

به نام او

راه حل سؤالات مرحله دوم بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۱

۱. ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای هر $n \geq 3$ اگر a_1, a_2, \dots, a_n جای گشتی با خاصیت مورد نظر باشد، آن‌گاه $a_n = n$. برای اثبات دو حالت را در نظر می‌گیریم:
الف. اگر n فرد باشد. آن‌گاه بنابه فرض مسئله،

$$n|2(a_1 + \dots + a_{n-1}) = 2(1 + 2 + \dots + n - a_n) = n(n+1) - 2a_n$$

در نتیجه $n|2a_n$ و چون n فرد است، $n|a_n$ که با توجه به این که $a_n \leq n$ نتیجه می‌گیریم $a_n = n$.
ب. اگر n زوج باشد ($n = 2k$)، آن‌گاه همانند قسمت قبل $n|2a_n$ ، لذا $k|a_n$ و $a_n \leq n$ بنابراین $a_n = 2k$ یا $a_n = k$.

اگر $a_n \neq n$ ، آن‌گاه باید $a_n = k$. اما بنابه فرض مسئله ($i = n - 2$) می‌دانیم:

$$\begin{aligned} n - 1|2(a_1 + \dots + a_{n-2}) &= 2(1 + 2 + \dots + n - a_n - a_{n-1}) \\ &= n(n+1) - 2a_n - 2a_{n-1} \\ &= n(n-1) + 2n - 2k - 2a_{n-1} \\ &= n(n-1) + n - 2a_{n-1} \end{aligned}$$

پس $n - 1|n - 2a_{n-1}$ و یا معادلاً $2k - 1|2k - 2a_{n-1}$ و در نتیجه $2k - 1|k - a_{n-1}$ ، اما به وضوح $2k - 1 < |k - a_{n-1}|$ و بنابراین $k - a_{n-1} = 0$ و یا $a_{n-1} = k$ که تناقض است (چون a_n هم برابر k بود).
بنابر مطالب بالا در هر جای گشت با شرایط مسئله $a_n = n$ حال a_n را از دنباله حذف می‌کنیم. دنباله‌ی به دست آمده نیز جای گشتی از ۱ تا $n - 1$ با خاصیت مورد نظر مسئله است، در نتیجه جمله‌ی آخر این دنباله یعنی a_{n-1} هم باید برابر $n - 1$ باشد. به همین ترتیب مشخص است که برای هر $3 \leq k \leq n$ باید داشته باشیم $a_k = k$. برای a_1 و a_2 هم به وضوح می‌توان دو حالت ۱ و ۲ یا ۲ و ۱ را در نظر گرفت. به این ترتیب تنها دو جای گشت $(1, 2, \dots, n)$ و $(2, 1, 3, \dots, n)$ خاصیت مورد نظر مسئله را دارند.

۲. قرار دهید

R : تعداد مستطیل‌ها، H : تعداد خطوط افقی

V : تعداد خطوط عمودی، X : تعداد چهارراه‌ها

می‌خواهیم ثابت کنیم $H + V + X = R + 3$. برای کار مجموع زاویه‌های مستطیل‌های پوشاننده را از دو روش محاسبه می‌کنیم. اولاً چون تعداد مستطیل‌ها R و جمع زوایای هر مستطیل 360° است، پس این مقدار برابر است با $R \times 360^\circ$. ثانیاً گره‌های شکل به صورت یکی از انواعی است که در شکل ۱ (ابتدای صفحه‌ی بعد) می‌بینید.

تعداد گره‌های نوع (۱) یعنی رأس‌های مستطیل بزرگ فقط ۴ تا است. تعداد گره‌های نوع (۳) هم که X تا است. اما تعداد گره‌های نوع (۲) چندتا است؟ اگر به شکل دقت کنید متوجه خواهید شد که هر یک از دو سر یک پاره‌خط افقی و عمودی به غیر از چهار ضلع مستطیل بزرگ به گره از نوع (۲) ختم



نوع (۱) نوع (۲) نوع (۳)

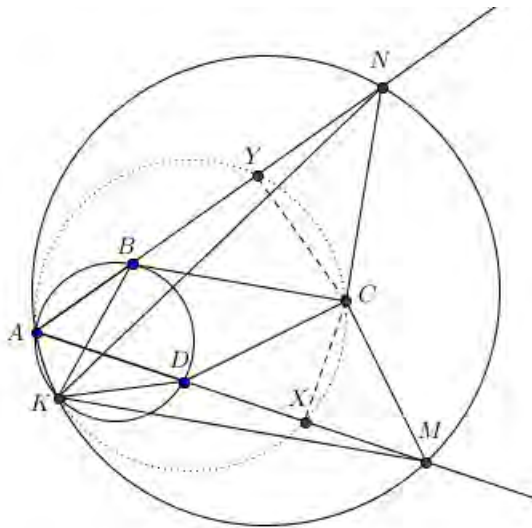
شکل ۱: انواع مختلف گره‌های موجود در شکل

می‌شود. بنابراین تعداد گره‌های نوع (۲) برابر است با $2 \times (H + V - 4)$. حال توجه کنید که گره‌های نوع (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب زوایای 90° ، 180° و 360° تولید می‌کنند. پس مجموع زاویه‌های مستطیل برابر است با:

$$4 \times 90^\circ + 2 \times (H + V - 4) \times 180^\circ + X \times 360^\circ = (H + V + X - 3) \times 360^\circ$$

از مقایسه‌ی این مقدار با مقداری که در ابتدا به دست آوردیم حکم مسئله نتیجه می‌شود.

