به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۲

---

۱. الف. با اندکی محاسبه و در نظر گرفتن حالت‌های مختلف می‌توان مشاهده کرد که اگر عددی حداکثر دو عامل اول داشته باشد، نمی‌تواند سه‌لایه‌ای باشد. به علاوه با تلاش بیش‌تر می‌توان دید که ۱۲۰ عددی سه لایه‌ای است، زیرا $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۵,۲۰,۲۴,۳۰,۴۰,۶۰,۱۲۰\}$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ است و $۱+۲+۳+۴+۵+۶+۸+۱۰+۱۲+۱۵+۲۴+۳۰ = ۲۰+۴۰+۶۰ = ۱۲۰$.

ب. فرض کنید p عددی اول بزرگ‌تر از ۵ باشد. در این صورت هر مقسوم‌علیه $۱۲۰p$ یا مقسوم‌علیهی از ۱۲۰ است و یا p برابر یک مقسوم‌علیه ۱۲۰. پس می‌توان با استفاده از استدلال بالا و اضافه کردن p برابر اعضای هر دسته(که در سه‌لایه‌ای بودن ۱۲۰، مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ را به آن‌ها افراز کردیم) به آن دسته، نشان داد که $۱۲۰p$ هم سه لایه‌ای است. حال چون تعداد چنین اعداد اولی نامتناهی است، نامتناهی عدد سه لایه‌ای داریم.

۲. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید A، B و C سه نقطه در صفحه باشند و Mنقطه وسط BC باشد. در این صورت $AM \le \frac{AB+AC}{۲}$.

اثبات. اگر سه نقطه هم‌خط باشند که به سادگی می‌توان دید که تساوی برقرار است. حال اگر این سه نقطه تشکیل یک مثلث بدهند، فرض کنید نقطه‌ی $A_۱$ قرینه‌ی A نسبت به M باشد. در این صورت در چهارضلعی $ABA_۱C$ قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند و بنابراین یک متوازی‌الاضلاع است. به علاوه دقت کنید که $AA_۱ = ۲AM$ و $AB = CA_۱$. حال با توجه به نامساوی مثلث در مثلث $AA_۱C$، $AA_۱ < AC + CA_۱$ و در نتیجه $۲AM < AB + AC$ که همان چیزی است که می‌خواستیم. □

حال فرض کنید خانه‌های روستا را با $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_n نمایش دهیم. به برهان خلف فرض کنید X و Y دو نقطه‌ی ایده‌آل باشند و M وسط XY. حال با استفاده از لم بالا در مثلث‌های $A_۱XY$، $A_۲XY$، $\cdots$ و A_nXY(البته ممکن است در بعضی حالت‌ها سه نقطه هم‌خط باشند که باز هم لم درست است) داریم:

$$A_۱M \le \frac{A_۱X+A_۱Y}{۲}, A_۲M \le \frac{A_۲X+A_۲Y}{۲}, \dots, A_nM \le \frac{A_nX+A_nY}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad A_۱M + A_۲M + \cdots A_nM \le \frac{۱}{۲}(A_۱X + \cdots + A_nX + A_۱Y + \cdots + A_nY)$$

اما دقت کنید که از آن‌جایی که همه‌ی خانه‌های روستا نمی‌توانند روی یک خط و در نتیجه روی خط واصل بین X و Y واقع باشند. پس حداقل یکی از نامساوی‌ها اکید است و لذا مجموعه‌ی فاصله‌ی خانه‌های روستا تا M کم‌تر از مجموع فاصله‌ی آن‌ها تا X و یا Y است که این با ایده‌آل بودن آن‌ها تناقض دارد.

۳. برای این مسابقه‌ها به این صورت یک گراف جهت‌دار درست می‌کنیم که به ازای هر تیم یک رأس قرار می‌دهیم و اگر تیم A از B برده باشد، یالی جهت‌دار از A به B رسم می‌کنیم. حال فرض کنید مجموعه‌ی تیم‌هایی که از تیم خاصی مثل A باخته‌اند(متناظراً به زبان گراف یعنی رأس‌هایی که یال

