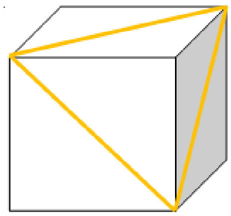
دقت کنید که اگر $n = ۱$ باشد تصاعد ۳، ۵، ۷ دارای سه عضو است. بنابراین مقدار حداکثر برابر ۳ است.

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن به هر نقطه برابر است با جمع تعداد راه‌هایی که می‌توان به آن نقطه رسید و بر همین اساس تعداد راه‌های رسیدن به هر نقطه را محاسبه می‌کنیم و جدول روبه‌رو به دست می‌آید:



۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

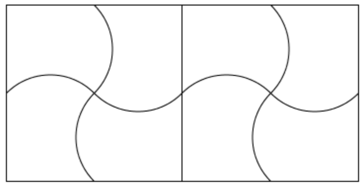


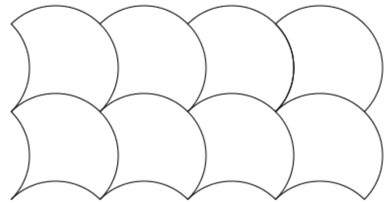
خطوط مذکور بر روی یک صفحه قرار دارند. بنابراین برای این که مجموع مربعات کمترین مقدار خود را اخذ کند باید نقطه‌ی P بر روی همان صفحه قرار داشته باشد. دلیل آن این است که اگر خارج صفحه در نظر بگیریم تصویر آن نقطه بر روی صفحه فاصله کمتری خواهد داشت و چون مثلث متساوی الاضلاع است باید این نقطه بر روی مرکز ثقل باشد. (برای چک کردن این موضوع هم می‌توانید مثلث متساوی‌الاضلاع مسئله را مثلثی مرکز صفر و رئوس $(۰,a)$، $(\frac{a\sqrt{۳}}{۲},\frac{-a}{۲})$ و $(\frac{-a\sqrt{۳}}{۲},\frac{-a}{۲})$ در نظر بگیرید و خواهید دید که کم‌ترین مجموع مربعات فاصله مربوط به مبدأ مختصات که مرکز ثقل مثلث است می‌باشد.) حال در مسئله‌ی اصلی اندازه‌ی ضلع مثلث برابر است با. $\sqrt{۲}$ است پس ارتفاع آن طبق قضیه‌ی فیثاغورس برابر $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ است و فاصله‌ی این نقطه تا ضلع مثلث برابر $\frac{۱}{\sqrt{۶}} = \frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ است که مربع آن برابر $\frac{۱}{۶}$ است و جمع سه تا از آن‌ها مساوی $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ادعا می‌کنیم که شرط لازم برای این که با یک کاشی بتوان صفحه را فرش کرد این است که تعداد فررفتگی‌ها و برآمدگی‌هایش با هم برابر باشند. فرض کنید یک کاشی a تورفتگی و b برآمدگی داشته باشد. حال برای یک عدد طبیعی مثل N، یک مربع $N \times N$ را در نظر بگیرید. تعداد کاشی‌های لازم برای فرش کردن این مربع برابر $N^{۲}$ است. دقت کنید که تعداد تورفتگی‌های کاشی‌ها درون این مربع حداقل برابر $aN^{۲} - ۴N$ است زیرا ممکن است حداکثر $۴N$تا از تورفتگی‌ها در ضلع‌های مربع بزرگ باشند. از طرف دیگر تعداد برآمدگی‌ها درون این مربع حداکثر برابر $bN^{۲}$ است. اما می‌دانیم اگر صفحه کاملاً کاشی‌کاری شده باشد باید برای هر تورفتگی یک برآمدگی داشته باشیم پس تعداد آن‌ها در درون مربع باید برابر باشد و این نتیجه می‌دهد که $aN^{۲} - ۴N \leq bN^{۲}$. پس $a - \frac{۴}{N} \leq b$. حال چون N عدد طبیعی دل‌خواهی است این نتیجه می‌دهد که $a \leq b$. با برعکس کردن استدلال برای تورفتگی‌ها و برآمدگی‌ها می‌توان نشان داد که $b \leq a$. پس در کل $a = b$ و تعداد برآمدگی‌ها و تورفتگی‌ها برابر هستند. بنابراین کاشی‌های شماره‌های ۱، ۳ و ۵ نمی‌توانند صفحه‌پرکن باشند. بنابراین تنها کاشی‌های شماره‌ی ۲و ۴ باقی می‌مانند که با این دو کاشی هم می‌توان صفحه را فرش کرد.

بنابراین فقط شکل‌های ۲ و ۴ می‌توانند صفحه‌پرکن باشند که با توجه به الگوی زیر این‌چنین هستند.





۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

می‌دانیم که اگر در مقایسه دو عدد توانی پایه‌های برابر باشد، عددی که توان برابر دارد بزرگ‌تر است و هم چنین اگر توان‌ها برابر باشد، عددی که پایه‌ی بزرگ‌تر دارد، بزرگ‌تر است و اگر پایه و توان عددی از دیگر بزرگ‌تر باشد عدد اول بزرگ‌تر است. بنابراین $۲^{۴۳۱} < ۲^{۶۴۲} = ۴^{۳۲۱}$. به علاوه

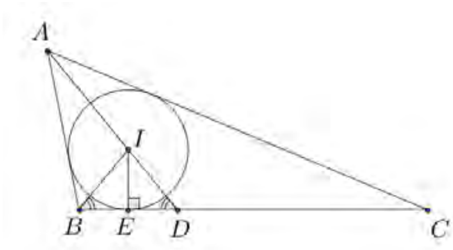
$$۴^{۳۲۱} = ۲^{۶۴۲} = (۲^{۵})^{۱۲۸} \times ۲^{۲} = ۳۲^{۱۲۸} \times ۲^{۲} > ۳۲^{۱۲۸} > ۳۱^{۴۲}$$

$$۴^{۳۲۱} = ۲^{۶۴۲} = (۲^{۵})^{۱۲۸} \times ۲^{۲} = ۳۲^{۱۲۸} \times ۲^{۲} > ۳۲^{۱۲۸} > ۲۱^{۴۳}$$

و داریم:

$$\begin{aligned} ۳^{۴۲۱} &= (۳^{۷})^{۶۰} \times ۳^{۱} = ۲۱۸۷^{۶۰} \times ۳^{۱} > ۲۰۴۸^{۶۰} \times ۳ \\ &= (۲^{۱۱})^{۶۰} \times ۳ = ۲^{۶۶۰} \times ۳ > ۲^{۶۶۰} \times ۲ = ۲^{۶۶۱} > ۲^{۶۴۲} = ۴^{۳۲۱} \end{aligned}$$

۱۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.



نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle B$ را رسم می‌کنیم. این نیم‌ساز هم مانند AD از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث(نقطه‌ی I) خواهد گذشت. بعد از آن از مرکز دایره‌ی محاطی I به ضلع عمود می‌کنیم. دو مثلث BIE و DIE با هم هم‌نهشت هستند. پس زاویه‌ی $\angle D_{۲}$ برابر زاویه‌ی $\angle B_{۱}$ نصف زاویه‌ی $\angle B$ است. هم‌چنین $\angle D_{۲}$ زاویه‌ی خارجی مثلث DAC هم هست. پس داریم:

$$\frac{\angle B}{۲} = \frac{\angle A}{۲} + \angle C \Rightarrow \angle B = \angle A + ۲\angle C$$
$$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = ۲\angle A + ۳\angle C \Rightarrow ۲\angle A + ۳\angle C = ۱۸۰^{\circ}$$

۱۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر زنبور ۶ بار به سمت چپ برود؛ محیط یک شش‌ضلعی را طی می‌کند و سر جای اول خود باز می‌گردد. در مورد سمت راست هم همین طور است.

حال کافی است دقت کنید که برای هر عدد طبیعی فرد n، ۲^n به صورت $۶k + ۲$ و برای هر عدد طبیعی زوج n، ۲^n به صورت $۶k + ۴$ می‌شود.

پس می‌توان فرض کرد که به جز حرکت اول که یک بار به سمت چپ می‌رود یکی در میان ۲ بار به راست و ۴ بار به چپ می‌رود. حال با طی کردن چند حرکت اولیه می‌توان دید که بر روی یک مسیر بسته حرکت می‌کند و بنابراین دور نمی‌شود! پس فاصله‌ی مکان نهایی از مکان اولیه کم‌تر از $۲^۵$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا فرض کنید روستاها را با A، B و C نشان دهیم به طوری که $AB = ۹$، $AC = ۱۴$ و $BC = ۱۹$. دقت کنید که اگر M نقطه‌ی وسط BC باشد، $MB = MC = ۹/۵$ و به علاوه

$$AM^۲ = \frac{AB^۲ + AC^۲}{۲} - \frac{BC^۲}{۴} = \frac{۱۹۶ + ۸۱}{۲} - \frac{۳۶۱}{۴} = ۴۸/۲۵ < ۹۰/۲۵ = (۹/۵)^۲$$

