به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۳

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

به ازای هر جمله‌ی ax^ix^j، جمله‌ی ax^jx^i نیز وجود دارد که در مجموع ضریبی زوج می‌سازد مگر اینکه $i=j$. به ازای حالاتی که i فرد باشد و ضریب x^i نیز زوج است، جمله‌ی x^{2i} ضریب زوج خواهد داشت.

در نتیجه به ازای $i=0,4,8,12,16$ ضرایبِ x^i، فرد هستند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بیایید از آخر مسئله را حل کنیم. فرض می‌کنیم که در حال حاضر روی سنگ iاُم هستیم و تعداد روش‌های مختلف برای رسیدن به سنگ ۷اُم را یادداشت می‌کنیم. ابتدا مسئله را برای سنگ ۷اُم حل می‌کنیم (۱ روش). سپس برای سنگ ۶اُم و ...

در هر مرحله کافی است که برای سنگ iاُم، مجموع تعداد روش‌های سنگ‌های $i+1$اُم تا $2i$اُم را محاسبه کنیم. در نتیجه جواب مسئله این‌گونه به دست می‌آید:

$$7:1 \rightarrow 6:1 \rightarrow 5:2 \rightarrow 4:4 \rightarrow 3:7 \rightarrow 2:11 \rightarrow 1:11$$

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

دو حالت برای انتخاب زیرمجموعه‌ها ممکن است:

حالت اول: یکی از اعضا در سه زیرمجموعه آمده باشد. تعداد حالات برابر است با: $6\times\binom{5}{3}=60$

حالت دوم: هر عضو دقیقا در دو زیرمجموعه آمده است. تعداد حالات برابر است با: $\binom{6}{3}=20$

تعداد کل روش‌ها برابر مجموع این دو حالت یعنی ۸۰ است.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم n^2 بر ۳ برابر صفر یا یک است پس این چنین عددی به صورت $3k$ و یا $3k+1$ است.

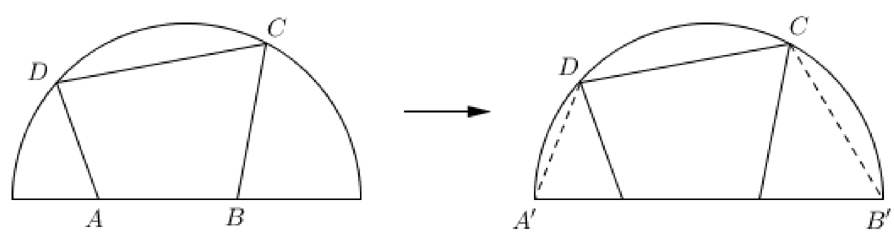
اگر به صورت $3k$ باشد: $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ بر ۳ بخشپذیر است. در نتیجه تنها به ازای $\left[\frac{n^2}{3}\right]=3$ عدد اول خواهیم داشت.

اگر به صورت $3k+1$ باشد: $\left[\frac{n^2}{3}\right]=\frac{(n-1)(n+1)}{3}$. در نتیجه تنها در صورتیکه $n=4$ باشد، $\left[\frac{n^2}{3}\right]=5$ عدد اول خواهد بود.

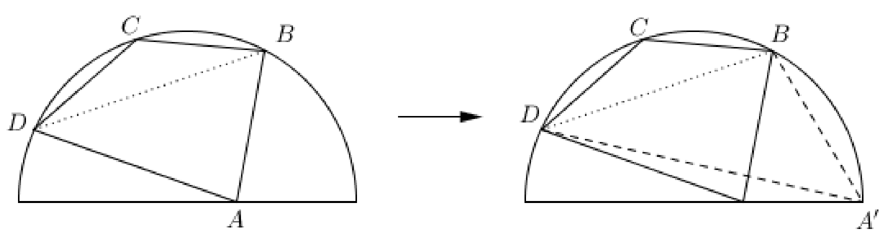
در مجموع دو عدد با ویژگی سوال وجود دارد.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا ادعا می‌کنیم که چهارضلعی که بیش‌تری مساحت را دارد، همه‌ی رئوسش روی محیط نیم‌دایره قرار دارند. دقت کنید که حداکثر دو رأس از رئوس چهارضلعی می‌تواند روی قطر نیم‌دایره باشد.
اگر مطابق شکل زیر دقیقاً دو رأس روی قطر باشد، می‌توان مطابق شکل زیر دو رأس را طوری جابه‌جا کرد که مساحت چهارضلعی بیش‌تر شود.

