خاصیت نقطه ثابت (84-1)

۹۰ دقیقه

می‌گوییم شکل A خاصیت نقطه ثابت دارد اگر هر تابع پیوسته از A به A نقطه ثابت داشته باشد.

مثال ۱. طبق قضیه‌ی نقطه ثابت براوئر، دیسک بسته‌ی nبعدی خاصیت نقطه ثابت دارد.

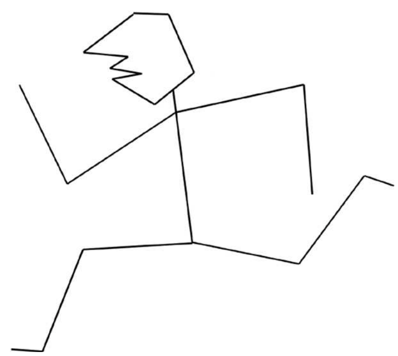
مثال ۲. دایره خاصیت نقطه ثابت ندارد.

کدام یک از شکل‌های زیر خاصیت نقطه ثابت دارد؟

الف) کره‌ی دو بعدی: مجموعه نقاطی از $\mathbb{R}^۳$ که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدأ برابر ۱ است.

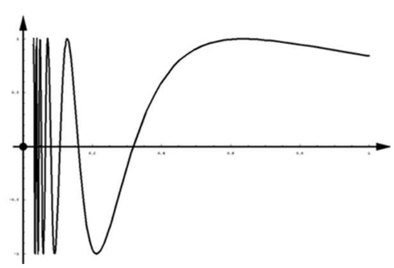
ب) صلیب: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ | xy=۰, |x|+|y|\leq ۱\}$.

پ) مرد دونده: شکل بسته‌ی زیر که از تعداد پاره‌خط تشکیل شده‌است.



ت) نمودار تابع $f:[۰,۱]\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف شده‌است.

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

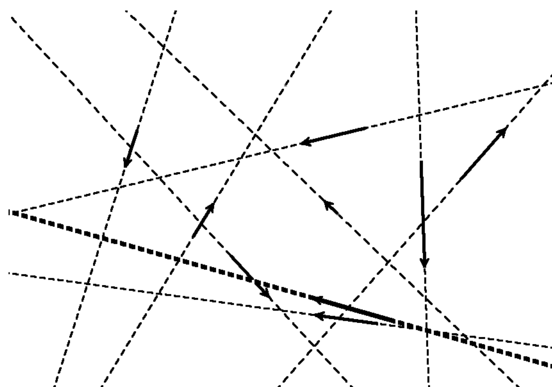


اگر در مورد خاصیت نقطه ثابت، نکته‌ی جالبی به ذهنتان می‌رسد بنویسید. اگر توانستید، ادعاهای خود را ثابت کنید.

بردارهای متحرک (84-2)

۴۵ دقیقه

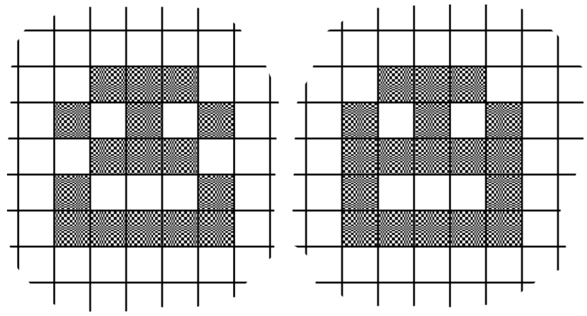
تعدادی متناهی بردار در صفحه قرار داده شده‌است. هر بردار را می‌توانیم به دل‌خواه در راستای خود جلو یا عقب ببریم و اگر دو بردار از یک نقطه شروع شده باشند می‌توانیم هر دو را حذف کنیم و به جایشان برداری با شروع از همان نقطه و به اندازه‌ی حاصل‌جمع دو بردار قرار دهیم. اگر جمع دو بردار مذکور صفر باشد برداری جای‌گزین نمی‌کنیم. با انجام این دو نوع عمل، با روش‌های مختلف ممکن است به یک تک بردار برسیم. نشان دهید اگر از دو روش مختلف به دو تک بردار برسیم، آن دو را می‌توان با جلو و عقب بردن در راستای خود به هم تبدیل کرد.