پس اگر مدرسه را در M بسازیم فاصله‌اش از سه روستا بیش‌تر از $۹/۵$ نیست و لذا $a \leq ۹/۵$. اما دقت کنید که نقطه‌ای در صفحه وجود ندارد که فاصله‌اش از هر دو B و C کم‌تر از $۹/۵$ باشد پس a نمی‌تواند کم‌تر از $۹/۵$ باشد و بنابراین در کل کم‌ترین مقدار ممکن $۹/۵$ است.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای این منظور باید از تقسیمات متوالی بر عدد -۲ انجام دهیم:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
۱۱۷ &=& (-۲)(-۵۸) + ۱ & ۷ &=& (-۲)(-۳) + ۱ \\
-۵۸ &=& (-۲)(۲۹) + ۰ & -۳ &=& (-۲)(۲) + ۱ \\
۲۹ &=& (-۲)(-۱۴) + ۱ & ۲ &=& (-۲)(-۱) + ۰ \\
-۱۴ &=& (-۲)(۷) + ۰ & -۱ &=& (-۲)(۱) + ۱
\end{array}$$

پس $۱۱۷ = (۱۱۰۱۱۰۱۰۱)_{-۲}$ که دارای ۶ رقم ۱ است. تنها کافی است با استقرا ثابت کنید که هر عدد صحیح در مبنای -۲ یک بسط یک‌تا خواهد داشت.

۲۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر از نقطه‌ی A شروع کند باید هر مسیری از سه مسیر روبه‌رویش را که طی می‌کند برگردد (به جز مسیر آخر). به‌تر است به جای این که مجبور بشود کل شاخه را برود و برگردد؛ از انتهای یک شاخه آغاز کند که مجبور به بازگشت مسیر نشود.

هم‌چنین اگر از C یا D آغاز کند باید بخشی از مسیر را برگردد.

پس تنها موارد باقی‌مانده B و E هستند که در انتهای شاخه‌های اصلی درخت قرار دارند. در مقایسه‌ی این دو باید به این نکته توجه و دقت کنیم که نقطه‌ی E بر روی یک شاخه به طول ۳ با ۳ تا شاخه منشعب قرار دارد و نقطه B بر روی یک شاخه به طول ۶ با ۴ تا انشعاب.
اگر از E آغاز کند مجبور است یکی از شاخه‌های اصلی که طول آن ۶ است و انشعاباتی دارد را برگردد ولی اگر از B آغاز کند می تواند از شاخه های اصلی که طول آن ۶ است برگردد و یا از شاخه اصلی که طول آن ۳ است برگردد که به وضوح حالت اخیر مسیر کم‌تری را برگشته است. پس کل مسافت طی‌شده آن کم‌تر خواهد شد.
بنابراین به‌ترین نقطه برای آغاز نقطه‌ی B خواهد بود و به‌ترین مسیر این است که پس از خوردن تمام میوه‌های شاخه‌ی خودش به شاخه‌ی سمت راست رفته و پس از آن به شاخه‌ی سمت چپ برود. که در طول این مسیر در به‌ترین حالت ۴۶ متر طی می‌کند که کم‌ترین میزان ممکن است.

۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ادعا می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n داریم: $n * ۱ = ۲n + ۱$ برای این منظور از استقرا استفاده می‌کنیم. حکم برای $n = ۱$ به دلیل فرض صورت سؤال درست است. حال داریم:

$$(\mathrm{n}+۱) * ۱ = ۱ * (n+۱) = (۱ * n) + (۱ * ۱) - ۱ = (۲n+۱) + ۳ - ۱ = ۲n + ۳$$

هم‌چنین ادعا می‌کنیم که برای هر عددی طبیعی n داریم: $n * n = (n+۱)^۲ - ۱$ برای این منظور هم از استقرا استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(n+۱) * (n+۱) &= (n+۱) * n + (n+۱) * ۱ - (n+۱) \\ &= (n+۱) * n + (۲n+۳) - (n+۱)\end{aligned}$$

حال باید مقدار $n * (n+۱)$ را محاسبه کنیم تا حکم مورد نظر اثبات شود:

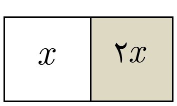
$$\begin{aligned}(n+۱) * n &= n * (n+۱) = n * n + n * ۱ - n \\ &= ((n+۱)^۲ - ۱) + \Big(۲n+۱\Big) - n = n^۲ + ۳n + ۱\end{aligned}$$

حال با جای‌گذاری در معادله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$(n+۱) * (n+۱) = (n^۲ + ۳n + ۱) + n + ۲ = (n+۲)^۲ - ۱$$

بنابراین $۱۰ * ۱۰ = ۱۲۰$ می شود.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



