به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۲

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

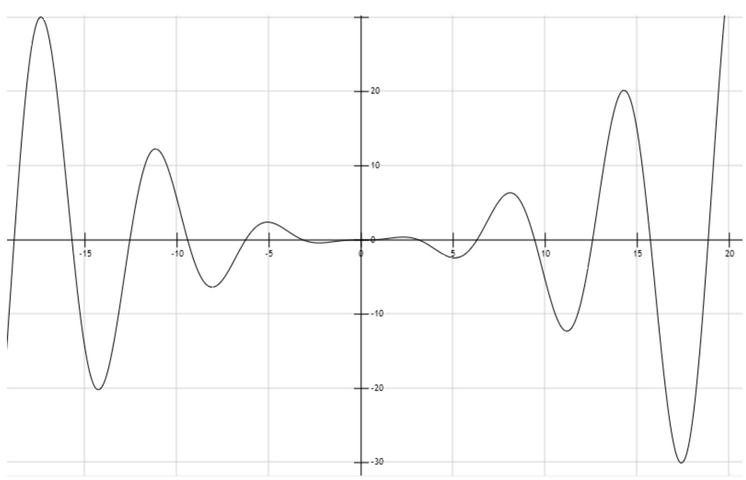
فرض کنید $y = f(x)$ تابع مورد نظر باشد. ابتدا با توجه به این که نقطه‌ی $(0,0)$ روی نمودار قرار دارد، باید $f(0) = 0$ که همه‌ی گزینه‌ها این شرط را برآورده کنند. این نمودار تابعی را مشخص می‌کند که نه زوج است و نه فرد(زیرا نه نسبت به مبدأ مختصات و نه محور yها تقارن دارد.) پس گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) که به ترتیب توابعی فرد، زوج و زوج هستند نمی‌توانند جواب مسئله باشند.

طبق نمودار سؤال برای هر عدد حقیقی مثبت x باید $f(x)$ مثبت باشد، اما اگر در گزینه‌ی (د) به جای x، $\frac{\pi}{2}$ قرار دهیم داریم:

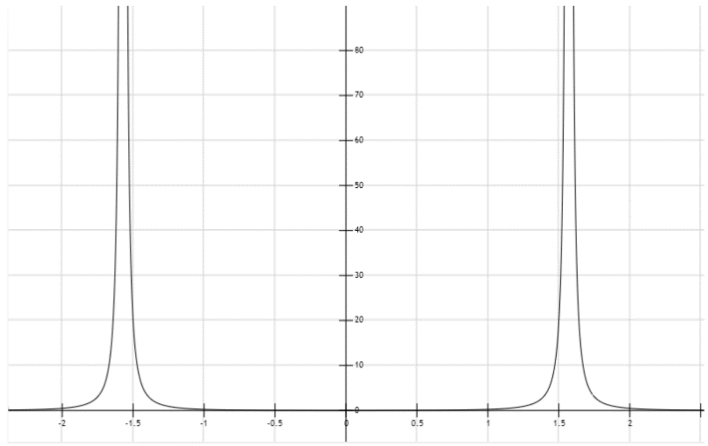
$$\frac{x^2}{10} + \cos x - 1 = \frac{\pi^2}{40} + \cos \pi - 1 = \frac{\pi^2}{40} - 1 < 0$$

پس گزینه‌ی (د) هم نمی‌تواند جواب مسئله باشد و جواب درست گزینه‌ی (ه) است. در زیر نمودار مربوط به چهار تابع دیگر را می‌بینید.

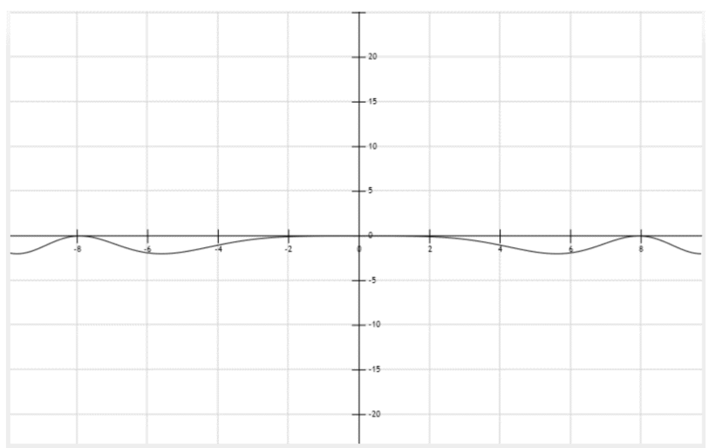
گزینه‌ی الف. $y = \frac{x^2}{10}.\sin x$



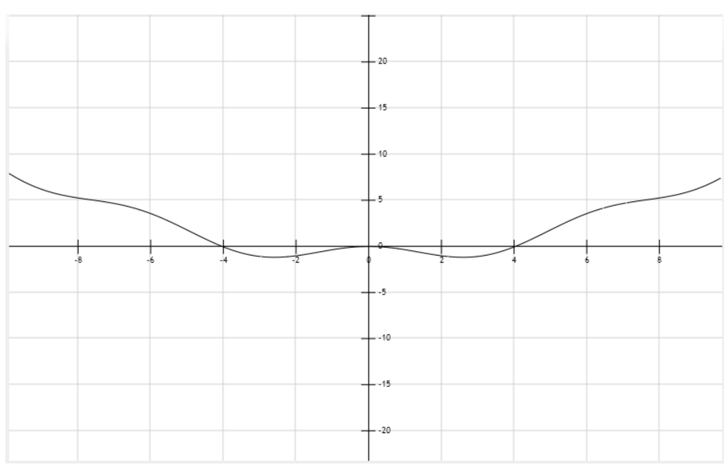
گزینه‌ی ب. $y = \frac{(\tan x)^۲}{۱۰}$



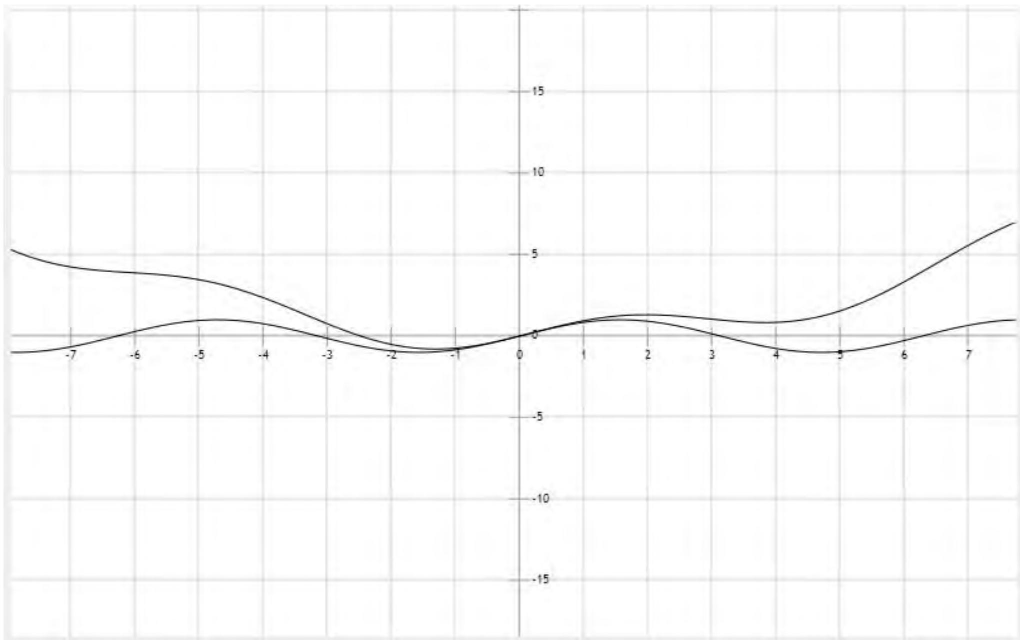
گزینه‌ی ج. $y = \cos(\frac{x^۲}{۱۰}) - ۱$