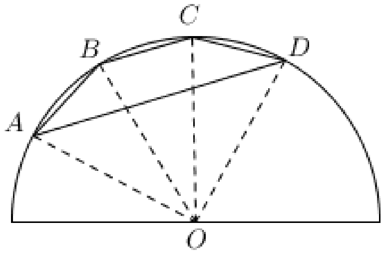


اگر هم تنها یک رأس روی قطر باشد(مثلاً رأس A) می‌توان آن رأس را با یکی از دو سر قطر که از نقاط روی کمان نیم‌دایره هستند طوری جابه‌جا کرد که ارتفاع مثلث ABD و تبع آن مساحت چهارضلعی کم نشود.



حال فرض کنید چهار نقطه‌ی A، B، C و D به همین ترتیب روی دایره هستند. اگر نقطه‌ی B دقیقاً وسط A و C نباشد و B را با وسط کمان AC عوض کنیم ارتفاع مثلث ABC و به تبع آن مساحت

مثلث زیاد می‌شود. پس در مثلثی که بیش‌ترین مساحت را دارد، کمان AB و BC برابر هستند. با استدلال کاملاً مشابه کمان‌های BC و CD هم باید برابر باشند.

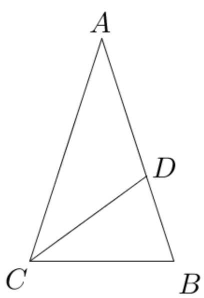


پس چهارضلعی با بیش‌ترین مساحت ذوزنقه‌ی با رئوس روی محیط نیم‌دایره است. اگر زاویه‌ی کمان AB برابر α باشد ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$)، مطابق شکل روبه‌رو برای مساحت چهارضلعی $ABCD$ داریم:

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(AOB) + S(BOC) + S(COD) - S(AOD) \\ &= 3S(AOB) - S(AOD) \\ &= \tfrac{3}{2}\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\sin(3\alpha) = \tfrac{3}{2}\sin\alpha - \tfrac{1}{2}(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) \\ &= 2\sin^3\alpha \leq 2\sin^3(\tfrac{\pi}{3}) = 2(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^3 \\ &= \tfrac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

پس بیش‌ترین مقدار مساحت برابر $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ است.

۶. گزینه‌ی (۵) صحیح است.



مطابق شکل روبه‌رو اگر $\angle CDB \geq 90^\circ$، با توجه به این که مثلث CDB متساوی‌الساقین است باید $\angle DBC = \angle DCB = \frac{1}{2}\angle ACB$ که امکان ندارد. پس $\angle CDB \leq 90^\circ$. این نتیجه می‌دهد که $\angle ADC \geq 90^\circ$ و با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث ADC، باید $\angle CAD = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB$. با توجه به این اطلاعات از یک سو مثلث‌های BDC و ABC با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها نتیجه می‌دهد که $BC^2 = BD.BA$ و از طرف دیگر با توجه به این که CD نیم‌ساز است داریم $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} & BC^2 = BD.BA \Rightarrow (\frac{BC}{BA})^2 = \frac{BD}{BA} \\ & \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{AC+BC} = \frac{BC}{AC+CB} = \frac{BD}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\frac{BC}{AB})^2 = \frac{\frac{BC}{AB}}{1+\frac{BC}{AB}}$$

که با طرفین وسطین رابطه‌ی آخر و با توجه به این که $\frac{BC}{AB} > ۰$، به معادله‌ای درجه دو برای $\frac{BC}{AB}$ می‌رسیم که از حل آن نتیجه می‌شود $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$.

