ابرعدد (83-1)

۱۵۰ دقیقه

فرض کنید $n > ۱$ عددی طبیعی باشد. نمایش یک عدد صحیح نامنفی در مبنای n دنباله‌ای متناهی به شکل $\overline{a_k \dots a_۱ a_۰}$ است که a_iها عضو $\{۰, ۱, \dots, n - ۱\}$ هستند. یک ابرعدد در مبنای n در واقع تعمیمی از این نمایش است؛ یک ابرعدد در مبنای n دنباله‌ای از چپ نامتناهی به شکل $\overline{\dots a_۲ a_۱ a_۰}$ است که a_iها عضو $\{۰, ۱, \dots, n - ۱\}$ هستند.

مجموعه‌ی همه‌ی ابرعددها در مبنای n را با $\mathbb{N}_n$ نمایش می‌دهیم. $\mathbb{N}_n$ شامل مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی است و به راحتی می‌توان دید که اعمال جمع و ضرب روی $\mathbb{N}_n$ قابل تعمیم است. به این نکته توجه کنید که برای دانستن k رقم سمت راست حاصل‌جمع (یا حاصل‌ضرب) دو عدد، کافی است k رقم سمت راست آن دو عدد را بدانیم. پس اکنون $\mathbb{N}_n$ مجهز به دو عمل جمع و ضرب است.

با اضافه کردن ممیز، $\mathbb{N}_n$ را نیز توسعه می‌دهیم؛ اعضای $\mathbb{Q}_n$ موجوداتی به شکل $\overline{\dots a_۲ a_۱ a_۰ / a_{-۱} a_{-۲} \dots a_{-l}}$ هستند (تعداد ارقام سمت راست ممیز متناهی است). جمع و ضرب روی $\mathbb{Q}_n$ نیز قابل تعمیم است. پس از درک چگونگی تعمیم جمع و ضرب روی $\mathbb{N}_n$ و $\mathbb{Q}_n$، به گزاره‌های زیر توجه کنید. لازم نیست آن‌ها را ثابت کنید.

گزاره ۱. جمع و ضرب دو عمل جابجایی هستند و ضرب روی جمع، پخش می‌شود.

گزاره ۲. $\overleftarrow{۰}$ عضو خنثای جمع و $۱\overleftarrow{۰}$ عضو خنثای ضرب است.

گزاره ۳. در $\mathbb{N}_n$ و $\mathbb{Q}_n$ هر عضو قرینه دارد، یعنی به ازای هر x وجود دارد y به طوری که $x + y = \overleftarrow{۰}$.

حال به سؤالات زیر جواب دهید.

الف) فرض کنید $x \in \mathbb{N}_n$ ($x \in \mathbb{Q}_n$). تحت چه شرایطی، x وارون ضربی دارد؟

ب) به ازای چه nهایی از $xy = ۰$ نتیجه می‌شود $x = ۰$ یا $y = ۰$؟

پ) فرض کنید n دارای این خاصیت باشد که در $\mathbb{Q}_n$، $xy = ۰$ نتیجه دهد $x = ۰$ یا $y = ۰$. نشان دهید هر چندجمله‌ای از درجه‌ی d که ضرایب آن اعضای $\mathbb{Q}$اند، حداکثر d ریشه در $\mathbb{Q}_n$ دارد.

ت) نشان دهید هر چندجمله‌ای از درجه‌ی d در $\mathbb{Q}_{۱۰}$ حداکثر $d^۲$ ریشه دارد.

ث) هدف از این مسئله شناختن ساختار $\mathbb{N}_n$ها و $\mathbb{Q}_n$هاست و لذا اثبات هر حقیقتی علاوه بر آن چه در بالا آمده‌است با توجه به ارزش آن نمره دارد.

مسئله‌ی برابری محیطی برای شکل‌های شبکه‌ای (83-2)

۴۵ دقیقه

می‌دانیم که از بین تمام شکل‌های با مساحت برابر، دایره کم‌ترین محیط را دارد و بنابراین از آنجایی که نسبت مساحت به مربع محیط، در دایره برابر با عدد $\frac{۱}{۴\pi}$ است، برای هر شکل F در صفحه نسبت مساحت F به مربع محیط F کوچک‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۴\pi}$ است.