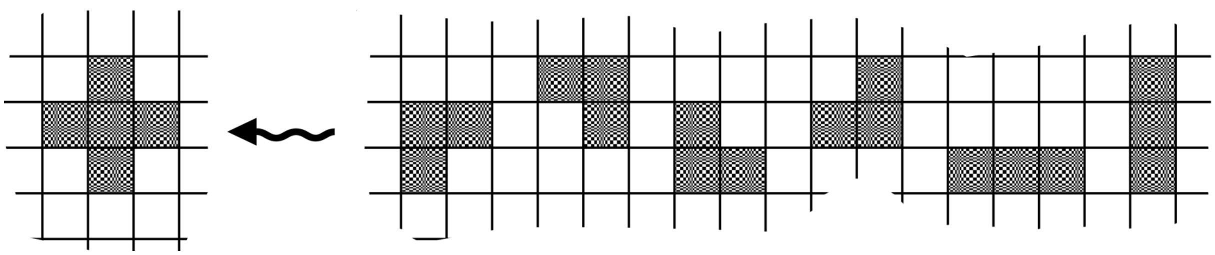
n-مربعی (84-3)

۷۵ دقیقه

صفحه‌ی مشبک را در نظر بگیرید. منظور از یک n-مربعی شکلی یک‌پارچه شامل n مربع واحد است. به عنوان مثال شکل سمت راست یک ۱۸-مربعی است ولی شکل سمت چپ یک ۱۶-مربعی نیست.



$f(n)$ کوچک‌ترین عدد طبیعی است که یک $f(n)$-مربعی داشته باشیم که شامل تمام n-مربعی‌ها باشد. به راحتی می‌توان دید که $f(۳) = ۵$.



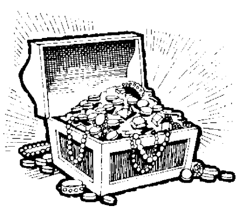
ما ثابت کرده‌ایم $۱۰۰۰۰ \leq f(۱۳۸۴) \leq ۹۶۰۰۰۰$. برای $f(n)$ کران پایین و بالا به دست آورید. هر چه می‌توانید در مورد $f(n)$ ثابت کنید.

پرتاب سکه (84-4)

۹۰ دقیقه

الف) پرده‌ی اول (سال ۱۸۷۲ میلادی، تگزاس!)

سه تن از جویندگان گنج پس از مدت‌ها صندوقی پر از جواهرات ارزش‌مند و قیمتی پیدا کرده‌اند و توانسته‌اند همه‌ی جواهرات غیر از یک سکه را بین خود تقسیم کنند. هر سه نفر با قرعه‌کشی بر سر تصاحب سکه موافق‌اند به شرطی که قرعه‌کشی عادلانه باشد (یعنی احتمال برنده شدن هر کدام $\frac{۱}{۳}$ باشد). ولی تنها ابزار موجود برای این کار همان سکه است! با فرض این که سکه سالم باشد (یعنی احتمال آمدن دو روی آن در هر پرتاب، برابر باشد) روشی عادلانه برای قرعه‌کشی ارایه کنید.



ب) پرده‌ی دوم (سال ۱۳۸۴ هجری شمسی، تهران، دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف)

بحث بر سر این است که اگر $۰ < \alpha < ۱$ عددی مشخص باشد، آیا با در دست داشتن سکه‌ای سالم می‌توان روشی برای قرعه‌کشی بین دو نفر طراحی کرد که احتمال برنده شدن یکی از این دو نفر α باشد؟ توجه کنید که حالت خاص $\alpha = \frac{۱}{۳}$ همان مسئله‌ی پرده‌ی اول است. ولی این بار α می‌تواند حتی گنگ باشد؛ مثلاً $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$! نشان دهید پاسخ این سؤال مثبت است.

پ) پرده‌ی سوم (سال ۱۳۸۴ هجری شمسی، اهواز، استادیوم فوتبال تختی)

بازی دو تیم صباباتری و فولاد خوزستان تا لحظاتی دیگر آغاز می‌شود. داور باید برای تعیین زمین دو تیم در نیمه‌ی اول سکه پرتاب کند ولی در سالم بودن سکه‌ی داور تشکیک شده‌است! روشی به داور پیشنهاد کنید که با استفاده از همان سکه‌ی مشکوک (یعنی سکه‌ای که احتمال رو آمدن آن عددی نامعلوم در بازه‌ی $(۰, ۱)$ است) بتواند به طور عادلانه زمین را تعیین کند.