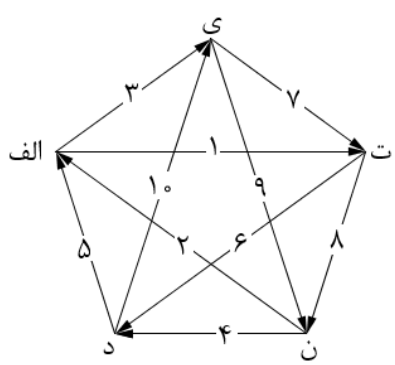
$۲^۹x$	$۲^۸x$

صفحه‌ی شطرنج را به ۱۶ تا مربع ۲×۲ مجاور افراز می‌کنیم. در این صورت در هر مربع ۲×۲ افراز شده مربع کوچک بالا- سمت راست سفید است و اگر مقدار آن خانه x باشد مقدار بقیه‌ی خانه‌های مربع ۲×۲ شامل آن خانه برحسب x به صورت جدول روبه‌رو خواهد بود. بنابراین نسبت مقدار خانه‌های سفید به کل خانه‌ها در این مربع برابر $\frac{x+۲^۹x}{x+۲x+۲^۸x+۲^۹x} = \frac{۵۱۳x}{۷۷۱x} \approx ۰.۶۶$ است. پس نسب خانه‌های سفید به کل خانه‌ها در کل جدول هم برابر همین عدد است.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید که طبق خواص مثلث می‌دانیم $BE = \frac{BC+AB-AC}{۲}$ که با توجه به فرض مسئله نتیجه می‌شود که $BE = \frac{BC+AB-AC}{۲} = \frac{۲(AC-AB)+AB-AC}{۲} = \frac{AC-AB}{۲} = \frac{BC}{۴} = \frac{BM}{۲}$. پس E نقطه‌ی وسط پاره‌خط BM و چون L هم وسط AM است K مرکز ثقل مثلث ABM و AE میانه‌ی این مثلث است. پس با توجه به خواص میانه‌ها می‌دانیم که $\frac{AK}{AE} = \frac{۲}{۳}$.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

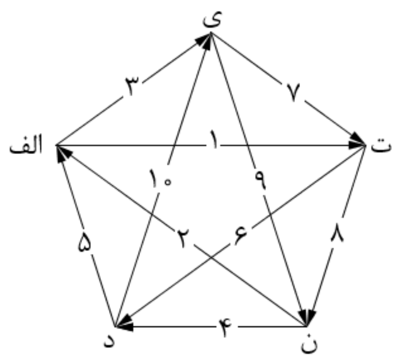


یک گراف جهت‌دار به این صورت می‌سازیم که حروف "الف، ن، د، ت و ی" را به عنوان رئوس اختیار می‌کنیم و به ازای هر بیت دو رأس مربوط به حرف ابتدایی و انتهایی آن بیت را با یالی جهت‌دار به هم وصل می‌کنیم. با این کار به گراف روبه‌رو می‌رسیم. (عددهای نوشته شده روی یال‌ها شماره‌ی بیت مربوط به آن یال را درصورت سؤال نشان می‌دهد.)

حال مشاعره در مسئله معادل با این می‌شود که نفر اول یک یال انتخاب کند و نفر بعد هر بار یالی غیرتکراری که ابتدای آن انتهای یال نفر قبلی باشد انتخاب می‌کند. هر کس که نتواند یالی انتخاب کند بازنده است. با توجه به تقارن وجود در گراف یال‌های $\{۱,۶,۱۰,۹,۲\}$ و همین طور $\{۳,۷,۸,۴,۵\}$ وضعیت مشابهی دارند. پس کافی است یک یال از هر دسته به عنوان یال شروع بازی انتخاب شود و وضعیت بازی بررسی شود.(با توجه به این نکته الآن می‌فهمیم که گزینه‌های (ب) و (د) نمی‌توانند پاسخ مسئله باشند.)

ابتدا فرض کنید که نفر اول یک یال از دسته‌ی اول مثلاً یال ۱ را انتخاب کند. ادعا می‌کنیم در این صورت نفر اول می‌تواند برنده شود. نفر دوم باید از بین $\{۶,۸\}$ یک یال انتخاب کند. اگر یال ۶ را انتخاب کند نفر

اول یال ۵ و اگر یال ۸ را برگزیند، نفر اول یال ۲ را انتخاب می‌کند. با این انتخاب‌ها بعد از سه حرکت بار دیگر در رأس "الف" هستیم و نفر دوم این بار مجبور است یال ۳ را انتخاب کند و بعد از آن نفر اول یال ۷ را انتخاب می‌کند. با این حرکات دوباره به رأس "ت" که قبلاً در آن بوده‌ایم بازگشته‌ایم و در این مرحله نفر دو به ناچار باید یالی از بین {۶,۸} که قبلاً انتخاب نکرده را انتخاب کند. بعد نفر اول استراتژی حرکت دومش را تکرار می‌کند و به این صورت برای بار سوم به رأس "الف" برگشته‌ایم با این تفاوت که این بار انتخاب جدیدی نداریم و بنابراین نفر اول حتماً برنده است. پس در ۵ یال {۱,۶,۱۰,۹,۲} نفر اول می‌تواند برنده شود.