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

اگر برای یک a, b خاص خط و سهمی یک‌دیگر را قطع کنند به زبان جبر این موضوع یعنی این که دست‌گاه معادلات $\begin{cases} y = x^2 - ax + 1 \\ y = 2b(a - x) \end{cases}$ جواب دارد . به این ترتیب باید حالاتی را بیابیم که این دست‌گاه جواب دارد.

رابطه‌ی دوم را در رابطه اول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 - ax + 1 \\ y = 2b(a - x) \end{cases} \to \dots \to x^2 + (2b - 2a)x + 1 - 2ab = 0$$

قطع کردن سهمی و خط به این معنی است که معادله درجه دو بالا جواب حقیقی داشته باشد و این معادله زمانی جواب حقیقی دارد که مبین (دلتا-Δ) آن منفی نباشد به عبارت دیگر اگر بخواهیم این دو هم‌دیگر را قطع نکنند مبین عبارت بالا باید منفی باشد.

$$\Delta < 0 \to (2b - 2a)^2 - 4(1 - 2ab) < 0$$

$$4a^2 + 4b^2 - 8ab - 4 + 8ab < 0 \to 4a^2 + 4b^2 < 4 \to a^2 + b^2 < 1$$

مجموعه نقاط (a, b) در صفحه که $a^2 + b^2 = 1$ دایره به شعاع یک به مرکز مبدأ است. بنابراین $a^2 + b^2 < 1$ نقاط درون این دایره را شامل می‌شود .بنابراین مساحت این ناحیه از رابطه‌ی مساحت دایره به دست می‌آید:

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید که تعداد خطوط افقی، عمودی و مورب به ترتیب x، y و z باشد. در صورتی که این نقاط با یکدیگر تقاطعی نداشته باشند (موازی باشند)، تعداد ناحیه‌ها برابر با $x + y + z + 1$ خواهد بود. به ازای هر نقطه‌ی

تقاطع بین خطوط یک ناحیه به شکل اضافه می‌شود. تعداد نقاط تقاطع در شکل برابر است با $xy + yz + xz$.

$$xy + yz + xz + x + y + z + 1 = \frac{(x+y+z)^2}{2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + 19$$

$$= 181 - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

با توجه به این‌که مجموع این سه عدد برابر ۱۸ است، طبق نامساوی حسابی-مربعی:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \geq 54 \Rightarrow x = y = z = 6 \Rightarrow 181 - 54 = 127$$

در صورتی که هیچ سه خطی با یک‌دیگر در یک نقطه تقاطع نداشته باشند این تعداد ناحیه به وجود خواهد آمد.

۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

به ازای هر نقطه در شکل، ابتدا نقطه‌ای با فاصله‌ی واحد روی خط A پیدا می‌کنیم و دایره‌ای به شعاع واحد از آن می‌گذرانیم. بدین ترتیب مرکز دایره (x_2, y_2) و موقعیت نقطه نسبت به مرکز (x_1, y_1) خواهد بود.

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

کم‌ترین فاصله: در صورتی که تنها نقاطی که بیش‌ترین فاصله را از یک‌دیگر دارند در دو شکل در نظر بگیریم، ادغام دو شکل چهار نقطه خواهد شد که تشکیل یک لوزی را می‌دهند (چون فاصله‌ی ضلع‌ها همگی برابر با d است). در لوزی نیز می‌دانیم بیش‌ترین فاصله زمانی کمینه خواهد شد که شکل مربع باشد که این فاصله برابر $\sqrt{2}d$ است. مثال برای این حالت دو پاره‌خط است که بر یک‌دیگر عمود هستند.