ت) پرده‌ی‌آخر (تابستان ۱۳۸۴، تهران، باشگاه دانش‌پژوهان جوان)

در پرده‌ی آخرِ یکی از سؤالات امتحان خلاقیت پایان دوره‌ی ریاضی به نام «پرتاب سکه»، به طور ضمنی از دانش‌آموزان خواسته شده‌است که با در دست داشتن سکه‌ای که از سالم بودن آن بی‌اطلاعیم، آزمایشی طراحی کنند که احتمال موفقیت در آن عدد داده شده‌ی α باشد.

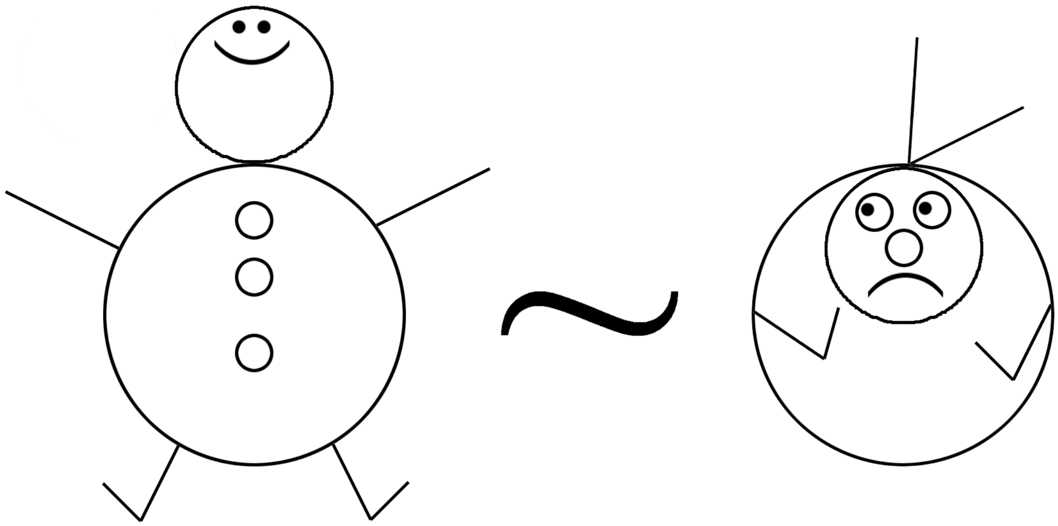
توضیح. در هر یک از سؤالات پیش روشی مناسب است که به احتمال ۱ در متناهی بار پرتاب سکه به پایان برسد. روش شما باید دارای این ویژگی باشد ولی لازم نیست این موضوع را ثابت کنید.

اشکال تکه‌تکه هم‌نهشت (84-5)

۹۰ دقیقه

دو زیرمجموعه‌ی A, B از خط ($\mathbb{R}$) یا صفحه ($\mathbb{R}^۲$) را هم‌نهشت می‌گوییم اگر نگاشت یک‌به‌یک و پوشایی از A به B وجود داشته باشد که فاصله‌ها را تغییر ندهد. در این حالت می‌نویسیم $A \simeq B$. اگر بتوان دو افراز $A = A_۱ \cup \ldots \cup A_n$ و $B = B_۱ \cup \ldots \cup B_n$ ارائه کرد که $A_i \simeq B_i$، آن‌گاه A, B را تکه‌تکه هم‌نهشت می‌گوییم (n می‌تواند هر عدد طبیعی دل‌خواهی باشد). در این صورت از نماد $A \sim B$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. دو شکل زیر تکه‌تکه هم‌نهشت هستند.



مثال ۲. مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج و مجموعه‌ی اعداد طبیعی، تکه‌تکه هم‌نهشت هستند.

در هر کدام از موارد زیر تعیین کنید که آیا دو مجموعه‌ی معرفی شده، تکه‌تکه هم‌نهشت هستند یا خیر؟

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد مرکب.

ب) مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گویا با بسط اعشاری مختوم (یعنی اعدادی که در بسط اعشاری آن‌ها پس از ممیز، متناهی رقم غیرصفر وجود دارد).