حال اگر به جای همه‌ی اشکال، شکل‌های روی صفحه‌ی مشبکه را در نظر بگیریم (رئوس اشکال مذکور روی رئوس شبکه و اضلاع آن‌ها موازی دو محور طول و عرض‌ها است)، بهترین عددی که به جای $\frac{۱}{۴\pi}$ می‌توان گذاشت چه عددی است و این عدد به ازای چه شکل‌هایی به دست می‌آید؟

مجموعه‌های طلایی (83-3)

۹۰ دقیقه

رابطه‌ی $\leftrightarrow$ را روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی به این صورت تعریف می‌کنیم: $m \leftrightarrow n$ اگر و تنها اگر nامین رقم بسط دودویی m، ۱ باشد و یا mامین رقم بسط دودویی n، ۱ باشد. (رقم‌ها را از سمت چپ می‌شماریم.) اگر $m \leftrightarrow n$ نباشد می‌نویسیم $m \not\leftrightarrow n$.

مجموعه‌ی $A \subset \mathbb{N}$ را طلایی می‌گوییم اگر خاصیت زیر را داشته باشد. برای هر $U, V \subset A$ که ناتهی، متناهی و مجزایند، $z \in A$ وجود دارد که اگر $x \in U$ و $y \in V$ آنگاه $z \leftrightarrow x$ و $z \not\leftrightarrow y$.

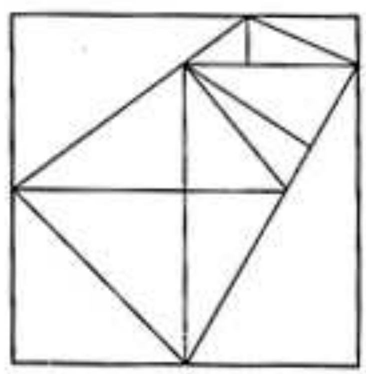
الف) نشان دهید مجموعه‌ی اعداد اول، مجموعه‌ای طلایی است.

ب) ثابت کنید اگر $P_۱, P_۲, \ldots, P_k$ افرازی از مجموعه‌ی اعداد اول باشد، دست‌کم یکی از مجموعه‌های $P_۱, P_۲, \ldots, P_k$، مجموعه‌ای طلایی است.

کاشی‌کاری مثلثی (83-4)

۴۵ دقیقه

مربع واحد را با کاشی‌هایی به شکل مثلث قائم‌الزاویه فرش کرده‌ایم. این کاشی‌های لزوماً هم‌شکل نیستند. بزرگ‌ترین مربعی را که در هر کاشی می‌توان جای داد، رسم نمایید. مجموع مساحت‌های این مربع‌ها را S بنامید.



الف) مقدار بیشینه و کمینه‌ی S را به دست آورید.
ب) مقادیر بیشینه و کمینه توسط کدام کاشی‌کاری‌ها با خواص بالا حاصل می‌شوند؟

بردارهای صفر و یک (83-5)

۱۵۰ دقیقه

فرض کنید

$$V=\{(x_1,\dots,x_n)|x_i\in\{0,1\}\}$$

به هر عضو V یک بردار می‌گوییم. مجموع دو بردار $x=(x_1,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,\dots,y_n)$ را که با $x+y$ نشان می‌دهیم به صورت $(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ تعریف می‌کنیم که منظور از x_i+y_i جمع به پیمانه‌ی ۲ اعداد x_i و y_i است (یعنی $1+1=0$). برای جایگشت σ روی مجموعه‌ی $\{1,2,\dots,n\}$ و بردار $x=(x_1,\dots,x_n)$، بردار x_σ را به صورت $(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$ تعریف می‌کنیم.

الف) فرض کنید دو بردار x و y دقیقاً در k مؤلفه اختلاف داشته باشند. ثابت کنید تعداد بردارهایی که با هر دو بردار x و y در بیش از $\frac{n}{2}$ مؤلفه اختلاف داشته باشند فقط به n و k بستگی دارد. این تعداد را با $\lambda_k(n)$ یا به طور خلاصه با λ_k نشان می‌دهیم.

ب) ثابت کنید

$$\lambda_1=\lambda_2>\lambda_3=\lambda_4>\lambda_5=\lambda_6>\dots$$

یعنی $\lambda_k=\lambda_{k+1}$ برای اعداد فرد k و $\lambda_k>\lambda_{k+1}$ برای اعداد زوج k.

پ) فرض کنید $n=4k+2$ یا $n=4k+3$ و $f:V\longrightarrow V$ تابعی یک‌به‌یک باشد با این ویژگی که دو بردار x و y در بیش از $\frac{n}{2}$ مؤلفه اختلاف دارند اگر و تنها اگر $f(x)$ و $f(y)$ در بیش از $\frac{n}{2}$ مؤلفه اختلاف داشته باشند. ثابت کنید بردار $v\in V$ و جایگشت σ وجود دارند که برای هر $x\in V$، $f(x)=v+x_\sigma$.