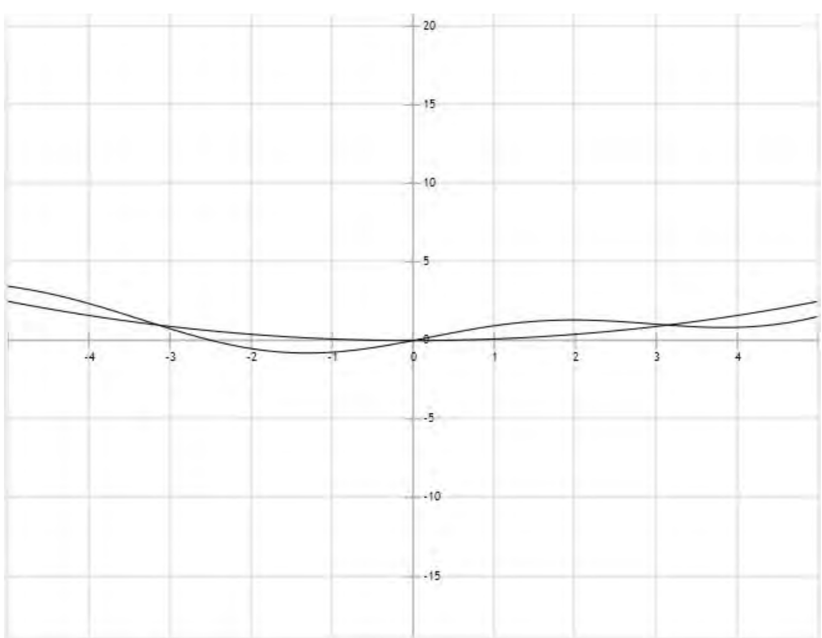
گزینه‌ی د. $y = \frac{x^۲}{۱۰} + \cos x - ۱$



توضیح: اگر به نمودار صورت سؤال حول نقطه‌ی صفر که کسر $\frac{x^{۲}}{۲}$ در این‌جا بسیار کوچک است، دقت کنید نموداری شبیه به $\sin x$ می‌بینید.(در شکل زیر نمودار پایینی مربوط به $y = \sin x$ و نمودار بالاتر مربوط به گزینه‌ی (۵) است.)



توضیح: نمودار $\sin x + \frac{x^{۲}}{۱۰}$ از جمع کردن نمودار دو تابع $\frac{x^{۲}}{۱۰}$ و $\sin x$ به دست می‌آید. یعنی به تعبیری کاملاً غیر دقیق باید نمودار $\sin x$ روی نمودار $\frac{x^{۲}}{۱۰}$ قرار گیرد تا به نمودار $\sin x + \frac{x^{۲}}{۱۰}$ برسیم.



۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

صورت سؤال کاملاً ما راه‌نمایی می‌کند که باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم. طرفین عبارت را در $(x+۱)-(x-۲)=۳$ ضرب می‌کنیم. صرفاً برای راحتی در نوشتن از نماد a برای $x+۱$ و از b برای $x-۲$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a^{۱۳۸۴}-b^{۱۳۸۴} &= (a-b)(a^{۱۳۸۳}+a^{۱۳۸۲}b+\cdots+ab^{۱۳۸۲}+b^{۱۳۸۳}) \\ &= ۳\times(a^{۱۳۸۳}+a^{۱۳۸۲}b+\cdots+ab^{۱۳۸۲}+b^{۱۳۸۳})=۰ \end{aligned}$$

پس $a^{۱۳۸۴}=b^{۱۳۸۴}$ و لذا $a=b$ و یا $a=-b$. با ترجمه‌ی این عبارت‌ها با استفاده از متغیر اصلی مسئله یعنی x، $x-۲=x+۱$ و یا $x+۱=۲-x$. حالت اول به $-۲=۱$ منجر می‌شود که امکان ندارد، اما از حالت دوم جواب $x=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید که تنها جواب مسئله است.

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

$$D\cap C=(A-B)\cap C=A\cap B^c\cap C$$

$$\begin{aligned} F=D-E=D\cap E^c=(A-B)\cap(B-C)^c=(A\cap B^c)\cap(B\cap C^c)^c= \\ =A\cap(B^c\cap(B^c\cup C))=A\cap B^c \end{aligned}$$

پس به وضوح حکم مسئله برقرار است.

توضیح ۱. استفاده از نمودار ون در چنین سؤالاتی بسیار سودمند است.

توضیح ۲. $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۲,۳\}$ و $C=\{۲\}$ مثال نقضی برای همه‌ی گزینه‌های دیگر است.

۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای ایجاد $x^۵$ باید از هر کدام از ۴ پرانتز مسئله یکی از جملات انتخاب شود طوری که مجموع توان‌های آن‌ها برابر ۵ باشد.

از هیچ‌کدام از دو پرانتز $x^۸+x^۴+۱$، نمی‌تواند جمله‌ی $x^۸$ انتخاب شود و ضمناً نمی‌توان هم‌زمان از هر دوی آن‌ها $x^۴$ انتخاب کرد زیرا در هر دو صورت مجموع توان‌ها از ۵ بیش‌تر می‌شود.

اگر از یکی از دو $x^۸ + x^۴ + ۱$، جمله‌ی $x^۴$ انتخاب شود از دیگری باید لزوماً ۱ را انتخاب کنیم و در این حالت از یکی از دو پرانتز باقی‌مانده و از دیگری $۲x$ باید انتخاب شود. بنابراین چهار حالت داریم که هر کدام منجر به یک جمله‌ی $۲x^۵$ و در مجموع $۸x^۵$ می‌شوند.

اگر از هر دو پرانتز $x^۸ + x^۴ + ۱$، ۱ انتخاب شود باید از دو پرانتز دیگر دو جمله انتخاب کنیم که مجموع توان‌های آن‌ها ۵ باشد پس در این حالت ضریب $x^۵$ برابر $۵۶ = (۴ \times ۳ + ۵ \times ۲ + ۶ \times ۱)۲$ می‌شود.

یعنی ضریب $x^۵$ در مجموع $۶۴ = ۸ + ۵۶$ است.

۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ناصر عدد α را انتخاب کرده باشد، در این صورت منصور برای این که امتیاز کم‌تری به ناصر برسد سعی می‌کند عددی را به جای y قرار دهد تا $f(\alpha, y) = y^۲ - ۲\alpha y + -\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$ کم‌ترین مقدار ممکن شود. این عبارت یک رابطه‌ی درجه دوم برحسب y است که کم‌ترین مقدار آن وقتی است که y برابر $\alpha = -\frac{-۲\alpha}{۲}$ باشد و این کم‌ترین مقدار برابر است با $f(\alpha, \alpha) = -۲\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$. یعنی با فرض این‌که منصور خوب بازی می‌کند ناصر با انتخاب α به $-۲\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$ امتیاز می‌رسد. پس ناصر باید α را طوری انتخاب کند که این مقدار بیش‌ترین مقدار ممکن خود باشد. بیش‌ترین مقدار این عبارت زمانی است که α برابر $\frac{۱}{۲} = -\frac{۲}{۲\times(-۲)}$ و این بیش‌ترین مقدار برابر است با $\frac{۳}{۲} = ۱ + (\frac{۱}{۲})۲ + {}^۲(\frac{۱}{۲})۲-$.

۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با تقسیم کردن خواهیم داشت:

$$x^۳ + ax + ۱ = (x + ۳)(x^۲ - ۳x + b) + \big((a - b + ۹)x + ۱ - ۳b\big)$$

اگر طبق فرض مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده باید متحد با صفر باشد.

$$(a - b + ۹)x + (۱ - ۳b) \equiv ۰ \Rightarrow \begin{cases} a - b + ۹ = ۰ \Rightarrow a = -۹ + b \\ ۱ - ۳b = ۰ \Rightarrow b = \dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + ۲b = (-۹ + b) + ۲b = -۹ + ۳b = -۹ + ۳(\frac{۱}{۳}) = -۹ + ۱ = -۸$$

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها روی جمع پخش می‌شود اما خاصیت جابه‌جایی ندارد(لزوماً AB و BA با هم برابر نیستند.)، پس $(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B$. با مقایسه‌ی این رابطه با فرض مسئله می‌فهمیم $AB = BA$ و لذا

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+xy & ۱+x \\ ۱+y & ۲ \end{bmatrix} \\ \\ BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & x+۱ \\ y+۱ & xy+۱ \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow xy + ۱ = ۲ \Rightarrow xy = ۱$$

۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه‌حل اول. دو دایره‌ی وسط که هر کدام با سه دایره‌ی دیگر مجاور هستند را دایره‌ی مرکزی می‌نامیم. در دو برچسب‌گذاری یک‌سان باید برچسب دایره‌های مرکزی یکی باشد زیرا در غیر این صورت حرفی وجود دارد که در یکی از دو برچسب‌گذاری در دایره‌ی مرکزی است و با سه حرف دیگر مجاور است اما در برچسب‌گذاری دیگر تنها با یک حرف مجاور است.

بنابراین برای مشخص کردن یک برچسب‌گذاری ابتدا به $C(۶,۲) = \frac{۶!}{۲!\times۴!} = ۱۵$ حالت دو حرف دایره‌های مرکزی را انتخاب می‌کنیم، سپس دو حرف از چهار حرف باقی مانده را انتخاب می‌کنیم که مجاور حرفی باشد که زودتر در الفبا ظاهر می‌شود(a زودتر از b، b زودتر از c و... ظاهر می‌شود.) این کار به $c(۴,۲) = \frac{۴!}{۲!\times۲!} = ۶$ حالت امکان‌پذیر است. دو حرف باقی‌مانده هم در دو دایره‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند. پس در کل $۹۰ = ۶ \times ۱۵$ برچسب‌گذاری داریم.

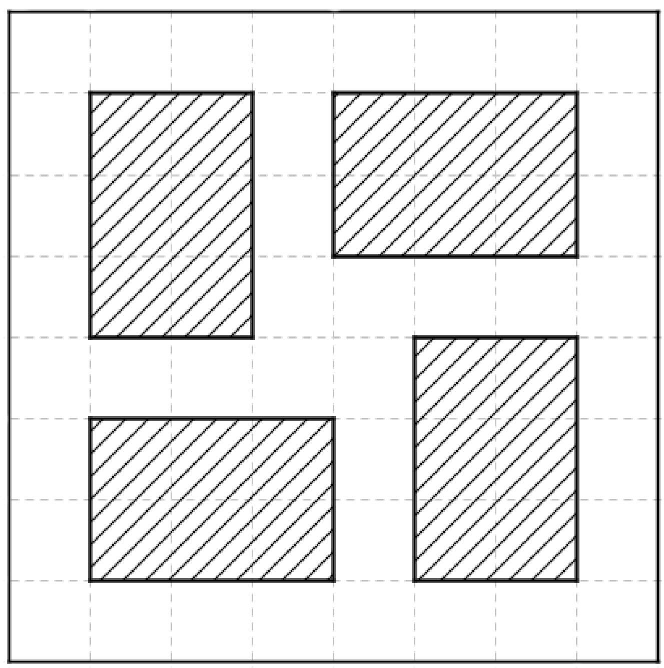
راه‌حل دوم. اگر فرض کنیم هر دو برچسب‌گذاری با هم متقاوت هستند، تعداد کل برچسب‌گذاری‌ها $۷۲۰ = ۶!$ تا می‌شود. برای یک برچسب‌گذاری خاص مثل شکل زیر تعداد برچسب‌گذاری‌هایی که طبق تعریف مسئله با آن یک‌سان هستند می‌شماریم.

در هر برچسب‌گذاری یک‌سان با این برچسب‌گذاری باز هم حرف‌های a و b باید در دایره‌های مرکزی باشند. پس بسته به این که کدام حرف سمت چپ قرار گیرد دو حالت داریم. در هر کدام از حالت‌ها برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره‌ی a دو حالت و برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره‌ی b هم

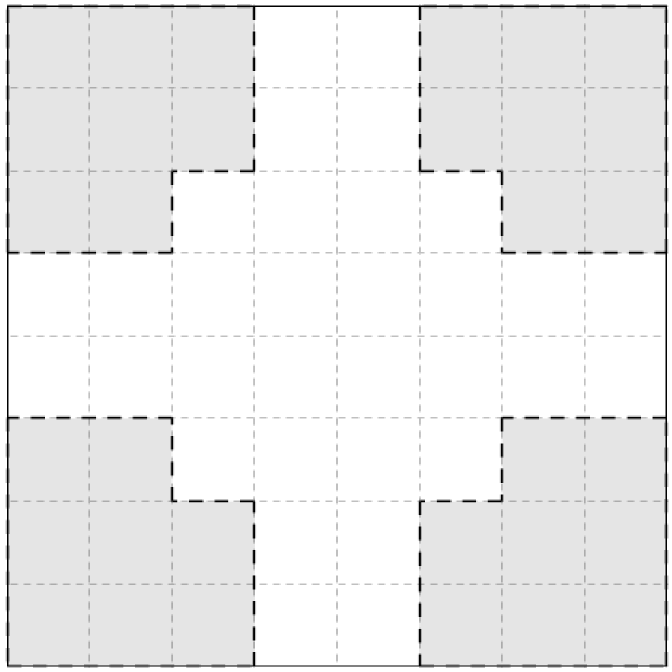
دو حالت داریم. پس در کل ۸ برچسب‌گذاری مشابه با این برچسب‌گذاری وجود دارد(با احتساب خودش). با توجه به این که با استدلال مشابه همین هر برچسب‌گذاری ۸ برچسب‌گذاری مشابه دارد، تعداد کل برچسب‌گذاری‌های متفاوت $\frac{۷۲۰}{۸} = ۹۰$ است.

۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شکل زیر چهار مستطیل ۳×۲ را در جدولی ۸×۸ مشخص می‌کند، طوری که هیچ مستطیل دیگری در جدول جای نگیرد.



حال ادعا می‌کنیم به هر صورت که سه مستطیل ۳×۲ در جدول قرار دهیم، می‌توان یک مستطیل دیگر هم در جدول قرار داد. به چهار شکلی که در گوشه‌ی جدول زیر مشخص هستند دقت کنید. هر مستطیل ۳×۲ حداکثر با یکی از این چهار شکل گوشه‌ای خانه‌ی مشترک دارد. پس اگر تنها سه مستطیل داشته باشم یکی از این گوشه‌ها هست که هیچ کدام از خانه‌های آن پوشیده نشده است، و به وضوح در این شکل یک مستطیل ۳×۲ قرار می‌گیرد.



۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم هر عدد طبیعی خوب مثل n اول است. اگر این طور نباشد مقسوم‌علیهی مثل a دارد که $۱ < a < n$. طبق فرض مسئله

$$\left.\begin{array}{r} ۷\big|a+۱,\ ۷\big|n+۱ \Rightarrow ۷\big|a+n+۲ \\ ۷\big|a+n \end{array}\right\} \Rightarrow ۷\big|۲$$

که این یک تناقض است. حال یک عدد اول p خوب است اگر $۷\big|p+۱$، که اعداد اول این‌چنینیِ کم‌تر از ۱۰۰، تنها $\{۱۳, ۴۱, ۸۳, ۹۷\}$ هستند.

