به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۱

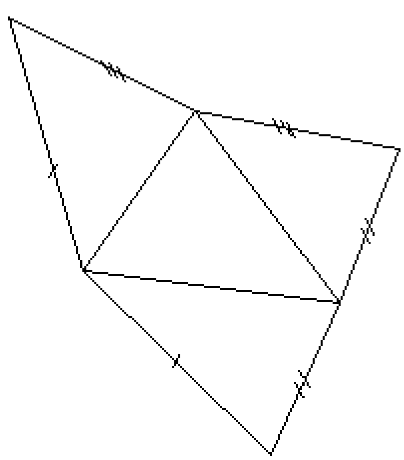
۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

به وضوح می‌دانیم $\overline{abc}-(a+b+c)=۹۹a+۹b=۹(۱۱a+b)$ و اگر a، b، c و d چهار عدد طبیعیِ یک‌رقمی باشند و $۱۱a+b=۱۱c+d$ باشد آن‌گاه $۱۱(a-c)=d-b$ و چون $\left|d-b\right|<۱۱$ نتیجه می‌شود $b-d=a-c=۰$ و بنابراین تعداد اعدادی که می‌توانیم به آن‌ها برسیم برابر است با تعداد زوج مرتب‌های (a,b) است که عددی کمتر از ۶۰۰ تولید می‌کنند و تعداد این زوج مرتب‌ها برابر است با ۵۰=10×5.

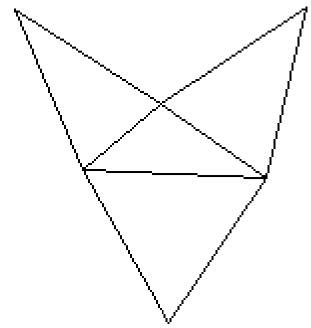
۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

می‌دانیم حجم منشور از رابطه‌ی "مساحت قاعده ضرب در ارتفاع" بدست می‌آید. ارتفاع که ثابت است پس برای به‌دست‌آوردن حداکثر حجم کیک باید بیش‌ترین مساحت قاعده را داشته باشیم، که مساحت قاعده‌ی قطعه کیک هم با کاهش زاویه بیش‌تر می‌شود در واقع سطح مقطع یک بیضی است که می‌توان به صورت شهودی دریافت که مساحت آن با کاهش زاویه زیاد می‌شود، پس گزینه‌ی (الف) که کم‌ترین زاویه را دارد درست است.

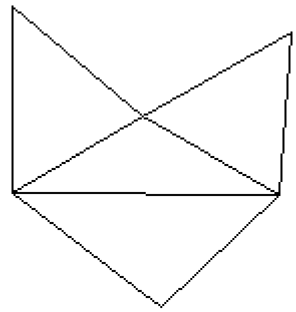
۳- به‌تر است برای تصور چهار وجهی، بازشده‌ی آن را در نظر بگیریم. بازشده‌ی چهاروجهی، چیزی به شکل زیر است(به برابری طول‌های مشخص‌شده روی شکل توجه کنید.)



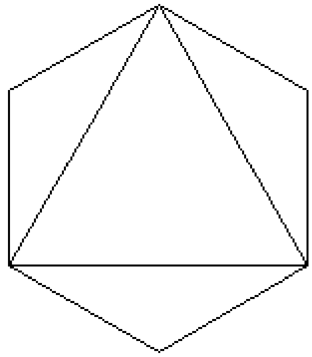
که برابری این طول‌ها شرط کافی برای این‌که این شکل باز شده‌ی یک چهاروجهی باشد است، چون فرض کنید که چنین شکلی را روی کاغذ بریده باشیم با با چسباندن دو تا از طول‌های مشخص‌شده روی شکل به هم‌دیگر مثلثی تشکیل می‌شود که به حالت سه ضلع هم‌نهشت با مثلثی است که باقی‌مانده پس می‌توان این مثلث هم به دو تای دیگر چسباند و چهاروجهی تشکیل می‌شود. اکنون برای هر کدام از گزینه‌ها یک مثال می‌آوریم و نشان می‌دهیم که گزینه‌ی (ه) درست است.



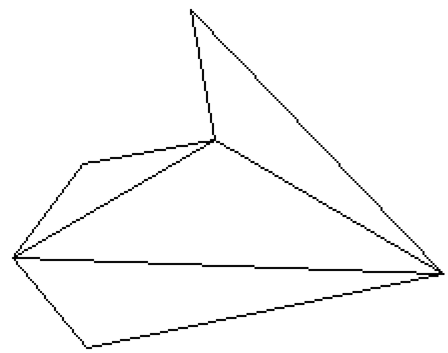
الف)



ب)



ج)



د)

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اولاً حداقل ۹۳ آنتن در این ده داریم، زیرا فرض کنید کم‌تر از ۹۳ آنتن داشته باشیم و a_i تعداد آنتن‌های خانه‌ی iاُم باشد و $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{10}$(این فرض را می‌توان به دلیل تقارن انجام داد.) در این‌صورت $a_1 = a_2 = \cdots = a_8 = 0$ و $a_9, a_{10} \leq 1$ این دُه خانه کم‌تر از ۳ آنتن دارند که با فرض مسئله در تناقض است. با استدلالی شبیه به همین نتیجه می‌شود حداقل ۹۲ کلاغ روی این آنتن‌ها وجود دارد.

۵- گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون با هر بار انجام عمل گفته‌شده در صورت مسأله، اختلاف مجموعِ اعداد یک سطر و یک ستون تغییری نمی‌کند و چون مجموع اعداد هر سطر و هر ستون در ابتدا صفر است بنابراین به هر جدولی که برسیم مجموع

اعداد هر سطر و هر ستون یک عدد است. و تنها جدولی که این خاصیت را در میان پنج گزینه داراست گزینه‌ی (د) است. به صورت زیر با انتخاب خانه‌ها و اضافه کردن اعداد می‌توان به جدول گزینه‌ی (د) رسید.