بیش‌ترین فاصله: هر دو نقطه که در شکل نهایی در نظر بگیرید، از مجموع دو نقطه در هر شکل بدست آمده است که از یک‌دیگر حداکثر d واحد فاصله دارند. پس در مجموع فاصله‌ی آن‌ها از یک‌دیگر حداکثر $2d$ خواهد شد. مثال برای این حالت دو خط است که موازی یک‌دیگر هستند.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

هر عدد در A_k دقیقا از ضرب $k!$ عدد اول تشکیل شده است. این حکم به سادگی با استقرا اثبات می‌شود و از طرفی هر عدد با این ویژگی نیز در A_k وجود دارد چرا که می‌توانیم هر عددی را به عوامل اولش تقیسم کنیم و آن را بسازیم. در بین گزینه‌ها تنها $2^{111} \times 3^9$ است که تعداد عوامل اولش $6! = 120$ باشد.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

با ساده‌سازی روابط به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{x} = \frac{ay - x - y}{(x+y)y} \Rightarrow xy + y^2 + x^2 = (a-1)xy$$

به وضوح $a > 3$. اگر x و y را بر ب.م.م آن‌ها تقسیم کنیم تا نسبت به هم اول باشند، در رابطه‌ی بالا از طرفی سمت راست تساوی بر x و y بخش‌پذیر هستند. پس سمت چپ تساوی هم باید بر این دو عدد بخشپذیر باشد. بدین ترتیب ثابت می‌شود $x|y$ و $y|x$.(x و y بعد از تقسیم به ب.م.م نسبت به هم اول هستند.) در نتیجه:

$$x = y \Rightarrow a = 4$$

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌توان به سادگی و با اندکی برابر زاویه‌ها نشان داد که قرینه‌ی مرکز ارتفاعی نسبت به خود ضلع BC هم روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را E می‌نامیم. با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث HDE (H مرکز ارتفاعی است.) می‌توان نتیجه گرفت $DE \parallel BC$ و بنابراین داریم:

$$\angle DAC = \frac{۱}{۲}\widehat{DC} = \frac{۱}{۲}\widehat{BE} = \angle BAD = ۹۰^\circ - \angle B$$

۱۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

در ابتدا سعی می‌کنیم $h^{-1}(x)$ را بدست آوریم. فرض کنید $h(x) = y$:

$$h(x) = \frac{kf(x)}{1 - f(x)} \Rightarrow (k+y)f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}\left(\frac{y}{k+y}\right)$$

$$\Rightarrow fo\, h^{-1}(x) = \frac{x}{k+x} \Rightarrow \frac{x}{fo\, h^{-1}(x)} - x = \frac{kx + x^2 - x^2}{x} = k$$

۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در صورتی که تعداد تاهای افقی و عمودی به ترتیب x و y باشد، تعداد خطوط افقی و عمودی برابر با $2^x - 1$ و $2^y - 1$ خواهد بود (به ازای هر خط اضافه تعداد نواحی دو برابر می‌شود). در نتیجه اگر تعداد خطوط در انتها برابر با ۳۱۸ باشد داریم:

$$2^x + 2^y = 320 = (101000000)_2 \Rightarrow \{x, y\} = \{6,8\} \Rightarrow x + y = 14$$

۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

شکل نهایی این سوال از چند بخش تشکیل شده است:

- یک مکعب مستطیل که عمود بر مربع ساخته شده است به حجم ۲.
- چهار نیم استوانه که به محوریت ضلع‌های مربع ساخته شده‌اند به حجم $4 \times \frac{\pi}{2} = 2 \times \pi$.
- چهار تا ربع کره که یک کره‌ی کامل را تشکیل می‌دهند به حجم $\frac{4\pi}{3}$.

پس در مجموع حجم شکل برابر است با: $2 \times \left(1 + \frac{5\pi}{3}\right)$

۱۷. در صورتی که مجموع هفت رقم برابر با عددی شود که دو رقم دیگر را داراست، این هفت رقم می‌توانند به ۵۰۴۰ = !۷ حالت مختلف چیده شوند. در نتیجه پاسخ مسئله بر این عدد بخشپذیر است.