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

اگر $p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد، $S(n)$ را برابر مجموع $\alpha_۱+\alpha_۲+\cdots+\alpha_k$ تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n که در فهرست ظاهر می‌شود، $S(m)$ فرد است. ابتدا تنها اعداد اول در فهرست هستند و برای هر عدد اول p، $S(p)=۱$ و فرد است. برای این منظور ادعا می‌کنیم در هر گام این فرد بودن حفظ می‌شود. فرض کنید همه‌ی اعدادی که تا یک مرحله در فهرست قرار دارند فرد هستند و در مرحله‌ی بعدی با استفاده از سه عدد a، b و c که در فهرست قرار دارند عدد abc را اضافه کنیم. می‌دانیم $S(abc)=S(a)+S(b)+S(c)$، حال چون $S(a)$، $S(b)$ و $S(c)$ فرد هستند، $S(abc)$ هم فرد می‌شود.

حال باید دید برای اعداد هر گزینه مقدار S چه‌قدر است.

$$\begin{aligned} S(۱۰۰۰) &= S(۲^۳ \times ۵^۳) = ۶ \\ S(۳۳۰) &= S(۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۱) = ۴ \\ S(۳۵۰۰۰۰) &= S(۲^۴ \times ۵^۵ \times ۷) = ۱۰ \\ S(۳۷۵) &= S(۳ \times ۵^۳) = ۴ \\ S(۱۰۵۰۰) &= S(۲^۲ \times ۳ \times ۵^۳ \times ۷) = ۷ \end{aligned}$$

پس تنها گزینه‌ی (ه) می‌تواند صحیح باشد. با فرآیند زیر نشان می‌دهیم که با در هر گام با استفاده از اعداد اول و عدد به دست آمده در گام قبلی می‌توان به عدد ۱۰۵۰۰ در فهرست رسید.

$$۲,۳,۵ \rightarrow ۳۰, \quad ۳۰,۲,۵ \rightarrow ۳۰۰, \quad ۳۰۰,۵,۷ \rightarrow ۱۰۵۰۰$$

توضیح: با فرآیندی شبیه به بالا می‌توان نشان داد غیر از اعداد اول، تنها اعداد طبیعی nای در فهرست ظاهر می‌شود که حداقل سه عامل اول داشته باشد و ثانیاً $S(n)$ فرد باشد.

۱۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

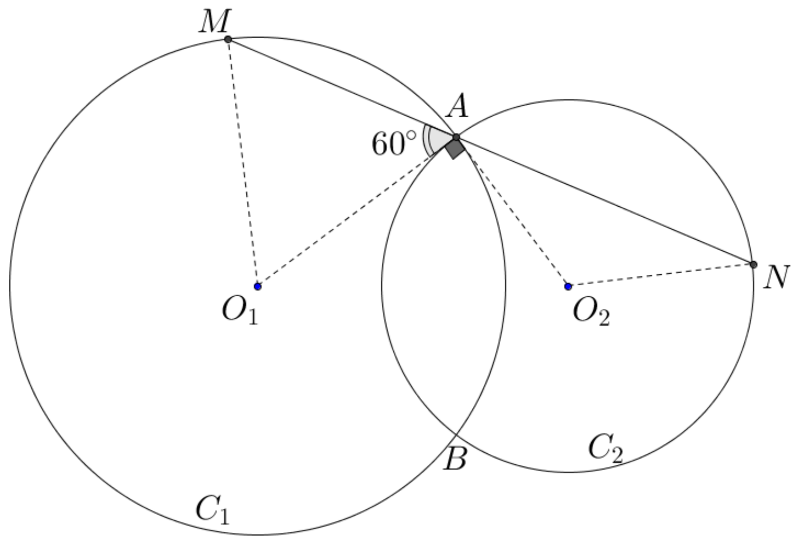
محاسبه‌ی این حاصل‌جمع را با توجه به تعداد ارقام به سه قسمت تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &\sum_{n=۱}^{۹} p(n) = \sum_{i=۱}^{۹} i = ۴۵ \\ &\sum_{n=۱۰}^{۹۹} p(n) = \sum_{i=۱}^{۹}\sum_{j=۰}^{۹}(i \times j) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)(\sum_{i=۰}^{۹} j) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)^۲ = ۴۵^۲ \\ &\sum_{n=۱۰۰}^{۹۹۹} p(n) = \sum_{i=۱}^{۹}\sum_{j=۰}^{۹}\sum_{k=۰}^{۹}(i \times j \times k) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)(\sum_{i=۰}^{۹} j)(\sum_{k=۰}^{۹} k) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)^۳ = ۴۵^۳ \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{n=۱}^{۹۹۹} p(n) = ۴۵ + ۴۵^۲ + ۴۵^۳ = ۹۳۱۹۵$$

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.



با توجه به شکل بالا می‌بینیم که طول AM طبق فرض مسئله برابر ۴ است. از طرف دیگر $MO_۱$ و $AO_۱$ که شعاع‌های دایره‌ی $C_۱$ هستند، طولی برابر ۴ دارند، پس مثلث $AMO_۱$ متساوی‌الاضلاع است و لذا $\angle MAO_۱ = ۶۰^\circ$. به علاوه طبق قضیه‌ی فیثاغورس مثلث $AO_۱O_۲$ هم قائم‌الزاویه است ($۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$)
.

بنابراین زاویه‌ی $\angle NAO_۲$ در مثلث متساوی‌الساقین $AO_۲N$ برابر ۳۰° است و لذا با یک محاسبه‌ی ساده نتیجه می‌شود که $AN = ۳\sqrt{۳}$ و بنابراین $MN = MA + AN = ۴ + ۳\sqrt{۳}$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید a_k تعداد ضربات لازم برای از بین بردن یک سر با k چشم باشد. در این صورت $a_۱ = ۱$، ضمناً اگر $k > ۱$ با یک ضربه به این سر، باید تمام سرهای جدید را از بین ببرد و از آن‌جا که برای هر $i < k$ دیو یک سر i چشم درآورده است به a_i ضربه برای از بین بردن این سر احتیاج دارد. پس

$$a_k = a_{k-۱} + a_{k-۲} + \cdots + a_۱ + ۱$$

از آن‌جا که $a_۱ = ۱$، با استفاده از رابطه‌ی بالا می‌فهمیم $a_۲ = ۲$، $a_۳ = ۴$ و با استفاده از استقرا به راحتی دیده می‌شود که $a_k = ۲^{k-۱}$. پس برای از بین بردن یک سر k چشم، $۲^{k-۱}$ ضربه نیاز است.

سرهای دیو به ترتیب ۴، ۶ و ۸ چشم دارند، پس برای از بین بردن کامل دیو به

$$a_۴ + a_۶ + a_۸ = ۲^۳ + ۲^۵ + ۲^۷ = ۸ + ۳۲ + ۱۲۸ = ۱۶۸$$

ضربه نیاز است.

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.

در زیر بررسی می‌کنیم که اگر هر کدام از گزینه‌ها درست باشند چه می‌شود:

الف. این امکان ندارد زیرا در صورت درست بودن (الف) باید (ب) هم درست باشد(آن‌چه (الف) می‌گوید) که ممکن نیست.

ب. اگر (ب) درست باشد، چون تنها یک گزینه‌ی درست داریم باید (الف) غلط باشد، اما غلط بودن (الف) به معنی غلط بودن (ب) هست. پس این گزینه هم نمی‌تواند درست باشد.

ج. اگر (ج) درست باشد، گزینه‌ی (ه) به ناچار غلط است، اما غلط بودن گزینه‌ی (ه) یعنی هیچ‌کدام از (ج) و (ه) درست نیستند که با فرض اولیه تناقض دارد. پس این گزینه هم نمی‌تواند گزینه‌ی درست باشد.