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰

+۱۰ →

۱۰	۰	۰	۰
۰	۱۰	۰	۰
۰	۰	۰	۱۰
۰	۰	۱۰	۰

+۲ →

۱۰	۰	۲	۰
۰	۱۰	۰	۲
۲	۰	۰	۱۰
۰	۲	۱۰	۰

+۱۷ →

۱۰	۱۷	۲	۰
۱۷	۱۰	۰	۲
۲	۰	۱۷	۱۰
۰	۲	۱۰	۱۷

+۱۳ →

۱۰	۱۷	۲	۱۳
۱۷	۱۰	۱۳	۲
۲	۱۳	۱۷	۱۰
۱۳	۲	۱۰	۱۷

+۱ →

۱۰	۱۷	۲	۱۴
۱۷	۱۰	۱۴	۲
۳	۱۳	۱۷	۱۰
۱۳	۳	۱۰	۱۷

+۷ →

۱۰	۱۷	۲	۲۱
۱۷	۱۷	۱۴	۲
۳	۱۳	۲۴	۱۰
۲۰	۳	۱۰	۱۷

۶- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر نقطه‌ای که بیش‌ترین(کم‌ترین) ارتفاع را دارد یک‌تا باشد، این دو عاشق باید در این نقطه به هم برسند چون در غیر این صورت حتماً یکی از آنها از این نقطه عبور کرده در حالی که نفر دیگر جای دیگری بوده که امکان ندارد! با این استدلال گزینه‌های (ب) و (د) رد می‌شوند. در گزینه‌های (ج) و (ه) هم با توجه به همین استدلال، شیرین و فرهاد باید در پایین ترین ارتفاع به هم برسند اما در این‌صورت شیرین که در نقطه‌ی A است باید از دو نقطه‌ی ماکزیمم ارتفاعیِ کوهستان بگذرد که فرهاد نمی‌تواند بدون عبور از پایین‌ترین ارتفاع به آن بلندی برسد. اما در گزینه‌ی (الف) مشکلی برای وصال وجود ندارد.

۷- گزینه‌ی (ب) صحیح است.

xy را تعداد پیوندهای بین اتم x و اتم y تعریف می‌کنیم. طبق داده‌های مسأله داریم:

$$ab + bc + ca = ۵$$
$$ab + bd + da = ۷$$
$$ac + cd + da = ۳$$
$$bc + cd + bd = ۵$$

و داریم:

$$ab + bc + cd + da + bd + ca =$$
$$\frac{۱}{۲}[(ab + bc + ca) + (ab + bd + da) + (ac + cd + da) + (bc + cd + bd)]$$

و طرف چپ تساوی تعداد پیوندهای مولکول حاصل از اتم‌های a، b، c و d است و طرف راست هم برابر ۱۰ می‌شود.

۸- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

چون بین هردو اتم حداکثر یک پیوند وجود دارد و این مولکول ده اتم دارد، بنابراین حداکثر $\binom{۱۰}{۲} = ۴۵$ پیوند دارد و چون ۴۳ پیوند دارد یعنی دو جفت اتم هستند که پیوندی بینشان نیست که دو حالت داریم که این دو جفت، اتم مشترکی داشته باشند یا نداشته باشند. اگر اتم مشترک داشته باشند فرض کنیم پیوندهای ab و ac وجود نداشته باشند. آن‌گاه تعداد مثلث‌ها برابر است با $\binom{۱۰}{۳} - ۸ - ۸ + ۱ = ۱۰۵$ و در حالت دوم فرض کنیم پیوند های ab و cd وجود نداشته باشند، آنگاه تعداد مثلث ها برابر است با $\binom{۱۰}{۳} - ۸ - ۸ = ۱۰۴$.

۹- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

مسأله را با توجه به تعداد ۲های جدول می‌توان به چند حالت تقسیم کرد: (دقت کنید که بیش‌تر از سه عدد ۲ نمی‌تواند در جدول موجود باشد زیرا در این صورت دو تا از آن‌ها هم‌سطر می‌شوند که باعث می‌شود مجموع اعداد آن سطر بیش‌تر از ۲ شود.)

الف) اصلاً ۲ در جدول نباشد: در این‌صورت باید در هر سطر و هر ستون دوتا ۱ داشته باشیم که برای قراردادن دو ۱ در سطر اول ۳ حالت داریم و برای قرار دادن دو یک در سطر دوم ۲ حالت داریم زیرا دو ۱ سطر دوم نمی‌توانند دقیقاً زیر دو ۱ سطر اول قرار بگیرند(چرا؟) و برای قرار دادن یک های سطر سوم هم ۱ راه باقی می‌ماند، پس !۳ راه برای پر کردن جدول در این حالت داریم.

ب)یک ۲ در جدول داشته باشیم: در این‌صورت خانه‌هایی که در سطر و ستون عدد ۲ قرار دارند باید صفر باشند و بقیه‌ی خانه‌های جدول باید ۱ باشند. پس در این حالت تنها باید مکان عدد ۲ را در جدول مشخص کنیم که ۹ انتخاب برای این حالت وجود دارد.

ج)دو عدد ۲ در جدول باشد: در این‌صورت هم باید خانه‌هایی که در سطر یا ستون این دو عدد ۲ قرار دارند باید صفر باشند و چون این دو ۲ هم سطر یا هم ستون نیستند تنها یک خانه در جدول باقی می‌ماند که مقدارش تعیین نشده که آن خانه هم باید ۲ باشد. پس امکان ندارد که جدول تنها دو عدد دو داشته باشد.