بین آن‌ها و رأس A، از یال A خارج شده باشد) را با نماد S_A نمایش می‌دهیم. حال برای هر تیم B در S_A باید دقیقاً t تیم موجود باشند که از هر دوی A و B باخته‌اند. بنابراین رأس متناظر با این تیم‌ها باید در S_A باشد. در نتیجه از بین یال‌هایی که یک سر آن‌ها به B متصل است و یک سر دیگرشان در S_A قرار دارد دقیقاً t یال از B خارج می‌شوند. از آن‌جا که B رأس دل‌خواهی از S_A بود، برای هر تیم دیگری در این مجموعه وضعیت مشابه است. بنابراین تعداد یال‌هایی که هر دو سر آن‌ها در S_A است، برابر $t|S_A|$ است که منظور از $|S_A|$ تعداد تیم‌های موجود در S_A است. از طرف دیگر تعداد کل این یال‌ها برابر $\frac{|S_A|(|S_A|-۱)}{۲} = \binom{|S_A|}{۲}$ است. (بین هر دو یالی در S_A یک یال وجود دارد.) پس $t|S_A| = \frac{|S_A|(|S_A|-۱)}{۲}$ و در نتیجه $|S_A| = ۲t + ۱$. این استدلال نشان می‌دهد که تعداد تیم‌هایی که به هر تیم باخته‌اند مساوی $۲t + ۱$ است. بنابراین از هر رأس در گراف دقیقاً $۲t + ۱$ یال خارج می‌شود. پس تعداد کل یال‌ها برابر $n(۲t + ۱)$ است. از طرف دیگر با توجه به این که هر دو تیمی با هم بازی کرده‌اند، بین هر دو رأسی یک یال قرار دارد. بنابراین از طرف دیگر تعداد کل یال‌ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$. پس $n(۲t + ۱) = \frac{n(n-۱)}{۲}$ و در نتیجه $n = ۲(۲t + ۱) + ۱ = ۴t + ۳$ است.

.۴

$$
\begin{aligned}
& x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x + y + z) - (\tfrac{x^۲}{y} + \tfrac{x^۲}{z} + \tfrac{y^۲}{z} + \tfrac{y^۲}{x} + \tfrac{z^۲}{x} + \tfrac{z^۲}{y}) \\
&= x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x + y + z) + (xyz)(\tfrac{x^۲}{y} + \tfrac{x^۲}{z} + \tfrac{y^۲}{z} + \tfrac{y^۲}{x} + \tfrac{z^۲}{x} + \tfrac{z^۲}{y}) \\
&= x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x + y + z) + x^۳z + x^۳y + y^۳x + y^۳z + z^۳y + z^۳x \\
&= x^۳(x + y + z) + y^۳(x + y + z) + z^۳(x + y + z) + ۳(x + y + z) \\
&= (x + y + z)(x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۳) \\
&= (x + y + z)(x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz) \\
&= (x + y + z)^۲(x^۲ + y^۲ + z^۲ - xy - yz - zx) \\
&= \tfrac{۱}{۲}(x + y + z)^۲((x - y)^۲ + (y - z)^۲ + (z - x)^۲) \geq ۰
\end{aligned}
$$

دقت کنید که در خط اول به دوم و خط پنجم به ششم از فرض مسئله($xyz = -۱$) و در خط ششم به هفتم از اتحاد اویلر استفاده کرده‌ایم. ضمناً نامساوی آخر نشان می‌دهد که حالت تساوی زمانی است که یا مجموع متغیرها صفر باشد و یا هر سه برابر باشند که با توجه به $xyz = -۱$ نتیجه می‌شود هر سه باید برابر -۱ باشند.

.۵ CT را امتداد می‌دهیم تا دایره را برای بار دوم در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت:

$$\angle XBT = \angle XBA + \angle ABM = \angle XBA + \angle ABM = \angle NCA + \angle ABM$$

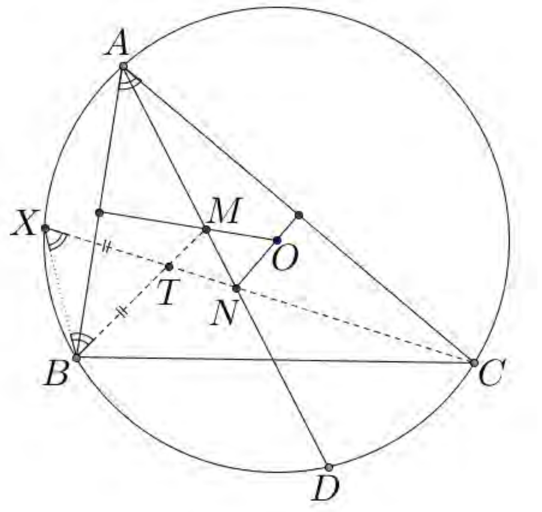
با توجه به این که M روی عمود منصف AB و N روی عمود منصف AC قرار دارد، $\angle MBA = \angle MAB$ و $\angle ACN = \angle CAN$. بنابراین