د. اگر (د) درست باشد. گزینه‌ی (الف) که بیان می‌کند (ب) صحیح است، غلط می‌شود. گزینه‌ی (ب) که بیان می‌کند (ج) و (د) هر دو غلط هستند به خاطر فرض درستی (د) غلط می‌شود. گزینه‌ی (ج) که بیان می‌کند (ج) غلط است هم غلط می‌شود. درستی گزینه‌ی (د) تناقضی با خودش ندارد. در مورد گزینه‌ی ه، غلط بودن آن نتیجه می‌دهد که (ج) و (ه) باید هر دو غلط باشند که از قضا این درست است. پس گزینه‌ی (د) باید گزینه‌ی صحیح باشد.

ه. درستی (ه) نتیجه می‌دهد (ب) غلط است و لذا باید یکی از (ج) و (د) درست باشند که این طور نیست پس این گزینه هم غلط است.

۱۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

برای این‌که عدد طبیعی چهاررقمی $\overline{xyzt}$ مضرب ۵ باشد باید $t \in \{۰,۵\}$. به علاوه اگر یکی از اعداد x، $\overline{xy}$ و $\overline{xyz}$ مضرب سه باشند این عدد تقسیمی می‌شود. بنابراین عدد $\overline{xyzt}$ غیر تقسیمی است اگر $t \in \{۰,۵\}$ و $\overline{x}$، $\overline{xy}$ و $\overline{xyz}$ بر سه بخش‌پذیر نباشند. معادلاً x، $x+y$ و $x+y+z$ بر سه بخش‌پذیر نباشد.(یک عدد طبیعی بر ۳ بخش‌پذیر است، اگر و تنها اگر مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد.) بنابراین می‌توان از روی باقی‌مانده‌ی تقسیم x، y و z تشخیص داد که یک عدد تقسیمی هست یا نه. با بررسی حالت‌های مختلفی که باقی‌مانده‌های x، y و z می‌تواند داشته باشد می‌بینیم که تنها حالت‌های زیر منجر به یک عدد غیرتقسیمی می‌شوند.

باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۳	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
باقی‌مانده‌ی تقسیم y بر ۳	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۲	۲
باقی‌مانده‌ی تقسیم z بر ۳	۰	۱	۰	۲	۰	۲	۰	۱
تعداد حالت‌ها برای x	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳
تعداد حالت‌ها برای y	۴	۴	۳	۳	۴	۴	۳	۳
تعداد حالت‌ها برای z	۴	۳	۴	۳	۴	۳	۴	۳
تعداد حالت‌ها	۴۸	۳۶	۳۶	۲۷	۴۸	۳۶	۳۶	۲۷

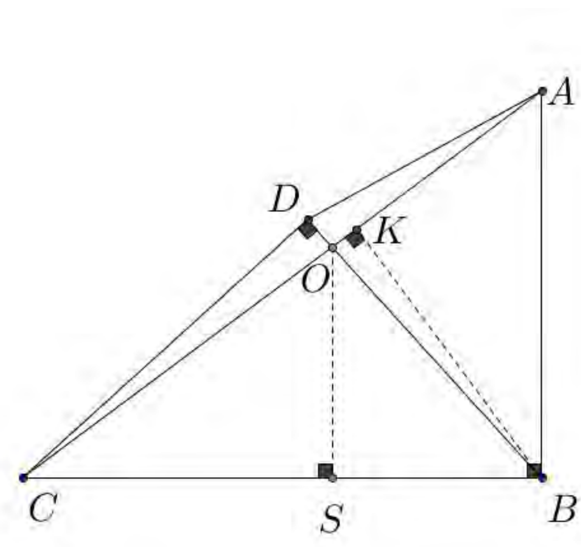
با توجه به این‌که برای t هم دو حالت داریم، تعداد کل اعداد مضرب ۵ غیرتقسیمی ۵۸۸تا است.

$$۲(۲۷ + ۳۶ + ۳۶ + ۴۸ + ۲۷ + ۳۶ + ۳۶ + ۴۸) = ۵۸۸$$

۱۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم و پای این عمود را K می‌نامیم. در این صورت- $\angle CDB = \angle CKB$ و لذا چهارضلعی $CDKB$ محاطی است و در نتیجه- دو مثلث ODC و OKB متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{DC}{KB} = \frac{CO}{OB} = \frac{CO}{۳} \Rightarrow CO = ۳\frac{DC}{KB} = ۳\frac{AB}{KB} \quad (\star)$$



از طرف دیگر دو مثلث AKB و ABC هم متشابه هستند و لذا

$$\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{۵} \overset{\star}{\Rightarrow} CO = \frac{۳}{۵}AC$$

حال از O بر BC عمود می‌کنیم و پای عمود را S می‌نامیم. OS و AB هر دو بر BC عمود هستند و لذا با هم موازی‌اند. بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{CS}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{CS}{۵} \Rightarrow CS = ۳, BS = ۲$$

و در نهایت با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OBS و OSC خواهیم داشت:

$$OC^۲ = OS^۲ + SC^۲ = BO^۲ - BS^۲ + SC^۲ = ۹ - ۴ + ۹ = ۱۴$$

و بنابراین $OC = \sqrt{۱۴}$.

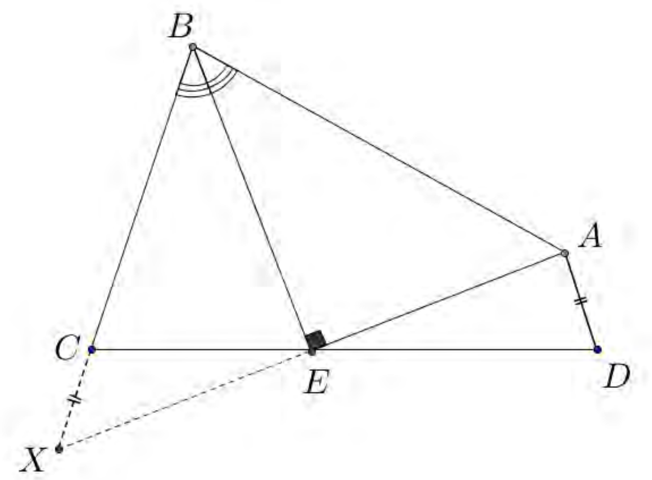
۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

با یک بررسی ساده می‌بینیم که ترکیب اعمال گفته شده در صورت مسئله در حقیقت همان دوران ۷۲° ساعت‌گرد به مرکز مبدأ است و بنابراین انجام این عمل برای ۱۳۸۲ مرحله معادل دورانی به اندازه‌ی ۷۲×۱۳۸۲ درجه است. اما می‌دانیم که دوران ۳۶۰ درجه و مضارب ۳۶۰ درجه همان دوران صفر درجه است. پس

$$۱۳۸۲ \times ۷۲ = ۱۳۸۰ \times ۷۲ + ۲ \times ۷۲ = (۱۳۸ \times ۲) \times ۳۶۰ + ۱۴۴$$

کل این عمل دورانی ۱۴۴درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است و لذا $x = ۴$ و $y = ۵$ است.

۱۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



AE را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AEB و XEB به حالت وتر و یک زاویه($\angle ABE = \angle XBE$) با هم برابر هستند و در نتیجه $(\star)$ $XE = AE$و $BX = AB$ $(\star\star)$. حال با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های XEC و ADE داریم:

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle DEA)}{AD}, \quad \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

با توجه به این که $\angle ADE = \angle BCE$، دو زاویه‌ی $\angle ADE$ و $\angle XCE$ مکمل هستند و در نتیجه سینوس برابر دارند. این موضوع و $\star$ نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} \Rightarrow \frac{\sin(\angle DEA)}{AD} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

اما دو زاویه‌ی $\angle XEC$ و $\angle DEA$ متقابل‌به‌رأس هستند و لذا سینوس برابر دارند. بنابراین $AD = XC$

و

$$(\star\star) \Rightarrow AB = BX = BC + XC = BC + AD$$

که همان چیزی است که گزینه‌ی (د) به آن اشاره می‌کند.