د) سه عدد دو داشته باشیم: این سه عدد دو نمی‌توانند هم‌سطر یا هم‌ستون باشند، و لذا کافی است مکان آن‌ها را طوری تعیین کنیم که از هر سطر و ستون یک خانه انتخاب کرده باشیم که ۶=!۳ راه برای این کار داریم.

بنابراین جواب برابر است با $۲۱ = ۶ + ۹ + ۶$.

۱۰-گزینه‌ی (ج) صحیح است.

داریم:

$$۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ = ۳۲ + (x_۴ - x_۲)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} A &= (۳۲ + (x_۴ - x_۲))(۳۲ - (x_۳ - x_۱))(۳۲ - (x_۴ - x_۲))(۳۲ + (x_۳ - x_۱)) \\ &= (۳۲^۲ - (x_۴ - x_۲)^۲)(۳۲^۲ - (x_۳ - x_۱)^۲) \end{aligned}$$

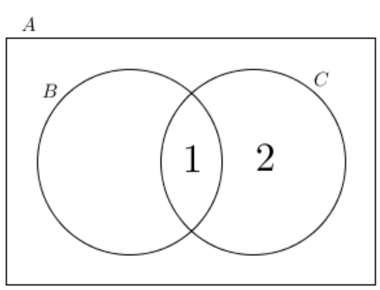
پس بیش‌ترین مقدار A برابر $۳۲^۴$ است و حالت تساوی زمانی است که $x_۱ = x_۳$ و $x_۲ = x_۴$. بنابراین تعداد حالات تساوی برابر ۹ است:

$$(x_1, x_2) = (i, 8 - i), 0 \leq i \leq 8, i \in \mathbb{Z}$$

۱۱- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در زمین گزینه‌ی (ج) از هر طرف چهار طرف تعداد فردی خانه با خانه‌ی شکلاتی(!) فاصله داریم. حال بازیکن دوم به این صورت عمل می‌کند که در هر مرحله، بازیکن اول از هر یک از چهار طرف که خانه‌ای برداشت او هم از همان طرف یک خانه را بر می‌دارد در این‌صورت همواره در نوبت بازیکن اول تعداد فردی خانه، فاصله تا خانه شکلاتی وجود دارد و او هرگز به این خانه نمی‌رسد و بدیهی است که پس از تعدادی مرحله بازیکن دوم به شکلات می‌رسد. در زمین‌های بازی گزینه‌های دیگر از یک طرف تعداد زوجی خانه تا خانه‌ی شکلاتی فاصله داریم و از سه طرف دیگر تعداد فردی خانه. در این زمین‌ها استراتژی برد نفر اول به این شکل است که او ابتدا از طرفی که تعداد زوجی فاصله داریم یک خانه بر می‌دارد و اکنون نوبت نفر دوم است که بازی کند و زمینی داریم که از هر طرف تعداد فردی فاصله تا خانه شکلاتی داریم و مطابق آن‌چه گفتیم در چنین زمینی کسی که حرکت دوم را انجام دهد استراتژی برد دارد که همان نفراول خودمان است. پس در این زمین‌ها نفر اول استراتژی برد دارد.

۱۲- گزینه‌ی (ب) صحیح است.



فرض می‌کنیم B شاملِ kعضو باشد در این‌صورت مجموعه‌ی C دارای دو قسمت است: (۱) اعضایی که در B هم هستند و (۲) اعضایی که در Bنیستند.

کافی است قسمت ۱ تعداد فردی عضو داشته باشد و قسمت ۲ محدودیت ندارد برای قسمت ۲ ، 2^{10-k} حالت داریم. چون $10-k$ عضو A هستند که در Bنیستند و یک مجموعه‌ی $10-k$ عضوی 2^{10-k} زیرمجموعه دارد. هم‌چنین برای این که تعداد حالت های قسمت یک را بیابیم باید تعداد زیر مجموعه‌های فرد عضوی یک مجموعه‌ی k عضوی را بیابیم که برابر 2^{k-1} است.پس در کل $2^{10-k} \times 2^{k-1} = 2^9$ حالت داریم.

۱۳- گزینه‌ی (ه) صحیح است.

برای رد گزینه‌ی (ه) داریم: چون از هر سه عدد متوالی باید یکی عضو A باشد، پس از بین ۱، ۲ و ۳ یکی باید در A باشد که ۱ نمی‌تواند باشد و اگر ۲ عضو A باشد در این‌صورت دو عدد فرد یا دو عدد زوج نمی‌توانند در A باشند چون مجموعشان بر ۲ بخش‌پذیر است، پس A نمی‌تواند نامتناهی شود. بنابراین ۳ عضو Aاست پس عضو به شکل $3k$ در A حداکثر یکی داریم و نمی‌توانیم در A هم عدد به شکل $3k+1$ هم به شکل $3k+2$ داشته باشیم چون مجموعشان بر ۳ بخش‌پذیر است و چون از بین $3k$، $3k+1$ و $3k+2$ باید یکی در A باشد پس می‌توانیم بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم از جایی به بعد همه‌ی $3k+1$ ها عضو Aهستند که در این صورت داریم $(3(k-1)+1)+(3(k+1)+1)=2(3k+1)$ پس عبارت گزینه‌ی (ه) نادرست است.

۱۴-گزینه‌ی (د) صحیح است.

اولین چیزی که به دست می‌آید این است که باید در هر سطر و هر ستون، دو یک و دو صفر داشته باشیم. برای حل، مسأله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم: (۱) دو سطر در جدول باشند که مکان ۱ و ۰ هایشان دقیقاً مشابه باشد. (۲) دو سطر دقیقاً مشابه نداشته باشیم.