حال ادعا می‌کنیم که در ۵ یال دیگر مثلاً یال شماره‌ی ۳ نفر دوم می‌تواند برنده باشد. در این حالت نفر دوم یال ۷ را انتخاب می‌کند. حال نفر اول برای انتخاب یال بعدی دو حالت دارد.

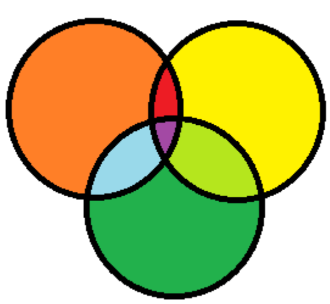
حالت اول. یال ۸ را انتخاب کند. در این حالت نفر دوم یال ۴ را انتخاب می‌کند. بعد از این نفر یک یکی از دو یال ۱۰ یا ۵ را انتخاب می‌کند. می‌توان به سادگی بررسی کرد که با انتخاب هر کدام از این دو یال انتخاب‌های بعدی به هر نفر تحمیل می‌شود و با انتخاب یال‌ها همه‌ی یال‌ها استفاده می‌شوند. پس آخرین یال را نفر دو استفاده می‌کند و بنابراین نفر اول که گزینه‌ای برای انتخاب ندارد، بازنده است.

حالت دوم. یال ۶ را انتخاب کند. در این صورت نفر دوم یال ۱۰ را انتخاب می‌کند. با این انتخاب نفر اول مجبور از یال ۹ را انتخاب کند و در مرحله‌ی بعد نفر دوم باید یالی که از رأس "ن" خارج می‌شود را برگزیند. اگر نفر دوم یال ۲ را انتخاب کند، مشابه حالت قبل می‌توان چک کرد که حرکات بعدی به دو نفر به تحمیل می‌شود و در نهایت همه‌ی یال‌ها استفاده می‌شود که این باعث می‌شود نفر دوم پیروز شود.

پس در کل نفر اول با شروع از ۵ یال {۱,۶,۱۰,۹,۲} می‌تواند برنده‌ی بازی باشد.

۲۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با استفاده از هر کدام از این مجموعه‌ها می‌توان مجموعه‌های مجزای زیر را پدید آورد. برای این منظور کافی است دقت کنید که عمل اشتراک را می‌توانیم با استفاده از اجتماع و مکمل داشته باشیم. تعداد کل این زیرمجموعه‌ها ۸ تا هستند

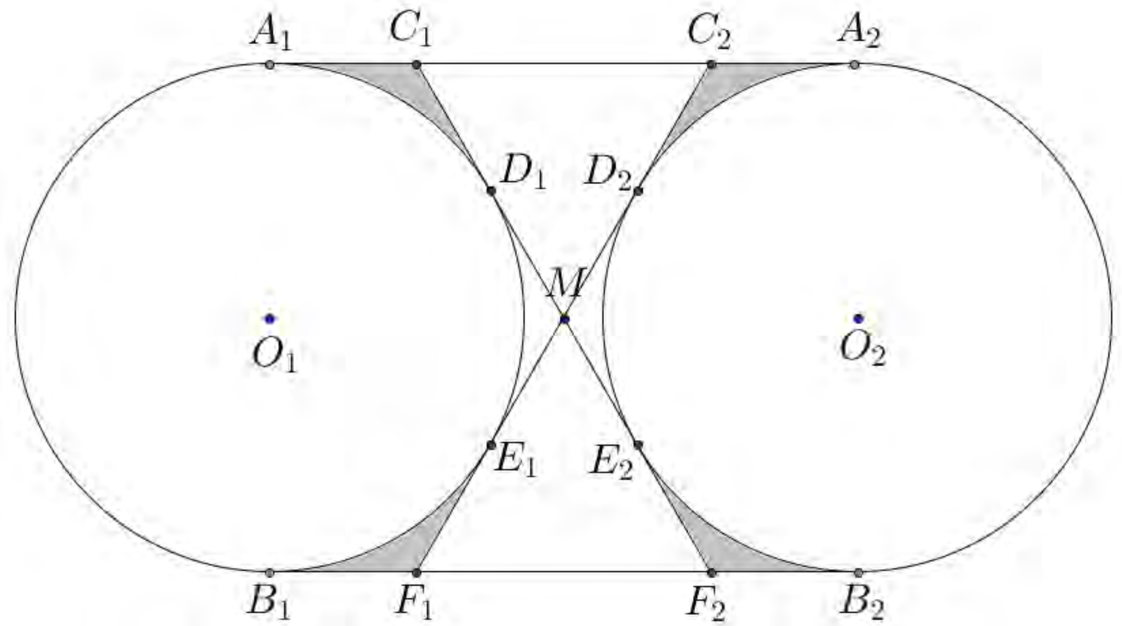


که همگی از هم مجزا هستند. این زیرمجموعه‌ها در شکل با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند. (یک ناحیه بیرونی هم هست که با رنگ سفید مشخص شده است.)