$$\angle XBT = \angle CAN + \angle MAB = \angle BAC = \angle CXB$$

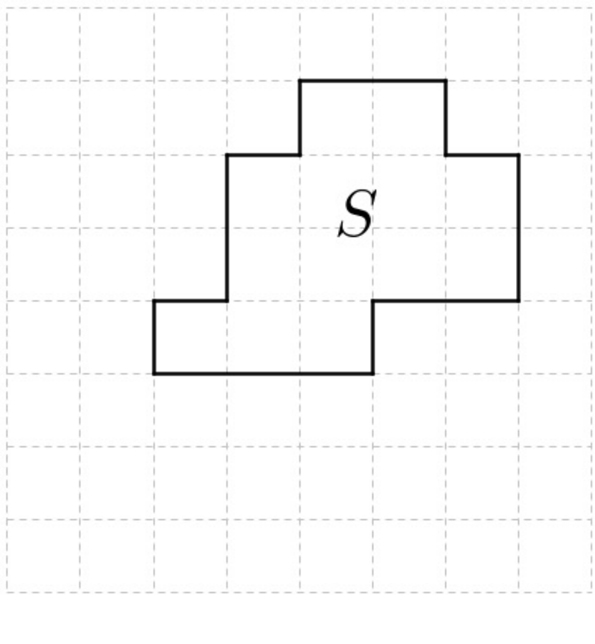
پس مثلث TXB متساوی‌الساقین است و لذا $XT = TB$. در نهایت

$$BT + CT = XT + TC = CX = ۲R.\sin(\angle XBC) \leq ۲R$$

بنابراین اثبات حکم به پایان رسید.



۶. نقطهٔ شروع حرکت روبات را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم و شکلی که محیط آن را پیموده S می‌نامیم. عدد خانه‌یA هم‌واره مؤلفه‌ی دوم مختصات ِ روبات را نشان می‌دهد زیرا در ابتدا صفر است و هر گاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی اضافه می‌شود، A نیز یکی اضافه می‌شود و هرگاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی کم می‌شود، A نیز یکی کم می‌شود . بنابر این می‌توان تغییرات عدد خانه‌ی B را این طور بیان کرد که هرگاه روبات به سمت شرق حرکت می‌کند به اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه به B اضافه می‌شود و هرگاه روبات به سمت غرب حرکت می‌کند به اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه از B کم می‌شود.



ابتدا فرض می‌کنیم ربات مسیر طی‌شده را در جهت ساعت‌گرد طی کرده باشد. همه‌ی مربع‌های شبکه‌ای که درون S قرار دارند را در نظر بگیرید و آن‌ها را $M_{۱}, M_{۲}, \ldots, M_k$ بنامید. فرض کنید مختصات

رأس پایین سمت چپ M_i، (x_i, y_i) باشد. به ازای هر مربع M_i به هر یک از دو ضلعِ آن یک عدد نسبت می‌دهیم. به ضلع پایینیِ مربع M_i، عدد $-y_i$ را نسبت دهید و به ضلع بالاییِ M_i، عدد $y_i + ۱$ را نسبت دهید. دقت کنید که چون بعضی از ضلع‌های افقی در دو مربع حضور دارند به آن‌ها دو بار عدد نسبت داده می‌شود.

اکنون اعداد نسبت داده شده به همه‌ی ضلع‌های مذکور را با هم جمع می‌کنیم و مجموع آن‌ها را D می‌نامیم. اکنون D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم.

اولاً دقت کنید که مجموع دو عددی که به ضلع‌های هر مربع نسبت داده‌ایم برابر یک است. پس D برابر می‌شود با تعداد مربع‌ها که همان مساحت S است.

از طرف دیگر ضلع‌های افقی‌ای که روی مرز S قرار ندارند، در دو مربع حضور دارند، در یکی با علامت مثبت و در دیگری با علامت منفی و مجموع این دو عدد صفر می‌شود. در نتیجه تنها جملاتی باقی می‌مانند که مربوط به یال‌های افقی روی مسیر روبات هستند. که این مقادیر دقیقاً همان مقادیری هستند که هنگام حرکت روبات روی مسیر به عدد خانهٔ B اضافه می‌شوند. بنابراین مجموعِ این مقادیر دقیقاً همان عدد نهایی خانهٔ B است. پس حکم ثابت شد.

در حالتی که ربات در جهت پادساعت‌گرد حرکت کند، مقادیر نسبت داده شده به اضلاع مرزی، منفیِ مقادیری هستند که با B جمع می‌شوند، پس در این حالت B برابر است با منفیِ $-D$ و در نتیجه قدر مطلق آن همان D می‌شود که برابر با مساحت S است.