حالت ۱. در این حالت با نگاه به جدول درمی‌یابیم که دو جفت سطرِ دقیقاً مشابه داریم،که با تعیین یک جفت، دیگری به طور یک‌تا تعیین می‌شود. $\binom{4}{2}=6$ راه برای قرار دادن ۱ها در یک سطر داریم و $\binom{4}{2}=6$ راه برای انتخاب دو سطر از جدول که دو سطر مشابه را در آنها قرار دهیم. یعنی در کل $6\times 6=36$ حالت داریم که هر حالت را دوبار شمرده‌ایم(به ازای هر کدام از ۲ جفت سطرهای مشابه، یک‌بار شمارش انجام داده‌ایم). پس تعداد حالت‌های مورد قبول در این قسمت $\frac{36}{2}=18$است.

حالت ۲. در این حالت $\binom{4}{2}=6$ روش برای انتخاب ۱های سطر اول وجود دارد و به ازای هر سطر همواره سطر دیگری در جدول هست که مکان ۱های هر کدام دقیقاً بر مکان ۰ های سطر دیگر منطبق باشد، زیرا در هر ستون از این جدول که در سطر مورد نظر صفر داریم، باید دو یک موجود باشد و چون تنها سه سطر دیگر داریم

سطری هست که در هر دو ستون در آن‌خانه یک قرار دارد و تبع آن در دو خانه‌ی دیگر آن سطر صفر داریم، پس این سطر شرط ادعا شده را برآورده می‌کند. این چنین دو سطری را مزدوج می‌نامیم. بنابراین ۳ حالت هم برای انتخاب سطر مزدوج سطر اول در جدول داریم و چهار حالت داریم که ۱های دو سطر دیگر جدول را (که آن دو هم قطعاً مزدوج هستند) طوری تعیین کنیم که سطرهای دقیقاً مشابه در جدول به وجود نیاید. پس در کل در این حالت $۶ \times ۳ \times ۴ = ۷۲$ روش داریم.

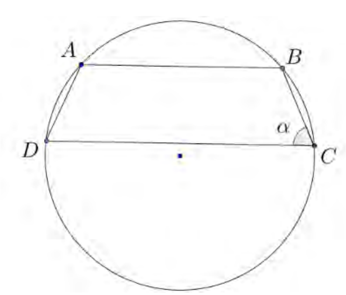
و در نهایت تعداد کل حالت‌ها برابر $۹۰ = ۱۸ + ۷۲$ است.

۱۵- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

مماس مشترک دو دایره که از نقطه‌ی C می‌گذرد را رسم می‌کنیم. در این‌صورت زاویه‌ی $\angle ADC$ به دو قسمت تبدیل می‌شود، که یک قسمت زاویه‌ی ظلی کمان $\overset{\frown}{AC}$ است و قسمت دیگر زاویه‌ی ظلی کمان $\overset{\frown}{PC}$ است و اندازه‌ی این دو کمان را هم که داریم. پس $\angle ACP$ برابر است با $۵۰^\circ = ۲۰^\circ + ۳۰^\circ$ و چون $\angle BAC$ زاویه‌ی خارجی مثلث APC است داریم:

$$\angle BAC = \angle ACP + \angle APC = ۵۰^\circ + ۳۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۱۶- گزینه‌ی (ه) صحیح است.



راه‌حل اول. این راه‌حل با استفاده از قضیه‌ی بطلمیوس است، که طبق این قضیه در هر چهار ضلعی محاطی $ABCD$ داریم:

$$BD \times AC = AD \times BC + AB \times CD$$

و چون در این چهارضلعی محاطی $BC = AD$، پس $BD = AC$ و بنابراین داریم:

$$BD^۲ = ۲ \times ۲ + ۳ \times ۴ = ۱۶ \Rightarrow BD = ۴$$

راه‌حل دوم. استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها است. چون $ABCD$ محاطی است داریم $\angle DAC = ۱۸۰^{\circ} - \angle DBC$. پس کسینوس این دو زاویه قرینه‌ی یک‌دیگر است. اکنون با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها:

$$DA^{۲} + AB^{۲} - ۲\cos\alpha.DA.AB = BC^{۲} + CD^{۲} + ۲\cos\alpha.BC.CD = BD^{۲}$$
$$\Rightarrow ۱۳ - ۱۲\cos\alpha = ۲۰ + ۱۶\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-۱}{۴}$$

که با جای‌گذاری دوباره همان جواب $BD = ۴$ به دست می آید.

۱۷-گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اگر $m = p_{۱}^{\alpha_{۱}} p_{۲}^{\alpha_{۲}} \cdots p_{n}^{\alpha_{n}}$ تجزیه‌ی عدد m به عوامل اول باشد، در این‌صورت هر عدد به فرم $p_{i_{۱}}^{\alpha_{i_{۱}}} p_{i_{۲}}^{\alpha_{i_{۲}}} \cdots p_{i_{k}}^{\alpha_{i_{k}}}$ یک مقسوم‌علیه خوب m است.(یعنی تعدادی از عوامل اول m را با حفظ توانشان انتخاب کنیم.) پس $f(m) = (۱ + p_{۱}^{\alpha_{۱}})(۱ + p_{۲}^{\alpha_{۲}})\cdots(۱ + p_{n}^{\alpha_{n}})$. می‌دانیم که اگر $p \neq ۲$، $۲ \big| p^{\alpha} + ۱$ پس اگر m بیش از دو عامل اول داشته باشد در این‌صورت $f(m)$ مضرب چهار خواهد شد. پس تنها گزینه‌ی (ج) می‌تواند درست باشد.