با توجه به اینکه مجموع ارقام ۱ تا ۹ برابر با ۴۵ است باید دو رقم را حذف کنیم که مجموع بقیه، از این دو رقم شکل گرفته باشد.

- اگر دهگان مجموع ۴ باشد: عدد ۴ حذف شده و مجموع کمتر از ۴۱ خواهد شد که نمی‌تواند چنین باشد.
- اگر دهگان مجموع ۳ باشد: رقم بعدی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$30 + x = 42 - x \Rightarrow x = 6$$

- اگر دهگان مجموع ۲ و یا ۱باشد: یکی از ارقام حذف شده ۲ است و در هیچ صورتی مجموع هفت رقم کمتر از ۳۰ نخواهد شد.

۱۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در هر مرحله اگر عدد را به صورت $a-1$ نمایش دهیم، پس از حرکات فوق به $2a-1$، $3a-1$، $4a-1$ و یا $5a-1$ تبدیل می‌شود. پس اگر در انتها a تنها از ۲ و ۳ و ۵ تشکیل شده است، در ابتدا نیز باید مضربی از این اعداد باشد.

بین گزینه‌های داده شده تنها ۱۱=۱-۱۲ این ویژگی را دارد. پس پاسخ برابر با ۱۱ خواهد بود. ضمناً به سادگی می‌توان نشان داد که با شروع از عددد ۱۱ و تعدادی بار انجام این عمل می‌توان به عدد خواسته شده رسید.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

تنها اعدادی می‌توانند در دامنه‌ی f_1 باشند که در بازه‌ی $(-\infty,1]$ باشند. در نتیجه دامنه‌ی تابع f_1 بازه‌ی $(-\infty,1]$ و برد آن اعداد نامنفی است. در نتیجه دامنه و برد تابع f_2 بازه‌ی $[0,1]$ خواهد بود. و هم‌چنین به ازای توابع بعدی نیز این دامنه و برد حفظ می‌شود. پس پاسخ بازه‌ی $[0,1]$ است.

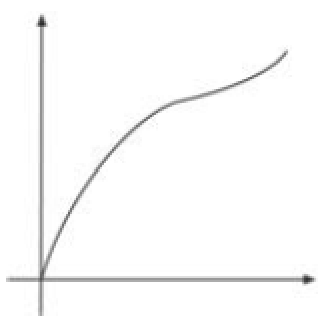
۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در این سوال کافی است که به چند نکته دقت کنیم:

- ارتفاع آب در طول زمان همواره صعودی است.

- شیب نمودار در هر لحظه تابعی نزولی از مساحت هر قطاع ظرف است.

در نتیجه ابتدا شیب باید زیاد باشد و به مرور زمان کم شود (تا به میانه‌ی ظرف که بیشترین مساحت را دارد برسد) و سپس دوباره باید شیب افزایش پیدا کند.

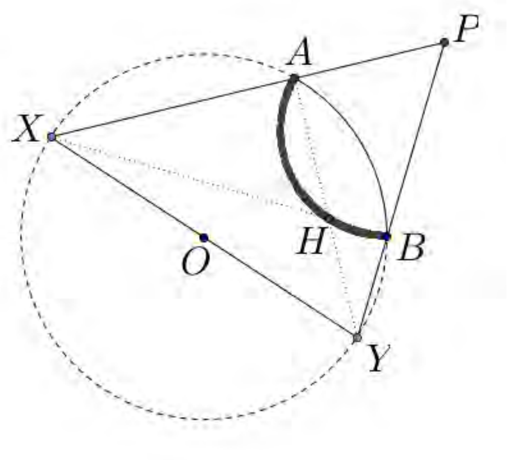

ب)

با توجه به موارد فوق تنها گزینه‌ی (ب) این ویژگی را دارد.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که با توجه به این که XY قطر دایره است، $AX \perp AY$ و $XB \perp BY$، پس مرکز ارتفاعی مثلث PXY همان محل تقاطع XB و AY است. حال دقت کنید که

$$\angle AHB = \angle XBY + \angle AYB = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\angle AOB = ۱۲۰^\circ$$



پس مرکز ارتفاعی روی کمان درخور زاویه‌ی ۱۲۰درجه پاره‌خط AB قرار دارد. پس H روی دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ قرار دارد. (دقت کنید که حالتی که در بالا بررسی شد مربوط به همین ترتیب قرار گرفتن نقاط بود، در حالت‌های دیگر باید وضعیت جداگانه بررسی شود که باز به همین جواب می‌رسیم.)