حال ما می‌توانیم با کنار هم قرار دادن هر تعداد دل‌خواه از این ۸ مجموعه یک مجموعه‌ی جدید ایجاد کنیم. مثلاً با اجتماع زیر مجموعه‌ی زرد و نارنجی و آبی یک مجموعه به دست می‌آید. پس تعداد کل مجموعه‌های ممکن برابر $۲^۸$ است.

۲۸. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که با توجه به طول شعاع دایره‌ها و فاصله‌ی بین مرکزهای آن‌ها دو دایره خارج از هم قرار دارند. حال ادعا می‌کنیم نواحی رنگی شکل زیر تنها نقاطی خارج از دایره‌ها هستند که هر خط گذرنده از آن‌ها حداقل یکی از دو دایره را قطع می‌کند. (خط‌های رسم شده مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره هستند.)



ابتدا دقت کنید که اگر نقطه‌ای درون مثلث‌های MF_1F_2 و یا MC_1C_2 باشد خط واصل بین آن نقطه و M هیچ‌کدام از دایره‌ها را قطع نمی‌کند. اگر نقطه‌ای هم بیرون از دو دایره و چهارضلعی $A_1A_2B_2B_1$ باشد به راحتی می‌توان از آن نقطه خطی گذرند که هیچ‌کدام از دایره‌ها را قطع نکند. اگر هم نقطه‌ای درون قسمت‌های خارج از دایره‌های مثلث‌های MD_1E_1 و MD_2E_2 باشد. خط مماس بر دایره‌ی نزدیک‌تر از آن نقطه تنها در یک نقطه آن دایره را قطع می‌کند و با دایره‌ی دیگر اشتراکی ندارد. حال می‌توان این خط مماس را اندکی تغییر داد طوری که دایره‌ی نزدیک‌تر را هم قطع نکند. حال نشان می‌دهیم که اگر نقطه‌ای

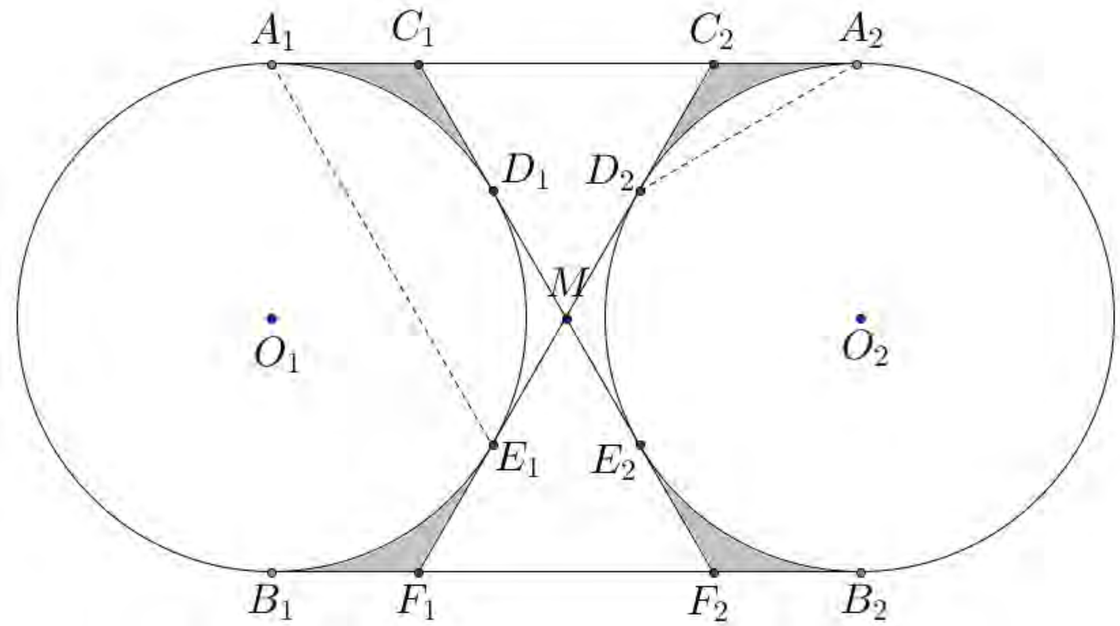
در یکی از نواحی رنگی مثلاً قسمت رنگی درون مثلث $C_2A_2D_2$ باشد هر خط گذرا از آن دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع می‌کند.