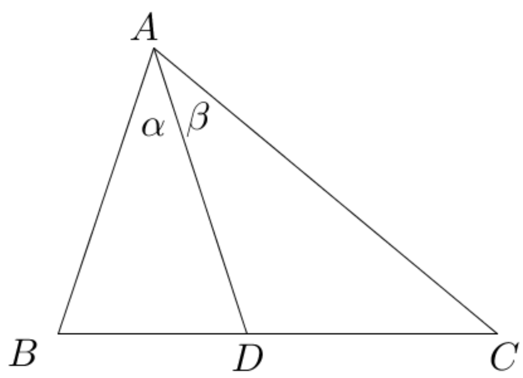
حال به رد گزینه‌های دیگر هم می‌پردازیم:

گزینه‌ی (الف) و (د). با توجه به توضیحات بالا هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد ولی اگر عددی بر ۳۰ بخش‌پذیر باشد، حداقل سه عامل اول دارد.

گزینه‌ی (ب). هر عدد به شکل $۴k + ۳$ مقسوم‌علیهی به همین شکل دارد که توانش در تجزیه‌ی آن عدد فرد است. (اگر چنین عددی موجود نباشد قسمت مربوط به هر عدد اول در تقسیم بر ۴ دارای باقی‌مانده‌ی ۱ می‌شود و لذا کل عدد در تقسیم بر ۴ دارای باقی‌مانده‌ی ۱ است.) فرض کنید این عدد اول p و توانش در تجزیه $۲s + ۱$ باشد. در این صورت $۱ + p^{۲s+۱} \equiv ۱ + (-۱)^{۲s+۱} \equiv ۰$ (به پیمانه‌ی ۴) پس $f(m)$ بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود.

۱۸- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

می‌دانیم که در هر مثلث ABC با قاطع AD داریم:



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB.\sin(\angle BAD)}{AC.\sin(\angle CAD)}$$

بنابراین در شکل مسأله داریم:

$$۱ = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \times \frac{AB}{AC} \overset{\alpha=۲\beta}{\Rightarrow} ۲\cos\beta = \sqrt{۳} \Rightarrow \beta = ۳۰^{\circ} \Rightarrow \angle A = ۹۰^{\circ}$$

و در نتیجه از قضیه‌ی فیثاغورس بدست می آید که $BC = \sqrt{۳+۱} = ۲$.

۱۹- گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در طول راه‌حل از نماد a برای طول ضلع BC، از b برای طول ضلع AC و از c برای طول ضلع AB استفاده شده است. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

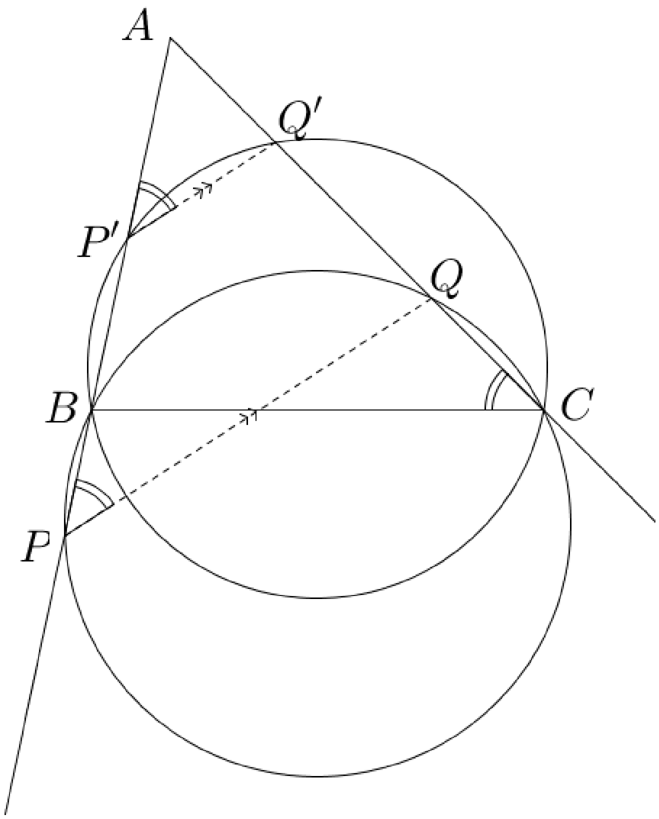
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos A = (a+b)^۲ - ۲(۱+\cos(۱۲۰^{\circ}))ab = ۱۰۰ - ab$$

$$۰ \leq ab \leq (\frac{a+b}{۲})^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow ۷۵ \leq c^۲ \leq ۱۰۰ \Rightarrow ۵\sqrt{۳} \leq c \leq ۱۰$$

می‌توان a و b را به گونه‌ای انتخاب کرد که با توجه به بالا c هر عدد بین $۵\sqrt{۳}$ و ۱۰ را به عنوان مقدار بگیرد.

۲۰-گزینه‌ی (ب) صحیح است.



ابتدا با توجه به محاطی بودن چهارضلعی $BQCP$ متوجه می‌شویم $\angle P = \angle C$ و در نتیجه از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که تمام خطوط PQ موازی هم هستند(در شکل PQ موازی $P'Q'$ است) پس اگر میانه مثلث APQ را در نظر بگیریم همواره یک راستای ثابت دارد در نتیجه این مکان هندسی خطی است که از A می‌گذرد. اثبات این‌که به ازای هر نقطه‌ای روی این خط هم یک دایره وجود دارد، در اینجا نیاز نیست اما در امتحانات تشریحی باید این قسمت را هم در نظر داشته باشید.

۲۱- گزینه‌ی (ه) صحیح است.