۲۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

تناظری بین اعداد با ویژگی یاد شده پیدا می‌کنیم. به ازای هر عدد یکنوا به صورت $a_1a_2a_3a_4$ عدد دیگری به صورت $(10-a_1)(10-a_2)(10-a_3)(10-a_4)$ انتخاب می‌کنیم که یکنوا است. حال مجموع این دو عدد برابر با ۱۱۱۱۰ است. پس باید تعداد کل اعداد صعودی چهار رقمی را بیابیم و در عدد ۱۱۱۱۰ ضرب کنیم تا مجموع کل به دست آید.

$$\binom{9}{4} \times 11110 = 1399860$$

۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در ۱۰ ساعت مجموعاً ۳۰ مرحله تغییر نسل صورت می‌گیرد. در مراحل زوج تمامی باکتری‌ها از نوع B و C هستند و در مراحل فرد تمامی باکتری‌ها از نوع A خواهند بود.

همچنین در مراحل زوج تعداد باکتری‌های نوع B با نوع C برابر هستند (به جز مرحله‌ی صفرم) و دو برابر تعداد باکتری‌های مرحله‌ی قبل. در مراحل فرد نیز تعداد باکتری‌های نوع A، ۳ برابر تعداد باکتری‌های نوع A در دو مرحله قبل خواهد بود. در نتیجه تعداد گلبول‌های خورده شده در ۱۵ مرحله‌ی فرد رخ می‌دهد که تعداد آن‌ها به صورت زیر است:

$$0 + 2 + 6 + \cdots + 2 \times 3^{13} = 2 \times \left(\frac{3^{14} - 1}{3 - 1}\right) = 4782969$$

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

از معادله‌ی دوم به دست می‌آید:

$$A^2 = A - I$$

در نتیجه داریم:

$$A^6 = (A - I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I = -2A^2 + 2A - I = I$$

$$2A^6 + 2A^2 + A + B = \bar{O} \Rightarrow 2I + (2A - 2I) + A + B = 3A + B = \bar{O}$$

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ثابت می‌کنیم جواب مسئله ۳ است.

شرط دوم مسئله معادل با این است که هر دو عدد که باقی‌مانده‌ی ثابتی در تقسیم بر ۱۷×۱۱ داشته باشند، باید هم‌رنگ شوند. چون در غیر این صورت دو عدد ناهم‌رنگ خواهیم داشته که باقی‌مانده‌شان بر ۱۱ و ۱۷ برابر است. در صورتی‌که از دو رنگ استفاده کنیم، با توجه به شرط اول اعداد باید یکی در میان رنگ‌آمیزی شوند و در اینصورت رنگ اعداد ۱ و ۱۸۸ متفاوت خواهد بود.

ولی در صورتی‌که با رنگ سومی داشته باشیم، اعدادی که باقی‌مانده‌شان به پیمانه‌ی ۱۷×۱۱ برابر ۱۸۶ باشد را با رنگ سوم، رنگ می‌کنیم و باقی اعداد را یکی در میان با دو رنگ دیگر. بدین ترتیب شرایط مسئله برقرار خواهد شد.

۲۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می دانیم که تابع سینوس بین یک و منفی یک است. پس :

$$-1 \le \sin x \le$$

حال دو حالت داریم.