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

طبق رابطه‌ی اول داریم:

$$a^3 + (-b)^3 + 1^3 = 3a(-b)(1)$$

این یعنی مجموع مکعب‌های سه عدد برابر حاصل‌ضرب آن‌ها شده است. طبق اتحاد اویلر این نتیجه می‌دهد این سه عدد با هم برابر هستند و یا این که مجموع آن‌ها برابر صفر است. اگر $a = -b = 1$، $1 + a^5 = 2$ در حالی که $b^5 = -1$ پس این حالت امکان ندارد و $a - b + 1 = 0$، معادلاً $b = a + 1$. حال اگر این نتیجه را در رابطه‌ی دوم جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$1 + a^5 = (1+a)^5 \Rightarrow (1+a)((1+a)^4 - (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)) = 0$$
$$(1+a)^4 - (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = 5a^3 + 5a^2 + 5a = 5a(a^2 + a + 1)$$
$$\Rightarrow 5a(a+1)(a^2 + a + 1) = 0$$

از آن‌جا که $a^2 + a + 1 > 0$، تنها جواب‌های معادله‌ی اخیر $a = 0$ و $a = -1$ هستند که به ترتیب منجر به $b = 1$ و $b = 0$ می‌شوند. پس این دست‌گاه در مجموع دو جواب دارد.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که $a + \frac{1}{a} - 2 = (\frac{a-1}{\sqrt{a}})^2$ و $a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 = (\frac{a^3 - 1}{a\sqrt{a}})^2$. پس

$$a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 \geq \lambda(a + \frac{1}{a} - 2) \Leftrightarrow (\frac{a^3 - 1}{a\sqrt{a}})^2 - \lambda(\frac{a-1}{\sqrt{a}})^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\frac{a-1}{\sqrt{a}})^2((\frac{a^2+a+1}{a})^2 - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow (\frac{a^2+a+1}{a})^2 \geq \lambda$$

یعنی باید بزرگ‌ترین مقدار λ را بیابیم که رابطه‌ی بالا را برآورده کند. این یعنی باید کم‌ترین مقدار عبارت $(\frac{a^2+a+1}{a})^2$را پیدا کنیم.

$$(\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}})^۲ \Rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \Rightarrow \frac{a^۲+a+۱}{a}=a+\frac{۱}{a}+۱\geq ۳$$
$$\Rightarrow (\frac{a^۲+a+۱}{a})^۲\geq ۳^۲=۹$$

پس بیش‌ترین مقدار ممکن برای λ، ۹ است.

۲۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

منظور از زاویه‌ی قورباغه، زاویه‌ای است که خط واصل بین قورباغه با جهت مثبت محور y می‌سازد. دقت کنید که زاویه را با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم. در هر حرکت جدید زاویه‌ی قورباغه ۴۵درجه افزایش پیدا می‌کند، پس بعد از ۱۵ مرحله قورباغه زاویه‌ی قورباغه $۳۱۵^\circ = ۴۵^\circ \times ۱۵$می‌شود و بنابراین قورباغه روی قسمتی از خط $y=-x$ که درون ربع دوم مختصات قرار دارد، خواهد بود.

به علاوه اگر فاصله‌ی قورباغه تا مبدأ مختصات بعد از گام nاُم را d_n بنامیم. $d_{n+۱}$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی است که طول ساق آن برابر d_n است. بنابراین $d_{n+۱}=\sqrt{۲}d_n$. پس

$$d_{۱۵}=\sqrt{۲}.d_{۱۴}=(\sqrt{۲})^۲d_{۱۳}=\cdots=(\sqrt{۲})^{۱۵}d_۰=(\sqrt{۲})^{۱۵}=۲^۷\sqrt{۲}=۱۲۸\sqrt{۲}$$

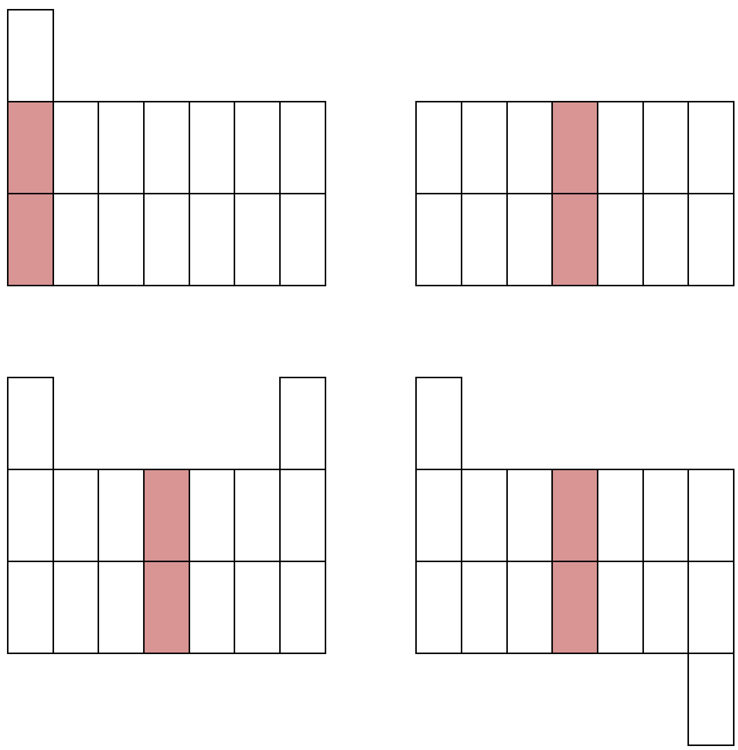
با توجه به این‌که (a,b) روی خط $y=-x$ قرار دارد، $b=-a>۰$ و

$$۲^{۱۵}=(۲^۷\sqrt{۲})^۲=d_{۱۵}^۲=a^۲+b^۲=۲a^۲\Rightarrow a=-۲^۷=-۱۲۸$$

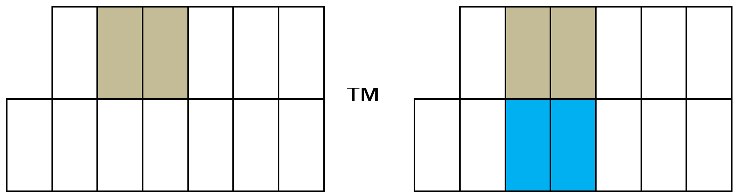
توضیح: می‌توان با اندکی تلاش به دست آورد که اگر قورباغه در خانه‌ی (x,y) قرار داشته باشد، بعد از جهش از این خانه با شیوه‌ای که در صورت سؤال بیان شده است به خانه‌ی $(x+y,y-x)$ می‌رود. (در حقیقت بردار (x,y) با دوران ۹۰درجه‌ی آن در جهت ساعت‌گرد یعنی $(y,-x)$ جمع می‌شود.)

۲۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

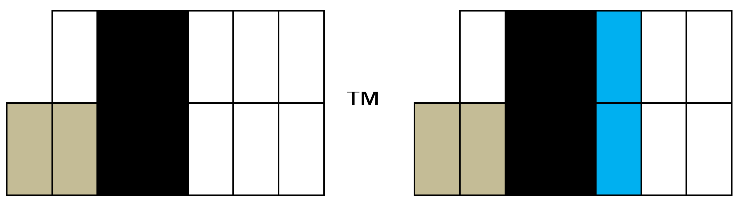
ادعا می‌کنیم در گزینه‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) نفر اول همواره می‌تواند برنده‌ی بازی باشد. به این صورت که در هر کدام از این چهار گزینه مطابق شکل زیر با قرار دادن این کاشی زمین بازی شکلی است که دارای یک خط تقارن یا یک مرکز تقارن است و به علاوه در این زمین جدید نفر دوم شروع کننده‌ی بازی است. حالا نفر اول در هر گام قرینه‌ی خانه‌هایی که نفر دوم با یک کاشی پر کرده است را با یک کاشی جدید پر می‌کند. با این نحوه‌ی بازی اگر نفر دوم بازی کند، نفر اول حتماً می‌تواند حرکت بعد از آن را هم انجام دهد و لذا نفر اول نمی‌تواند بازنده باشد و بنابراین حتماً برنده است.