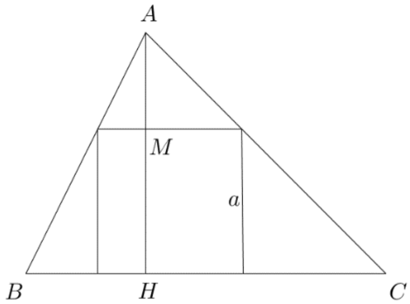
معادله را به صورت $x^۲ - z^۲ = ۱۳۸۱ - y^۵$ بازنویسی می‌کنیم و در نتیجه:

$$(x-z)(x+z) = ۱۳۸۱ - y^۵.$$

اکنون اگر $۱۳۸۱ - y^۵ = pq$ در این‌صورت $x = \frac{p+q}{۲}$ و $z = \frac{p-q}{۲}$یک جواب این معادله است. کافی است برای صحیح بودن x و z اعداد p و qدارای زوجیت یک‌سان باشند. پس کافی است y را یک عدد زوج در نظر بگیریم که $۱۳۸۱ - y^۵$ یک عدد فرد شود و یک عدد فرد را همواره می توان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد فرد(عدد ۱ هم مجاز است) نوشت.

۲۲- گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر یکی از اضلاع مربع بر یکی اضلاع مثلث واقع شده باشد(مانند شکل)
داریم:

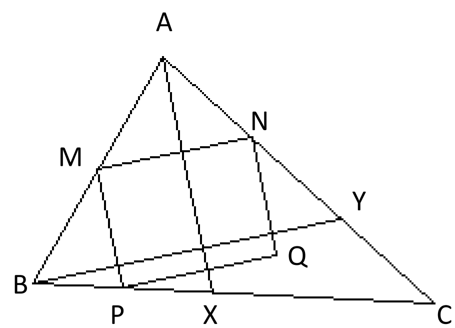


(AH ارتفاع است و a طول ضلع مربع است.)

$$\frac{AM}{a}=\frac{AH}{BC}\Rightarrow\frac{AH-a}{a}=\frac{AH}{BC}\Rightarrow\frac{AH}{a}=\frac{AH+BC}{BC}$$
$$\Rightarrow a=\frac{AH.BC}{AH+BC}\leq\frac{AH.BC}{۲\sqrt{AH.BC}}=\frac{\sqrt{AH.BC}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a^{۲}\leq\frac{۱}{۲}$$

توجه کنید که این استدلال ناقص است اما برای بدست آوردن یک عدد مناسب است. اما استدلال زیر کامل است.

شکل زیر را در نظر بگیرید.



$MNPQ$ مربع است و $AX \parallel MP, BY \parallel MN$ در نتیجه $AX \perp BY$ و همچنین :

$$AX.BY=۲S_{ABXY}\leq ۲S_{ABC}=۲$$
$$S_{MNPQ}=MP.MN=(\frac{AM}{AB}.BY).(\frac{BM}{AB}.AX)$$
$$=\frac{AM.BM}{AB^{۲}}.AX.BY\leq ۲.\frac{AM.BM}{AB^{۲}}\leq ۲.\frac{(AM+BM)^{۲}}{۴AB^{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

با این استدلال هم چنین ثابت کردیم مساحت بزرگ‌ترین مستطیل در این مثلث هم $\frac{۱}{۲}$ است.

23- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ابتدا به این نکته توجه می کنیم که

$$k(n-k+1) \geq n \Rightarrow n! = (n\times 1)((n-1)\times 2)\cdots \geq n^{\frac{n}{2}}$$

و هم‌چنین $n! < n^n$. بنابراین داریم:

$$(10^n)! \leq 10^{n10^n} < 16^{n10^n} = 2^{4n10^n}, 2^{n!} \geq 2^{n^{\frac{n}{2}}}$$

بنابراین برای اینکه ثابت کنیم که $f_1 \ll f_2$ کافی است نشان دهیم که $2^{4n10^n} \ll 2^{n^{\frac{n}{2}}}$. حال داریم:

$$2^{4n10^n} \ll 2^{n^{\frac{n}{2}}} \Leftrightarrow 4n10^n \ll n^{\frac{n}{2}}$$

که این هم درست است.(چرا؟)

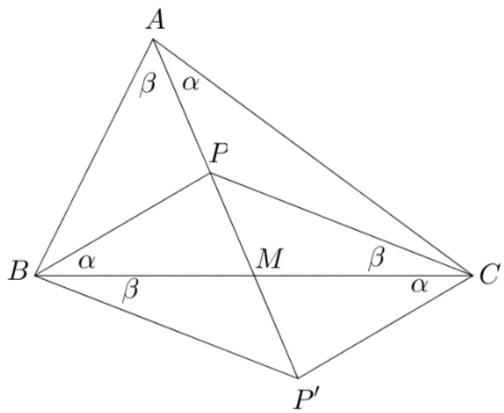
و برای اینکه نشان دهیم $f_2 \ll f_3$ داریم: $\sqrt[n]{(n!)!} \geq (n!)^{\frac{n!}{2n}}$ پس کافی است نشان دهیم $(n!)^{\frac{n!}{2n}} \gg 2^{n!}$:

$$(n!)^{\frac{n!}{2n}} \gg 2^{n!} \Leftrightarrow n! \gg 4^n$$

که این هم درست است.(چرا؟)

۲۴- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

راه‌حل اول: PM را به اندازه‌ی خودش از طرف M ادامه می‌دهیم تا به نقطه‌ی P' برسیم. در این‌صورت $PCP'B$ متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه که این نتیجه می‌دهد که $\Delta P'MB \sim \Delta P'BA$ (زوایای متناظرِ در تشابه از ترتیب در نام مثلث‌ها مشخص است.) و لذا $P'M.P'A = P'B^2$ و به همین ترتیب داریم