پ) مجموعه‌ی اعداد گویای کم‌تر از $\sqrt{۲}$ و مجموعه‌ی اعداد گویای کم‌تر از $\sqrt{۳}$.

ت) مجموعه‌ی نقاط صفحه که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدأ کم‌تر از ۱ است و همان مجموعه منهای مبدأ.

حدس abc (84-6)

۶۰ دقیقه

هرگاه m عددی طبیعی باشد، $rad(m)$ را حاصل‌ضرب تمام عوامل اول متمایز m تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال $rad(۸) = ۲$ و $rad(۱۲) = ۶$. حدس abc به قرار زیر است:

اگر $\epsilon > ۰$ عددی دل‌خواه باشد آن‌گاه عدد K وابسته به ϵ وجود دارد که به ازای هر سه عدد صحیح ناصفرِ نسبت به هم اول مانند a, b, c با شرط $a + b = c$ داریم:

$$max\{|a|, |b|, |c|\} \leq K(rad(abc))^{۱+\epsilon}$$

با استفاده از حدس abc هر یک از احکام زیر را ثابت کنید (استفاده هم نکردید، نکردید!).

الف) قضیه‌ی آخر فرما یعنی این که «$X^n + Y^n = Z^n$ برای $n \geq ۳$ در اعداد طبیعی جواب ندارد» از nای به بعد درست است؛ یعنی عدد $n_۰ \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $n \geq n_۰$، معادله‌ی $X^n + Y^n = Z^n$ در اعداد طبیعی جواب ندارد.

ب) عدد طبیعی n را قوی می‌نامیم هرگاه توان تمام عوامل اول آن بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد. نشان دهید تعداد سه‌تایی‌های متوالی از اعداد طبیعی که هر سه قوی باشند متناهی است.

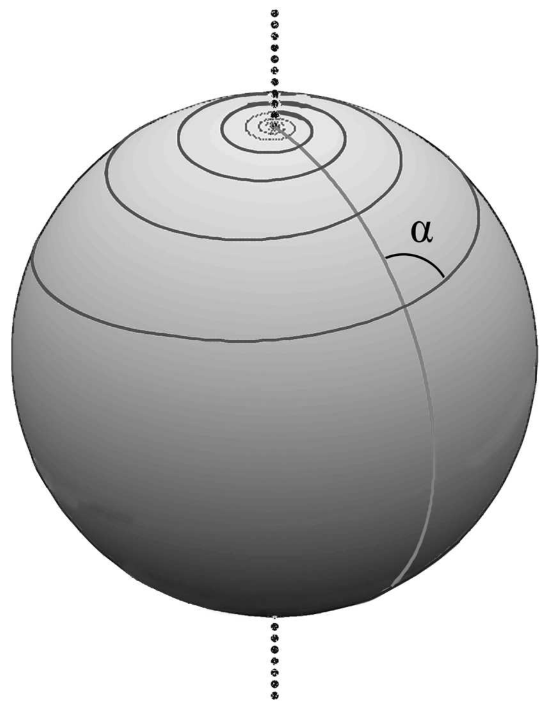
پ) نشان دهید تعداد اعداد گویا مانند $\frac{p}{q}$ که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند متناهی است. ($p, q \in \mathbb{N}$)

$$\left| \sqrt[۳]{۲} - \frac{p}{q} \right| < \frac{۲^{۱۳۸۴}}{q^۳}$$

پیش به سمت شمال شرقی (84-7)

۶۰ دقیقه

هواپیمایی با شروع از نقطه‌ای روی استوا با سرعت ثابت v به نحوی پرواز می‌کند که همیشه رو به شمال شرقی است و با نصف‌النهار زاویه‌ی ثابت α می‌سازد ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). فرض کنید شعاع زمین برابر R باشد.