الف) $0 \leq x \leq 3$ در این حالت می‌دانیم که اگر $x = 3$ باشد معادله جواب نخواهد داشت. و در غیر این صورت

$$0 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 0$$

و هم‌چنین چون $0 \leq x < 3$ پس برای تابع سینوس هم خواهیم داشت: $[\sin x] = 0$ و در نتیجه معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

حال کافی است نمودار خط $\frac{x}{3}$ با تابع $\sin x$ تقاطع بدهیم. این دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. یکی در ناحیه‌ی مثبت، یکی در ناحیه‌ی منفی و دیگری در صفر. فقط در جواب‌های صفر و مثبت آن قابل قبول است.

ب) اگر $-3 \leq x < 0$ باشد. در این حالت می‌دانیم که:

$$-3 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = -1$$

و همچنین چون $-3 \leq x < 0$ پس برای تابع سینوس هم خواهیم داشت: $[\sin x] = -1$ و در نتیجه باز هم معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

حال نمودار خط $\frac{x}{3}$ با تابع $\sin x$ تقاطع بدهیم. این دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. یکی در ناحیه‌ی مثبت، یکی در ناحیه‌ی منفی و دیگری در صفر. فقط در جواب منفی آن قابل قبول است. پس در مجموع سه جواب خواهیم داشت.

۲۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اگر فرش زیر پای را می کشیم که چروک پدید آمده از بین بروا! در این حالت باز هم مثلثی قائم‌الزاویه ABC را خواهیم داشت که در آن $BC = 6$ است ولی مقدار AB تغییر می‌کند. AB به اندازه‌ی قطر دایره کاهش یافته و به اندازه نصف محیط دایره اضافه می‌شود. بنابراین: $AB = (10 - \pi) - 2 + \pi$ که داریم: $AB = 8$ حال طبق قضیه‌ی فیثاغورس $AC = 10$ و چون کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه خط مستقیم خواهد بود؛ پس او بعد از چین خوردن دوباره فرش باید در خط مستقیم قبلی حرکت کرده و خود را از A به C برساند.

۲۸. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

برای این که مهره بتواند با این حرکت‌ها به همه‌ی خانه‌های با مختصات صحیح برسد لازم و کافی است که بتواند با این حرکت‌ها به خانه‌های $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ برسد. معادلاً باید اعداد صحیح مثبت یا منفی a، b، c و d یافت شوند که

$$a(m,n) + b(n+۱, m+۱) = (۱,۰)$$
$$c(m,n) + d(n+۱, m+۱) = (۰,۱)$$

که این روابط هم به بیان دیگری یعنی

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که این هم نتیجه می‌دهد ماتریس $\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix}$ باید وارونی با درایه‌های صحیح داشته باشد، پس باید دترمینانش ±۱ باشد. اما

$$\det\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix} = m^۲ + m - n^۲ - n = (m-n)(m+n+۱)$$

که از بین $m-n$ و $m+n+۱$ یکی زوج و دیگری فرد است. پس حاصل‌ضرب آن‌ها نمی‌تواند عددی فرد باشد. پس برای هیچ m و n صحیح این عمل امکان‌پذیر نیست.

۲۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$f(x^{12}) = f(x).q(x) + r(x)$ که در آن $r(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی کم‌تر از $f(x)$ است. یعنی درجه‌ی $r(x)$ باید کم‌تر از ۵ باشد.

از طرفی می‌دانیم که $f(-1) = 0$ که در نتیجه با قرار دادن ۱− در معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$f(($-

پس باید $r(-1) = 0$ باشد که فقط گزینه‌ی (الف) این خاصیت را دارد.

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۱۱۱ قرمز و ۲۱۱ سبز هستند. بنابراین ۳۳۲ و ۳۲۳ هر دو زرد هستند. چون هر دو با تغییر تمام کلیدهای این دو حالت به دست آمده‌اند و باید رنگی غیر از سبز و قرمز (که زرد است) داشته باشند.

با همین استدلال باید ۱۳۲ قرمز باشد، چون ۲۱۱ سبز و ۳۲۳ زرد هستند. پس ۲۲۱ سبز است چرا که نمی‌تواند با ۱۳۲ و ۳۳۲ هم‌رنگ باشد.