$P'M.P'A = P'C^۲$ که از دو قسمت آخر نتیجه می شود $P'C = P'B$ و در نتیجه $\beta = \alpha$. پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و $\beta = \alpha = ۴۰^\circ$. پس:

$$\angle CPA = \frac{۱}{۲}(۳۶۰^\circ - \angle CPB) = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۳۰^\circ$$

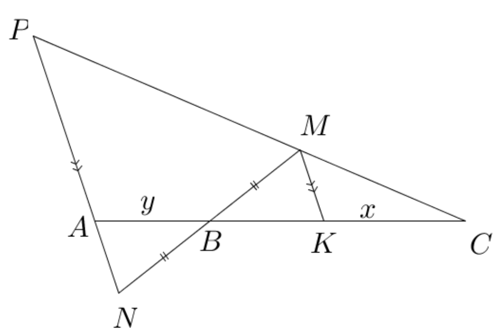
راه دوم:

$$PBC \text{ قضیه سینوس‌ها در مثلث} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{PC} = \frac{\sin\beta}{PB}$$

$$PAC \text{ و } PAB \text{ قضیه سینوس ها در دو مثلث} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{PC} = \frac{\sin\angle PCA}{AP}, \frac{\sin\beta}{PB} = \frac{\sin\angle PBA}{AP}$$

پس $\sin\angle PCA = \sin\angle PBA$(این تساوی با یک بار استفاده از سوای سینوسی برای سه خط هم‌رس در نقطه‌ی P به سادگی به دست می‌آید.) و چون این دو زاویه مکمل نیستند پس با هم برابرند و اگر مقدارشان را x بنامیم داریم: $۲x + ۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$ و در نتیجه $x + \alpha + \beta = ۹۰^\circ$ که یعنی AM بر BC عمود است و چون AM میانه هم هست پس ABC متساوی‌الساقین است و ادامه‌ی راه‌حل مشابه است.

۲۵- گزینه‌ی (د) درست است.



مطابق شکل بالا، پاره‌خط MK را به موازات AN رسم می‌کنیم. در این صورت چون $NB = BM$ خواهیم داشت $AN = MK$ و $BK = AB$. اکنون اگر مقدار CK و AB را به ترتیب x و y بنامیم داریم:

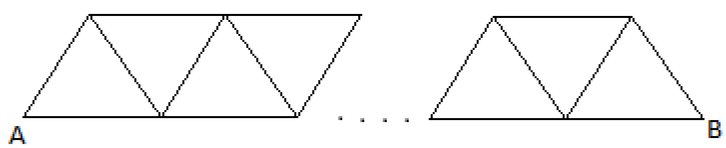
$$\frac{S_{MBC}}{S_{PAC}} = \frac{CM}{CP}.\frac{CB}{CA} = \frac{CK}{CA}.\frac{CB}{CA} = \frac{y}{y+۲x}.\frac{y+x}{y+۲x} = \frac{۴}{۴۹}$$

$$\overset{\frac{x}{y}=a}{\Rightarrow} ۴(۲a+۱)^{۲} = ۴۹(a+۱) \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow \frac{x}{y} = ۳ \Rightarrow \frac{x}{۲x+y} = \frac{a}{۲a+۱} = \frac{۳}{۷}$$

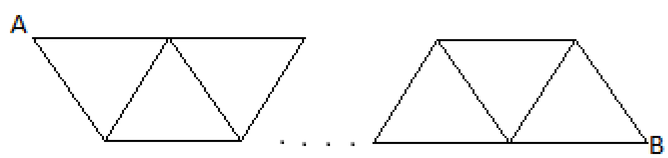
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۷}$$

۲۶-گزینه‌ی (الف) صحیح است.

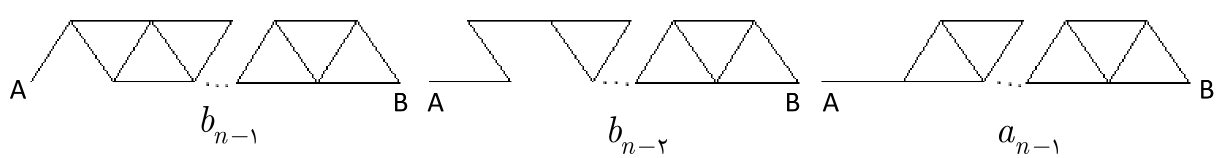
از دنباله‌های بازگشتی استفاده می‌کنیم. اگر a_n برابر تعداد راه‌های رسیدن از A به B در شکل زیر باشد:(تعداد مثلث‌های پایینی n است)



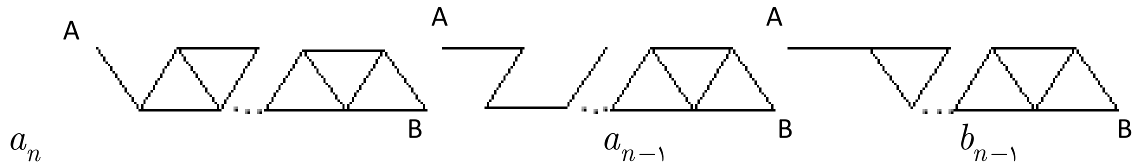
و b_n تعداد راه‌های رسیدن از A به B در شکل زیر باشد:(تعداد مثلث‌های پایینی n است.)



اکنون با توجه به شکل زیر داریم:



پس این رابطه بدست می آید: $a_n = a_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-1}$



پس بدست می آید: $b_n = a_n + a_{n-1} + b_{n-1}$

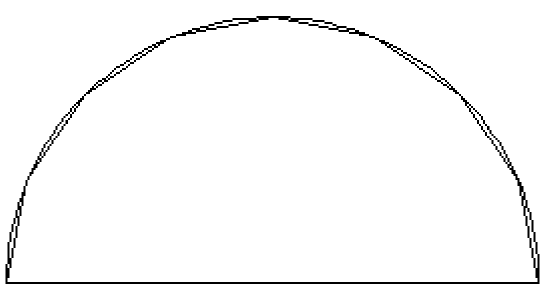
قصد ما بدست آوردن a_4 است بنابراین نیازی به حل کلی دنباله‌ی بازگشتی نداریم.

n	0	1	2	3	4
a_n	1	2	7	24	81
b_n	1	4	13	44	لازم نداریم

پس پاسخ مسئله برابر ۸۱ است.