برای این منظور از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم. نقطه‌ی X درون مثلث ABC قرار دارد. هر خط گذرا از X یا از یک رأس و یک ضلع مثلث عبور می‌کند یا دقیقاً دو ضلع را قطع می‌کند.

اثبات این لم به سادگی و با در نظر گرفتن دو نیم‌خطِ خط گذرنده از X انجام می‌شود.

حال در مسئله‌ی اصلی نقطه‌ای را درون ناحیه‌ی رنگی مثلث $C_2A_2D_2$ و یک خط دل‌خواه گذرنده از آن نقطه را در نظر بگیرید.



اگر ضلع A_2D_2 را قطع کند یا از یکی از رئوس مثلث بگذرد با دایره‌ی به مرکز O_2 تقاطع دارد. پس فرض کنید خط با A_2D_2 اشتراکی ندارد. بنابراین باید دو ضلع A_2C_2 و D_2C_2 را قطع کند. حال دقت کنید که از آن‌جا که این خط با C_2E_1 تقاطع دارد باید شامل نقطه‌ای درون مثلث $A_1C_2E_1$ باشد. دقت کنید که این خط با ضلع C_2E_1 از این مثلث تقاطع دارد ولی با ضلع C_2A_1 تقاطع ندارد.(زیرا تقاطع این خط با خط شامل C_2A_1 در پاره‌خط A_2C_2 است.) بنابراین طبق لم بالا این خط به ناچار باید با ضلع A_1C_1 اشتراک داشته باشد و بنابراین این خط دایره‌ی به مرکز O_2 را قطع می‌کند. با توجه به تقارن شکل اثبات ادعا برای دیگر نواحی رنگ‌شده هم مشابه است و بنابراین اثبات درستی ادعا کامل می‌شود.

بنابراین کافی است مساحت چهار ناحیه‌ی رنگ‌شده‌ی شکل را محاسبه کنیم. برای این منظور دقت کنید که $\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{D_۲O_۲}{O_۲M} = \sin(\angle D_۲MO_۲)$ پس $\angle D_۲MO_۲ = ۶۰^\circ$ و به تبع آن با اندکی محاسبه خواهیم داشت که:

$$\angle D_۲O_۲A_۲ = ۶۰^\circ \Rightarrow \angle C_۲O_۲D_۲ = ۳۰^\circ \Rightarrow C_۲A_۲ = A_۲\,\mathrm{O}_۲\,.\tan(۳۰^\circ) = ۱$$

پس برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی مورد نظر داریم:

$$\text{مساحت ناحیه‌ی رنگی} = ۸\times (C_۲O_۲A_۲)\,\text{مساحت مثلث} - \frac{۲}{۳}\times \text{مساحت دایره}$$

$$= ۸\times\frac{۱\times\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۲}{۳}\times\pi(\sqrt{۳})^۲ = ۴\sqrt{۳} - ۲\pi$$

۲۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

راه‌حل اول. فرض کنید رنگ‌های مورد استفاده را با چهار شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ نمایش دهیم. به این ترتیب برای رنگ‌آمیزی چهارخانه‌ی بالا راست جدول $۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$ حالت داریم. فرض کنید چهار خانه‌ی بالا سمت راست جدول به صورت زیر رنگ شده باشند.

			۴	۱
			۳	۲

در این صورت برای دو خانه‌ی اول سطر سوم باید شامل ۱ و ۴ و دو خانه‌ی اول سطر چهارم باید شامل ۲ و ۳ باشند. حال بر حسب حالت‌های مختلفی که این چهار خانه می‌توانند رنگ‌آمیزی شوند مسئله را حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول.

			۴	۱
			۳	۲
			۱	۴
			۳	۲

در این حالت خانه‌ی دوم از ستون سوم در سه مربع ۲×۲ حاضر است، پس نمی‌تواند برابر ۱، ۴ و ۳ باشد و لذا به ناچار ۲ است. با مشخص شدن این خانه می‌توان رنگ بقیه‌ی خانه‌های این ستون و با استدلال مشابه رنگ بقیه‌ی خانه‌های جدول را به طور یک‌تا مشخص کرد.

حالت دوم.

۱	۴			
۲	۳			
۴	۱			
۳	۲			

در این حالت هم کاملاً مشابه حالت اول رنگ بقیه‌ی جدول به طور یک‌تا تعیین می‌شود.(ابتدا خانه‌ی دوم از ستون سوم که باید برابر ۲ باشد، سپس بقیه‌ی خانه‌های این ستون و به همین شکل بقیه‌ی جدول)

حالت سوم.