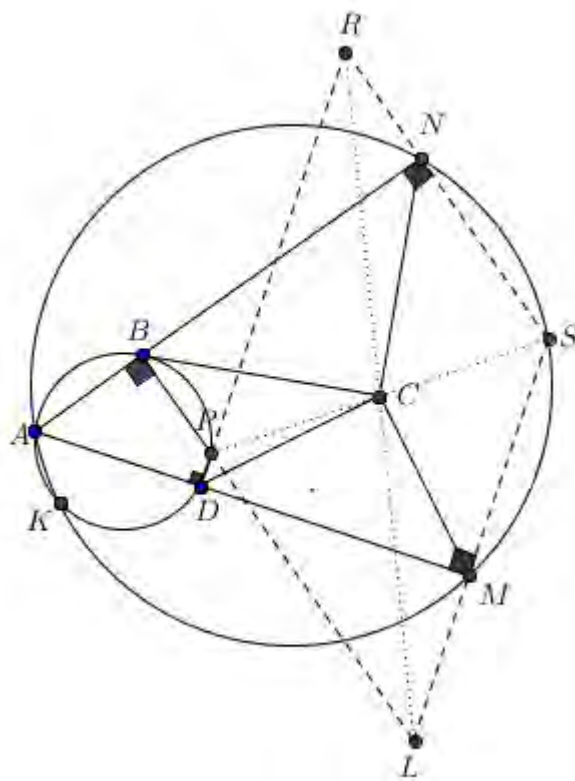
۳. راه‌حل اول. نقطه‌های X و Y را به ترتیب وسط DM و BN بگیرید. با توجه به این که دو دایره در نقطه‌ی K متقاطع هستند، زاویه‌های $\angle KMD$ و $\angle KNB$ در دایره‌ی محیطی AMN روبه‌رو به کمان AK هستند و در نتیجه با هم برابرند. به همین ترتیب زاویه‌های $\angle KBA$ و $\angle KDA$ در دایره‌ی محیطی ABD روبه‌رو به کمان AK هستند و لذا با هم برابر هستند. برابری این زاویه‌ها نتیجه می‌دهد که دو مثلث KMD و KNB با هم متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌های $\angle KYB$ و $\angle KXD$ که زاویه‌های بین میانه و ضلع متناظر در این دو مثلث هستند با هم برابر می‌شوند. این برابری نتیجه می‌دهد که چهارنقطه‌ی A, K, Y و X روی یک دایره قرار دارند.



از طرف دیگر با توجه به این که $\angle ABC = 135^\circ$ و $\angle BCN = 90^\circ$ نتیجه می‌شود که مثلث BCN

قائم الزوایه‌ی متساوی الساقین است و لذا میانه‌ی آن یعنی YC ارتفاع هم هست و این یعنی $\angle AYC = 90^\circ$. با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $\angle AXC$ هم قائمه است. پس چهار نقطه‌ی A, Y, C, X هم روی یک دایره قرار دارند. بنابراین در کل پنج نقطه‌ی A, Y, K, C, X هم دایره هستند و در نتیجه $\angle AKC = \angle AYC = 90^\circ$. بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

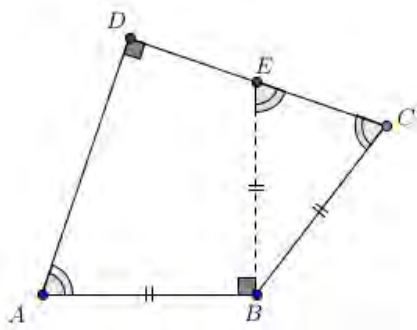
راه حل دوم. باید ثابت کنیم دایره‌ی محیطی مثلث ABD ، دایره‌ی محیطی مثلث AMN و دایره‌ی به قطر AC ، غیر از A در نقطه‌ی دیگری (K) هم‌رس هستند. برای این منظور کافی است ثابت کنیم مرکزهای این سه دایره هم‌خط هستند. (چرا؟)