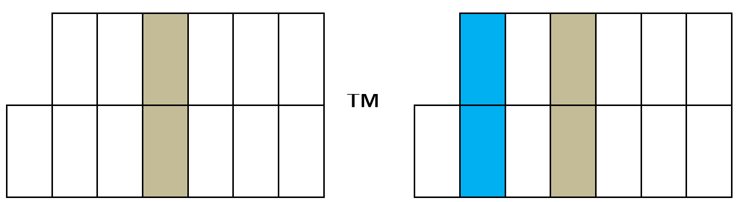


حال روشی ارایه می‌دهیم که نفر دوم می‌تواند با این روش در گزینه‌ی (ه) برنده‌ی بازی باشد.
اگر نفر اول یک کاشی افقی را در جدول قرار دهد طوری که شامل تک‌خانه‌ی پایین چپ جدول نباشد، نفر دوم یک کاشی افقی را دقیقاً پایین یا بالای کاشی نفر اول قرار می‌دهد.(اگر نفر اول در ردیف پایین گذاشته باشد، نفر دوم در ردیف بالا می‌گذارد و بالعکس)
در زیر شکل سمت چپ حرکت نفر اول و شکل سمت راست حرکت نفر دوم را تصویر می‌کند. خانه‌های مشکی رنگ هم خانه‌هایی را نشان می‌دهند که قبلاً با کاشی پر شده اند.



اگر نفر اول یک کاشی عمودی در جدول قرار دهد، یا این‌که یک کاشی افقی را مطابق شکل زیر طوری قرار دهد که تک‌خانه‌ی پایین سمت چپ جدول را بپوشاند، نفر دوم یک کاشی عمودی را در اولین ستون از سمت چپ که کاملاً خالی باشد قرار می‌دهد.





وقتی نفر اول و دوم یک دور بازی خود را انجام دهند، دو ستون از ستون‌های دوتایی جدول غیرقابل قابل استفاده می‌شود، اگر نفر اول یک بار از حرکت‌های دوم استفاده کند، تک ستون یک خانه‌ای هم غیرقابل استفاده می‌گردد. بنابراین در هر دو بازی هر دو نفر اول و دوم ۲ ستون از شش ستون کامل جدول(غیر از تک ستون ناقص) غیرقایل استفاده می‌شود. بنابراین با ادامه‌ی این روند به وضعیتی می‌رسیم که نفر اول نتواند بازی را ادامه دهد.

۲۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ساعت ۵ و x دقیقه باشد، در این صورت زاویه‌ی عقربه‌ی دقیقه‌شمار نسبت به نقطه‌ی صفر (همان۱۲)، $\frac{x}{۶۰} \times ۳۶۰ = ۶x$ درجه و زاویه‌ی عقربه‌ی ساعت‌شمار برابر $۵ \times ۳۰ + \frac{x}{۶۰} \times ۳۰ = ۱۵۰ + \frac{x}{۲}$ درجه باشد. حال اگر در ساعت a و b دقیقه عقربه‌ها در وضعیت مشابهی قرار داشته باشند. در این صورت:

$$
\begin{aligned}
&۳۰a + \frac{b}{۲} = ۶x \Rightarrow ۶\Big|\frac{b}{۲} \Rightarrow ۱۲\Big|b \\
&۶b = ۱۵۰ + \frac{x}{۲} \Rightarrow ۶\Big|\frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۱۲k \ (۰ \le k \le ۵) \\
&\Rightarrow ۶b = ۱۵۰ + ۶k \Rightarrow b = ۲۵ + k
\end{aligned}
$$

با توجه به این که b بر ۱۲ بخش‌پذیر است، باید $k + ۱$ بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد که برای $k = ۰, ۱, \cdots, ۵$ امکان ندارد.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

رشته‌ی مرحله‌ی iاُم را با A_i نمایش می‌دهیم. هم‌چنین منظور ما از نماد A_iA_j این است که رشته‌ی مربوط به A_i در سمت چپ رشته‌ی A_j قرار گرفته است. به طور مثال $A_۳ = A_۲A_۱$.

به استقرا نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی m، $A_{۳m+۲} = A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}A_{۳m-۱}A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}$. (با اندکی بازی کردن برای رسیدن به $A_۵$ و سپس $A_۸$ از روی $A_۵$ و با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۳۸۲ بر ۳ برابر ۲ است می‌توان این رابطه را حدس زد.)

برای حالت $m = ۱$ که حکم به وضوح برقرار است. ($A_۵ = A_۲A_۱A_۲A_۲A_۱$)

حال فرض کنید حکم برای k برقرار باشد، یعنی:

$$A_{۳k+۲} = A_{۳k-۱}A_{۳k-۲}A_{۳k-۱}A_{۳k-۱}A_{۳k-۲}$$

حال اگر باکتری‌ها سه مرحله رشد کنند به اندیس هر A_nای سه واحد اضافه می‌گردد. پس

$$A_{۳(k+۱)+۲} = A_{۳k+۵} = A_{۳k+۲}A_{۳k+۱}A_{۳k+۲}A_{۳k+۱}A_{۳k+۲}$$

و حکم ثابت می‌شود. حال از آن‌جا که تعداد باکتری‌های دو رشته‌ی $A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}$ و $A_{۳m-۲}A_{۳m-۱}$ یک‌سان و برابر مجموع تعداد باکتری‌های رشته‌های $A_{۳m-۱}$ و $A_{۳m-۲}$ است، سه باکتری وسطی مربوط به $A_{۳m+۲}$ همان سه باکتری وسطی مربوط به $A_{۳m-۱}$ است و با استدلال مشابه سه باکتری وسطی $A_{۳m-۱}$ همان سه باکتری وسطی $A_{۳m-۴}$ است. با ادامه‌ی همین فرآیند می‌فهمیم که سه باکتری وسطی $A_{۳m+۲}$

همان سه باکتری وسطی A_5 است. پس با توجه به این‌که $1382 = 3\times460 + 2$ گزینه‌ی (الف) گزینه‌ی درست است.

۲۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که n باید عددی فرد باشد. زیرا اگر n بر ۲ بخش‌پذیر شود:

$$0 \equiv 2^n + 3^n \equiv 2^n + (-2)^n \equiv 2^n + 2^n \equiv 2^{n+1} \quad (\text{به پیمانه‌ی } 5)$$

که امکان ندارد. حال برای $n \geq 3$ داریم: (حالت $n = 1$ و $n = 2$ به وضوح جواب نیستند.)

(دقت کنید که همه‌ی روابط زیر بالا به پیمانه‌ی ۱۲۵ هستند.)

$$0 \equiv 2^n + 3^n \equiv 2^n + (5-2)^n \equiv 2^n + \binom{n}{n}5^n(-2)^0 + \cdots + \binom{n}{1}5^1(-2)^{n-1} + \binom{n}{0}5^0(-2)^n$$
$$\equiv 2^n - \frac{n(n-1)}{2}5^2 \times 2^{n-2} + 2^{n-1} \times 5 \times n - 2^n \equiv 2^{n-3}(-25n^2 + 45n)$$

حال با استفاده‌ی از رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$125 \Big| 2^{n-3} \times 5n(5n-9) \Rightarrow 25 \Big| 2^{n-3}n(5n-9)$$

حال با توجه به این‌که $(5,2) = 1$ و $(5,5n-9) = (5,-9) = (5,1) = 1$ و با به کارگیری لم اقلیدس نتیجه می‌شود که باید n بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد. کوچک‌ترین عدد طبیعی مضرب ۲۵ خودش است که مجموع ارقامش برابر ۷ می‌باشد. پس گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲۷. گزینه‌ی (ج) درست است.