شهاب ۳/۱۴ (83-6)

۶۰ دقیقه

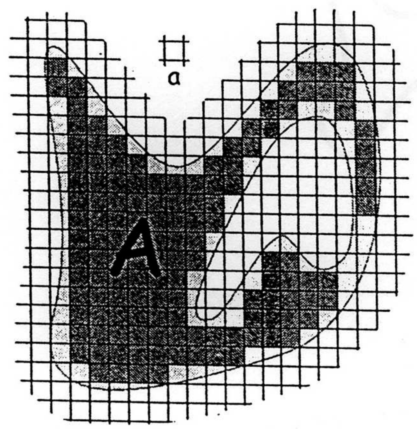
موشک شهاب ۳/۱۴ طوری طراحی شده است که با سرعت ثابت v هدفی را که به سمت آن شلیک شده دنبال می‌کند؛ به این معنی که هر لحظه بردار سرعت موشک به سمت هدف و طول آن برابر v است. فرض کنید هدف با سرعت ثابت v'، که $v \geq v'$، روی مسیری مستقیم در حال حرکت باشد. با توجه به مکان شلیک موشک در چه صورتی موشک به هدف اصابت می‌کند؟

اشکال ساده (7-83)

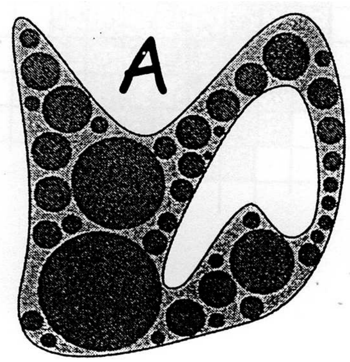
۷۵ دقیقه

اگر A شکلی در صفحه باشد، برای تخمین مساحت آن می‌توان از روش زیر استفاده کرد.

شکل A را روی یک صفحه‌ی شطرنجی با مربع‌های به طول ضلع a قرار می‌دهیم و فقط آن مربع‌هایی را در نظر می‌گیریم که کاملاً درون شکل A قرار گرفته‌اند. اگر مجموع مساحت این مربع‌ها را محاسبه کنیم مقدار S_a به دست می‌آید که تخمینی از S، مساحت شکل A است. برای شکل‌های ساده (!)، مثلاً چندضلعی‌ها، دایره‌های، بیضی‌ها یا حتی کلی‌تر، شکل‌هایی که از ناحیه‌ی درونی یک خم بسته به وجود می‌آیند، و همین طور شکل‌هایی که از اجتماع و اشتراک و تفاضل این اشکال به وجود می‌آیند، به روش بالا با کوچک کردن a، S_a به مقدار واقعی S نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.



الف) ثابت کنید اگر A شکلی ساده در صفحه باشد، می‌توان تعدادی دایره درون آن قرار داد طوری که اولاً با هم اشتراک نداشته باشند و ثانیاً مجموعه مساحت آن‌ها لااقل برابر با ۰/۹۹ مساحت A باشد.



ب) فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ نگاشتی یک‌به‌یک و پوشا باشد که دارای این خاصیت است که فاصله‌ی هیچ دو نقطه‌ای را زیاد نمی‌کند؛ یعنی برای هر $x, y \in \mathbb{R}^۲$ ، فاصله‌ی $f(x)$ و $f(y)$ حداکثر به اندازه‌ی فاصله‌ی x و y است. نشان دهید اگر A و $f(A)$ دو شکل ساده در صفحه باشند آن‌گاه مساحت $f(A)$ از مساحت A بیش‌تر نیست.

باران (83-8)

۴۵ دقیقه

در یک روز بهاری در یکی از شهرهای شمالی از ساعت ۱۲ ظهر تا ۷ بعدازظهر باران باریده‌است؛ طبیعی است که ممکن است در بازه‌هایی از زمان باران نباریده باشد. تعدادی همسایه هر کدام به مدت ۱ ساعت در این بازه‌ی ۷ ساعته، تشتی استوانه‌ای را زیر باران قرار داده‌اند و مشاهده کرده‌اند که در این ۱ ساعت، بیش از ۱۰ میلی‌متر آب در تشت جمع نشده‌است. اگر بدانیم در هر لحظه از این ۷ ساعت، دست‌کم یک تشت زیر باران بوده‌است، در این مدت حداکثر چند میلی‌متر باران باریده‌است؟