برای اثبات هم‌خطی مرکزهای این سه دایره، کافی است ثابت کنیم متجانس این مرکزها نسبت به A و به نسبت تجانس ۲ هم‌خط هستند. متجانس مرکز دایره به قطر AC ، C می‌باشد. متجانس مرکزهای دایره‌های محیطی ABD و AMN را که البته نقطه‌ی مقابل قطری A در این دایره‌ها می‌باشند، به ترتیب P و S می‌گیریم. پس نشان دهیم سه نقطه‌ی P, S, C هم‌خط هستند. از آنجایی که زاویه‌های $\angle PBA, \angle SMA, \angle PDA$ و $\angle SNA$ قائمه هستند، لذا $PB \parallel SN$ و $PD \parallel SM$. بنابراین اگر محل برخورد PB با SM را L و محل برخورد PD و SN را R بنامیم، چهارضلعی $PRSL$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود. حال به موقعیت نقطه‌ی C توجه کنید. فاصله‌ی C تا SL برابر فاصله‌ی C تا PD و همچنین فاصله‌ی C تا SR و برابر با فاصله‌ی C تا PL است. بنابراین C محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع، و در

نتیجه نقطه‌های P ، C و S هم خط هستند و حکم ثابت می‌شود.

۴. مطابق شکل در نقطه‌ی B عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند. چون $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ، بنابراین $ADEB$ محاطی است و لذا $\angle BEC = \angle DAB$. از طرفی با توجه به فرضیات مسئله در مورد چهارضلعی $ABCD$ ، $\angle DAB = \angle BCD$ ، بنابراین $\angle BEC = \angle BCD$ و در نتیجه $BE = BC = AB$ و در نتیجه ثابت می‌شود که E روی CD نقطه‌ای ثابت در صفحه است، که مکان آن تنها به A و B بستگی دارد.



۵. فرض کنید $a + b\delta$ ، $(\delta \neq 0)$ ، یک ریشه‌ی $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ باشد. پس

$$0 = P(a + b\delta) = a_0 + a_1(a + b\delta) + \dots + a_n(a + b\delta)^n$$

اما با توجه به این که $\delta^2 = 0$ با استفاده از بسط دو جمله‌ای یا به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که:

$$(a + b\delta)^k = a^k + ka^{k-1}b\delta$$

بنابراین

$$0 = (a_0 + a_1a + a_2a^2 + \dots + a_na^n) + b\delta(a_1 + 2a_2a + \dots + na_na^{n-1})$$

توجه کنید که اگر $u + \delta v = 0$ ، آن‌گاه با توجه به قرارداد ذکر شده در صورت مسئله $u = 0$ و $v = 0$. پس

$$a_0 + a_1a + \dots + a_na^n = P(a) = 0$$

و می‌توان نوشت $P(x) = (x - a)Q(x)$. حال باید نشان دهیم که a ریشه‌ی $Q(x)$ هم می‌باشد. برای این

کار Q را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم، $Q(x) = (x - a)R(x) + c$ و

$$P(x) = (x - a)((x - a)R(x) + c)$$

$$\Rightarrow 0 = P(a + b\delta) = b\delta(b\delta R(a + b\delta) + c)$$

$$= b(b\delta^2 R(a + b\delta) + c\delta) = bc\delta$$

پس $bc\delta = 0$ ، و در نتیجه $bc = 0$ و چون $b \neq 0$ ، پس $c = 0$. بنابراین $P(x) = (x - a)^2 R(x)$

برای اثبات طرف دیگر چون a ریشه‌ی مضاعف $P(x)$ است، پس $P(x) = (x - a)^2 R(x)$. در این صورت

برای هر $x = a + b\delta$ ($b \neq 0$) خواهیم داشت،

$$P(a + b\delta) = (b\delta)^2 R(a + b\delta) = 0$$

۶. فرض کنید این ۲۰ نفر به ترتیب x_1, x_2, \dots, x_{20} بازی انجام داده باشند. چود در مجموع ۱۰۰ بازی انجام شده است، لذا $x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 200$.

تعداد راه‌های انتخاب دو تیم دو نفره با شرایط مسئله برابر است با $\sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2} - \binom{100}{2}$. زیرا برای انتخاب دو تیم دو نفره، که دو نفر هم‌تیمی با هم بازی کرده باشند، باید دو تا از ۱۰۰ بازی انجام‌شده را انتخاب کنیم (به $\binom{100}{2}$ روش) و دو نفر شرکت‌کننده در هر بازی را به عنوان یک تیم بگیریم. اما از این تعداد، باید حالتی را که دو تیم عضو مشترک پیدا می‌کنند کم کنیم. تعداد حالت‌ها برابر $\sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2}$ است، زیرا اگر عضو مشترک دو تیم، نفر k باشد، دو عضو دیگر تیم‌ها باید از بین x_k نفری انتخاب شوند که با نفر k بازی کرده‌اند. پس،

$$4050 = \binom{100}{2} - \sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2} = 4950 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} x_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} x_k$$

بنابراین $\sum_{k=1}^{20} x_k^2 = 2000$ پس

$$\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} x_k^2 = \left(\frac{\sum_{k=1}^{20} x_k}{20} \right)^2$$

اما می‌دانیم که برای هر n عدد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right)^2$$

و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. بنابراین در مسئله‌ی فوق هم باید $x_1 = x_2 = \dots = x_{20}$ باشند.