۲۷- گزینه‌ی (د) صحیح است.

مثال زیر را در نظر بگیرید:



می‌بینیم که اگر پرتو طوری در یکی از دایره‌های عظیمه طوری در یک نیم‌دایره بتابد که نیمی از یک $2n$ضلعی محدب را بسازد، آن‌گاه مسیر این جهت تابش متناوب است زیرا با حرکت به روی اضلاع $2n$ضلعی و رسیدن به لبه، باز روی همان مسیر باز می‌گردد. اکنون به ازای nهای متفاوت جهت‌های تابش متفاوتی بدست می‌آوریم و در نتیجه به ازای بی‌نهایت جهت تابش مسیر پرتو متناوب است. دقت کنید که می‌توان حرکت پرتو در نیم کره با حرکت یک پرتو دیگر درون یک کره متناظر کرد. به این صورت که هر گاه پرتو به صفحه‌ی قطر نیم‌کره برخورد کرد، به جای قرینه کردن پرتو، آن را مستقیم ادامه دهیم و در حقیقت نیم‌کره را قرینه کنیم.(بازگشت پرتو هنگامی که به گوشه‌ی نیم‌کره می‌خورد متناظر با بازتاب آن در کره می‌شود.)

28- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

نشان می دهیم ۳ فیل نمی‌تواند باقی بماند. فرض کنید فیل‌ها را a، b و c بنامیم که ترتیب خرطوم آن‌ها به شکل $a < b < c$ باشد. اکنون در ترتیبِ بلندی دم‌ها، b با یکی از فیل‌ها مجاور است(مثلاً در ترتیب $a < c < b$ ، b با c مجاور است.) که اگر b با این فیل را در نظر بگیریم این دو فیل هم‌شکل اند. اما نشان می‌دهیم که چهار یا پنج فیل امکان دارد باقی بمانند. فرض کنید فیل ها را با اعداد ۱ تا n نمایش دهیم و طول خرطوم‌ها $k_1, k_2, \ldots, k_n$ و طول دم‌هایشان $g_1, g_2, \ldots, g_n$ باشند. می‌توانیم فرض کنیم $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ و اکنون اگر دو فیل با شماره‌ی i و j $(i < j)$ هم‌شکل باشند در این‌صورت در ترتیب دم‌ها باید $i+1, \ldots, j-1$ بین دو فیل i و j باشند و بقیه فیل‌ها نباید بین آن دو باشند. پس باید تعداد فیل‌هایی که بین i و j قرار دارد در هر دو ترتیب یک‌سان باشد تا این دو فیل هم‌شکل باشند. این نکته راهی برای ساختن ترتیب‌هایی که هیچ دو فیلی هم شکل نباشند به ما نشان می‌دهد. برای $n = ۴,۵$ داریم:

$$k_1 < k_2 < k_3 < k_4, g_2 < g_4 < g_1 < g_3$$
$$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5, g_1 < g_4 < g_2 < g_5 < g_3$$

پس گزینه‌ی (ج) درست است.

۲۹- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ابتدا توجه می‌کنیم که گزینه‌های (ب) و (د) غلط هستند زیرا اگر $a < ۱$ در این‌صورت برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$p(x) > x \Rightarrow p(p(x)) > p(x) > x$$

پس اگر $a < ۱$ آن‌گاه معادله جواب ندارد. به ازای $a = \frac{1}{4}$، $x = \frac{1}{2}$ جواب است پس گزینه‌ی (د) هم غلط است. گزینه (ه) هم با توجه به غلط بودن (ب)، غلط است. تنها دو گزینه‌ی (الف) و (ج) باقی می‌ماند. داریم:

$$(x^2 - a)^2 - a - x = (x^2 - x - a)(x^2 + x + 1 - a)$$

که $x^۲ - x - a$ همواره دارای دو ریشه است و $x^۲ + x + ۱ - a$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است اگر و تنها اگر $a < \frac{-۳}{۴}$.گزینه‌ی (ج) هم با توجه به تجزیه، اشتباه است.

۳۰- گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون به دنبال $t \in [۰,۱]$ می‌گردیم پس می‌توانیم فرض کنیم که $x_۰ = \cos\theta$ و در نتیجه با استقرا ثابت می‌شود که $x_n = \cos(۲^n\theta)$. پایه‌ی استقرا که صحیح است و برای n اگر فرض استقرا درست باشد برای $n + ۱$ داریم:

$$x_{n+۱} = ۲x_n^۲ - ۱ = ۲\cos^۲(۲^n\theta) - ۱ = \cos(۲ \times ۲^n\theta) = \cos(۲^{n+۱}\theta)$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\cos(۲^{۱۱}\theta) = ۱$ و لذا $۲^{۱۱}\theta = ۲k\pi$. پس $\theta = \frac{۲k\pi}{۲^{۱۱}} = \frac{k\pi}{۱۰۲۴}$ و به ازای $۰ \leq i \leq ۱۰۲۴$، θهایی بدست می آوریم که کسینوس‌های متفاوتی دارند و در نتیجه tهای متمایزی به دست می‌آید. پس بیش از ۱۰۰۰ جواب برای مسئله یافت می‌شود و گزینه‌ی (د) صحیح است.