۱	۴			
۲	۳			
۱	۴			
۳	۲			

این حالت هم مشابه حالت‌های قبلی بقیه‌ی جدول به طور یک‌تا تعیین می‌شود با این تفاوت که ابتدا رنگ خانه‌ی سوم از ستون سوم مشخص می‌شود.

حالت چهارم.

۱	۴			
۲	۳			
۱	۴			
۲	۳			

در این جا برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون سوم دو حالت ۱ و ۲ داریم. با انتخاب رنگ این خانه رنگ بقیه‌ی ستون تعیین می‌شود. سپس برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون چهارم که رنگ کلیه‌ی خانه‌های این ستون را تعیین می‌کند هم دو حالت ۳ و ۴ داریم. در نهایت برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون پنجم هم دو حالت ۱ و ۲ را داریم. با انتخاب رنگ این خانه ستون پنجم هم تعیین می‌شود. پس در این حالت برای رنگ‌آمیزی جدول ۸ حالت داریم.

بنابراین در کل با توجه به انتخاب رنگ ۴ خانه‌ی اولیه $۲۶۴ = ۲۴ \times ۱۱۲ = (۸ + ۱ + ۱ + ۱) \times ۲۴$ حالت داریم.

راه‌حل دوم. می‌توان به سادگی نشان داد که در هر چنین جدولی یا خانه‌های همه‌ی سطرها یک در میان رنگ‌شده‌اند یا خانه‌های همه‌ی ستون‌ها. به علاوه اگر خانه‌های یک سطر به صورت یک در میان رنگ شده باشند می‌توان نشان داد که خانه‌های همه‌ی سطرها باید یک در میان رنگ شده باشند و حکم مشابه برای ستون‌ها هم درست است. پس باید تعداد جدول‌هایی را بشماریم که سطرها یا ستون‌های آن به صورت یک در میان رنگ شده اند.

در حالتی که سطرها یک در میان باشند. در سطر اول ۴ حالت برای رنگ خانه‌ی اول و ۳ حالت برای رنگ خانه‌ی دوم داریم که می‌شود ۱۲ حالت. برای سطر دوم ۲ حالت و سطر سوم نیز ۲ حالت و سطر چهارم هم ۲ حالت. که در کل ۹۶ حالت می‌شود.

در حالتی که ستون‌ها یک در میان باشند: برای ستون اول ۴ حالت برای رنگ خانه‌ی اول و ۳ حالت برای رنگ خانه‌ی دوم داریم که می‌شود ۱۲ حالت. برای ستون دوم ۲ حالت و ستون سوم نیز ۲ حالت و ستون چهارم هم ۲ حالت و هم‌چنین ستون آخر که در کل ۱۹۲ حالت می‌شود.

جدول‌هایی که هم سطر و هم ستون آن ها یک در میان است در خانه‌ی گوشه سمت چپ ۴ حالت، خانه‌ی مجاور ۳ حالت و خانه زیرین آن ۲ حالت دارد و بقیه به طور یک‌تا تعیین می‌شوند و بنابراین تعداد آن‌ها ۲۴ است.

در نهایت تعداد کل جدول‌ها به کمک اصل شمول و عدم شمول به دست می‌آید:

$$۲۶۴ = ۹۶ + ۱۹۲ - ۲۴$$

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

گزینه‌های (الف) و (ه) به دلیل تقارن حذف می‌شوند؛ به این معنی که اگر نقطه‌ی (α, β) در هر کدام از این معادله‌ها صدق کند نقطه‌ی (β, α) هم صدق می‌کند. بنابراین باید نمودار جواب آن‌ها باید نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم محورهای مختصات متقارن باشد که نمودار مسئله این طور نیست.

دلیل رد گزینه‌ی (ب) این است که اگر در معادله‌ی این گزینه قرار دهیم $y = ۰$ معادله به صورت $\cos x + x^۲ = ۲$ در می‌آید که یک تابع زوج است یعنی به ازای جمیع مقادیر x که در این رابطه

صدق می‌کند $-x$ نیز صدق می‌کند. یعنی باید نقاطی که نمودار محور x را قطع کرده نسبت به خط محور yها متقارن باشد که نمودار صورت سؤال چنین نیست.

دلیل رد گزینه‌ی (ج) این است که اگر در معادله قرار دهیم $x = ۰$ معادله به صورت $y = ۱$ تبدیل می‌شود، یعنی مجموعه‌ی جواب رابطه‌ی مربوط به این گزینه باید محور y ها را باید تنها در یک نقطه قطع کند که باز هم نمودار رسم‌شده در صورت سؤال این‌گونه نیست.

پس این ۴ گزینه رد می‌شوند و تنها گزینه‌ی (د) باقی می‌ماند که صحیح است.