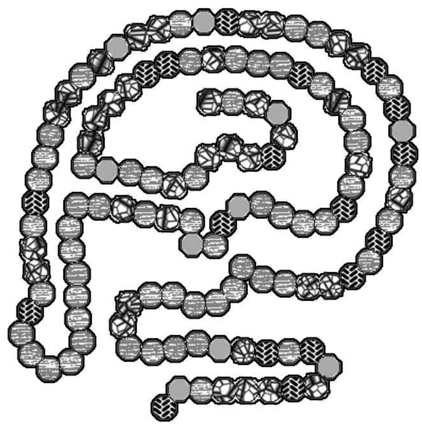
الف) آیا هواپیما هیچ‌وقت به قطب شمال می‌رسد؟ اگر بله، پس از چه مدت؟

ب) آیا هواپیما در طول سفرش متناهی بار دور محور زمین می‌چرخد؟ اگر بله، چند بار؟

کامپیوتر پروتئینی (84-8)

۹۰ دقیقه

در آزمایش‌گاه بیوتکنیک، آزمایش‌هایی بر روی پروتئین‌ها و تغییرات آن‌ها به منظور ساختن یک کامپیوتر پروتئینی در دست انجام است. پروتئین‌های مورد استفاده رشته‌هایی متناهی هستند که از هفت آمینواسید A, B, C, O, H, F, N تشکیل شده‌اند. یک واکنش یعنی تغییری به صورت $S_۱ \rightarrow S_۲$ که $S_۱, S_۲$ دو رشته از آمینواسیدها هستند. اگر یک پروتئین را تحت این واکنش قرار دهیم اولین زیررشته‌ی $S_۱$ای که در پروتئین وجود دارد به رشته‌ی $S_۲$ تبدیل می‌شود. ممکن است طرف دوم واکنش ($S_۲$) تهی باشد که در این صورت اولین $S_۱$ موجود حذف خواهد شد!



مثال. $BANANA$ (موز) در اثر واکنش $NA \rightarrow N$ تبدیل به $BANNA$ (بنّا) می‌شود.

یک فرایند یعنی تعدادی واکنش که به ترتیب اولویت شماره‌گذاری شده‌اند. نحوه‌ی تغییر پروتئین در یک فرایند به این صورت است که در هر لحظه اولین واکنش قابل انجام (به ترتیب اولویت واکنش‌ها) بر روی پروتئین اجرا می‌شود و این کار آن‌قدر ادامه می‌یابد تا دیگر هیچ واکنشی بر روی پروتئین نهایی قابل انجام نباشد.

مثال. در فرایندی به شکل

۱) $AA \rightarrow A$

۲) $AB \rightarrow BA$

۳) $A \rightarrow$

پروتئین $ABBAABA$ به صورت زیر تغییر می‌کند:

$ABB\underline{AA}BA$

$\underline{AB}BABA$

$B\underline{AB}ABA$

$BB\underline{AA}BA$

$BB\underline{AB}A$

$BBB\underline{AA}$

$BBB\underline{A}$

BBB

البته گاهی ممکن است یک فرایند بد طراحی شده باشد و هیچ‌گاه به پایان نرسد که چنین وضعی آزمایش‌گاه را با خطرات جدی مواجه خواهد کرد! در قسمت‌های (الف) و (ب) دو فرایند ارائه می‌شود و شما باید تشخیص دهید که آیا خطرناک هستند؟ یعنی آیا ممکن است اگر این فرایندها روی پروتئین خاصی اعمال شوند، فرایند هیچ‌گاه پایان نپذیرد؟

الف)

۱) $NO \rightarrow OONN$

ب)

$$
\begin{aligned}
&۱)\quad HHCC \to HCCH\\
&۲)\quad CC \to CH
\end{aligned}
$$

در قسمت‌های (پ) و (ت) شما باید به منظور ساختن کامپیوتر پروتئینی فرایندهایی طراحی کنید که عملیات خاصی را انجام دهند.

پ) فرایندی که پروتئین به طول n از A را به پروتئین به طول ۲^n از Bها تبدیل کند.

$$\underbrace{AA\ldots A}_{n} \longrightarrow \underbrace{BB\ldots B}_{۲^n}$$

ت) فرایندی که پروتئینی که از n تا A و m تا B پشت سر هم تشکیل شده را به پروتئینی با mn تا C تبدیل کند.

$$\underbrace{A\ldots A}_{n}\underbrace{B\ldots B}_{m} \longrightarrow \underbrace{CC\ldots C}_{mn}$$

از قسمت‌های (پ) و (ت) نتیجه می‌شود که توابع $F(n) = ۲^n$ و $G(m,n) = mn$ توسط این کامپیوتر پروتئینی قابل محاسبه هستند. توابع محاسبه‌پذیر دیگری پیدا کنید و نتایج جالبی به دست آورید.