اولاً فرض کنید $10^{k-1} \leq n < 10^k$ یک عدد ریشه‌دار k رقمی باشد. در این صورت $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1}$.
حال داریم

$$10^{k-1} \leq n = (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1)^2 < (10k)^2 \Rightarrow 10^{k-3} < k^2$$

اما به سادگی به کمک استقرا می‌توان نشان داد که اگر k بزرگ‌تر از ۴ باشد، $10^{k-3} \geq k^2$ و لذا عدد ریشه‌دار با بیش از ۴ رقم نداریم و بنابراین تعداد اعداد ریشه‌دار باید متناهی باشد.

حال ادعا می‌کنیم عدد ریشه‌دار ۴ رقمی هم وجود ندارد. اگر $n=\overline{abcd}$ یک عدد ریشه‌دار چهار رقمی باشد، این یعنی $1000 \leq n=(a+b+c+d)^2<40^2=1600$ پس $a=1$ و اگر a برابر یک باشد، باید داشته باشیم $1000 \leq n=(1+b+c+d)^2<(1+10+10+10)^2=31^2=961$ که امکان ندارد. پس عدد ریشه‌دار چهاررقمی هم نداریم. اما به وضوح ۸۱ یک عدد ریشه‌دار دورقمی است.

به علاوه دقت کنید که می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۹ با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ با هم برابر هستند. اگر مجموع ارقام n را با $S(n)$ نمایش دهیم، n ریشه‌دار است اگر $n=S(n)^2$. پس باید

$$n \equiv S(n) \equiv n \equiv S(n)^2 \equiv n^2 \ (\text{به پیمانه‌ی } 9)$$

پس باید $9\,|\,n(n-1)$، با توجه به این که n و $n-1$ هر دو نمی‌توانند بر ۳ بخش‌پذیر باشند این تنها در صورتی امکان دارد که $9\,|\,n$ و یا $9\,|\,n-1$. یعنی تمام اعداد ریشه‌دار به شکل $9k$ و $9k+1$ هستند و غیر از این دو صورت عدد ریشه‌داری نداریم.

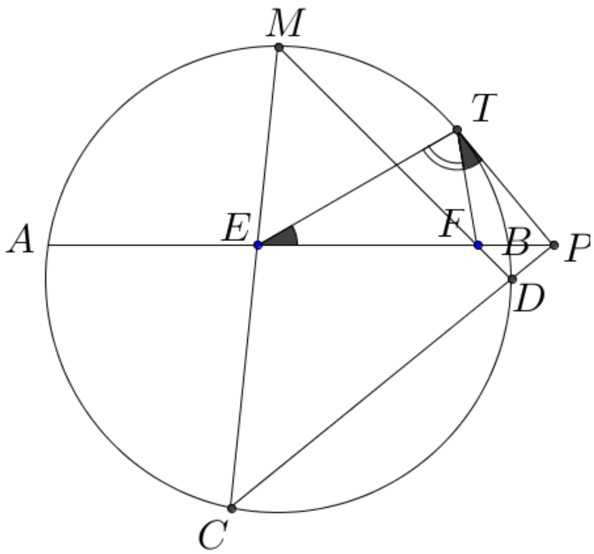
توضیح: دقت کنید که اگر n عددی ریشه‌دار باشد، از آن‌جا که $n<1000$، $S(n)=\sqrt{n}<\sqrt{1000}$، پس $S(n)\leq 32$. اما $S(n) \equiv n \equiv 0,1 \ (\text{به پیمانه‌ی } 9)$. پس $S(n)\in\{1,8,9,17,18,26,27\}$.

اما

$$\begin{aligned}
S(8^2)&=S(64)=10\neq 8\\
S(17^2)&=S(289)=19\neq 17\\
S(18^2)&=S(324)=9\neq 18\\
S(26^2)&=S(676)=19\neq 26\\
S(27^2)&=S(729)=18\neq 27
\end{aligned}$$

بنابراین تنها عددهای ریشه‌دار ۱ و ۸۱ هستند.

۲۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.



ابتدا دقت کنید که $\angle MBE = \angle BCM = \frac{\widehat{AB}}{۲}$، بنابراین با توجه به این‌که زاویه‌ی $\angle BME$ در دو مثلث BME و BMC مشترک است، این مثلث متشابه هستند. نسبت تشابه این دو مثلث نتیجه می‌دهد $MB^۲ = ME.MC$. با استدلال کاملاً مشابه و با توجه به مثلث‌های AMF و BAM به دست می‌آوریم $MA^۲ = MF.MD$. از آن‌جا که دو کمان MA و MB با هم برابر هستند، $MA^۲ = MB^۲$ و در نتیجه $ME.MC = MF.MD$ و این یعنی چهارضلعی $EFDC$ محاطی است. از محاطی بودن این چهارضلعی نتیجه می‌شود که $PF.PE = PD.PC$. اما طبق قوت P نسبت به دایره‌ی اصلی مسئله $PD.PC = PT^۲$. این رابطه نتیجه می‌دهد که دو مثلث PTF و PTE متشابه‌اند و لذا $\angle TEP = \angle PTF = ۳۰^\circ$. در نتیجه داریم $\angle TPE = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ - ۳۰^\circ - ۷۰^\circ = ۵۰^\circ$.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

M را وسط ضلع AC و G را مرکز ثقل مثلث بگیرید. در این صورت نقطه‌ی A باید روی کمان درخور زاویه‌ی ۱۵۰° نظیر پاره‌خط BM باشد. از آن‌جا که طول AG برابر $\frac{۲}{۳}$ میانه‌ی نظیر رأس A است، کافی است کم‌ترین مقدار ممکن برای AG را بیابیم و آن را در $\frac{۳}{۲}$ ضرب کنیم. فرض کنید O مرکز این کمان درخور باشد و نیم‌خط OG دایره را در نقطه‌ی X قطع کند. حال داریم

$$OG + GA \geq OA = OX \Rightarrow GA \geq OX - OG = XG$$

یعنی کم‌ترین مقدار ممکن طول GX است. حال باید طول GX را بیابیم. با توجه به قوت نقطه‌ی G داریم:

$$TG.GX = GA.GM = ۲ \Rightarrow (۲R - GX)GX = ۲$$

که T و R به ترتیب محل تماس دوم خط GX و دایره‌ی محیطی AMC و شعاع این دایره هستند.

$$R = \frac{۳}{۲\sin(۱۵۰^{\circ})} = ۳$$

پس $GX^{۲} - ۶GX + ۲ = ۰$ و بنابراین $GX = ۳ \pm \sqrt{۷}$ که چون $GX < R = ۳$ تنها حالت $GX = ۳ - \sqrt{۷}$ قابل قبول است.

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

T را نقطه‌ی وسط ضلع BC بگیرید و فرض کنید h_a، h_b، h_c و h_t به ترتیب طول عمودهای وارد از A، B، C و T بر MN باشند. از آن جا که قاعده‌ی هر سه مثلث همان MN است باید $h_b + h_c = h_a$. حال از آن‌جا که T نقطه‌ی وسط ضلع BC است، می‌توان به سادگی به کمک قضیه‌ی تالس نتیجه گرفت که $h_t = \frac{h_b + h_c}{۲} = \frac{h_a}{۲}$. حال فرض کنید خط واصل بین A و T، خط مذکور در صورت سؤال را در نقطه‌ی S قطع کند. در این صورت به دلیل قضیه‌ی تالس و توازی عمودهای وارد از T و A، $\frac{AS}{ST} = \frac{h_a}{h_t} = ۲$، پس S نقطه‌ای روی میانه‌ی نظیر ضلع BCاز مثلث ABC است که این میانه را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس باید مرکز ثقل مثلث باشد و بنابراین این خط همواره از مرکز ثقل مثلث که نقطه‌ای ثابت در صفحه‌ی مثلث است می‌گذرد.