به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم نوزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۰

---

۱. فرض کنید x عدد صحیحی باشد که $x^۲ = np + ۱$. پس $p|x^۲ - ۱$ و در نتیجه $p|(x-۱)(x+۱)$. با توجه به این که p یک عدد اول است، $p|x-۱$ و یا $p|x+۱$. بنابراین عدد طبیعی k یافت می‌شود که $x = kp + ۱$ و یا $x = kp - ۱$. از این‌جا مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

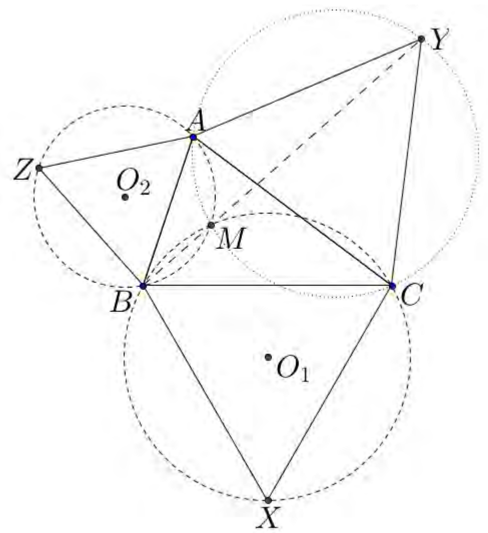
$$\begin{aligned} x = kp + ۱ \quad &\Rightarrow \quad ۱ + np = (kp+۱)^۲ = k^۲p^۲ + ۲kp + ۱ \\ &\Rightarrow \quad n = k^۲p + ۲k \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = pk^۲ + ۲k + ۱ = (p-۱)k^۲ + (k+۱)^۲ \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = \underbrace{k^۲ + \cdots + k^۲}_{p-۱} + (k+۱)^۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = kp - ۱ \quad &\Rightarrow \quad ۱ + np = (kp-۱)^۲ = k^۲p^۲ - ۲kp + ۱ \\ &\Rightarrow \quad n = k^۲p - ۲k \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = pk^۲ - ۲k + ۱ = (p-۱)k^۲ + (k-۱)^۲ \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = \underbrace{k^۲ + \cdots + k^۲}_{p-۱} + (k-۱)^۲ \end{aligned}$$

پس در هر صورت $np + ۱$ مجموع p مربع کامل است.

۲. ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم. اگر بر روی اضلاع مثلث حاده‌الزاویه ABC و در خارج از آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع BCX، CAY و ABZ را بنا کنیم و $O_۱$ و $O_۲$ به ترتیب مرکز دایره‌های محیطی مثلث‌های BCX و ABZ باشند، در این صورت $BY \perp O_۱O_۲$.

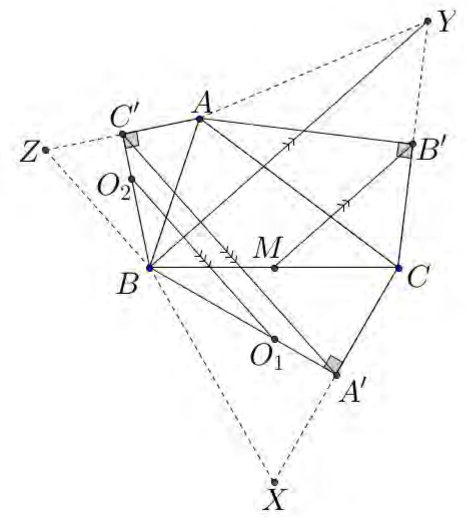


اثبات. فرض کنید M نقطه‌ی برخورد این دو دایره غیر از B باشد. در این صورت روشن است که $\angle BMC = \angle AMB = ۱۲۰^\circ$ و در نتیجه $\angle CMA = ۱۲۰^\circ$. حال با توجه به این‌که $\angle AYC = ۶۰^\circ$، چهارضلعی $AMCY$ محاطی است. پس:

$$\angle AMY = \angle ACY = ۶۰^\circ \Rightarrow \angle AMB + \angle AMY = ۱۲۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین نقطه‌های B، M و Y هم‌خط هستند. از طرفی BM وتر مشترک دو دایره به مرکز $O_۱$ و $O_۲$ است و بنابراین بر خط‌المرکزین دو دایره یعنی $O_۱O_۲$ عمود است. در نتیجه $BY \perp O_۱O_۲$. □

حال با در نظر داشتن لم فوق به حل مسئله می‌پردازیم.
مثلث‌های ساخته‌شده روی اضلاع مثلث ABC را طبق شکل زیر کامل می‌کنیم تا به مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع تبدیل شوند. در این صورت به وضوح نقطه‌های A'، B' و C' وسط‌های سه ضلع از ضلع‌های این مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند.



حال دقت کنید که اگر $O_۱$ مرکز دایره‌ی محیطی BCX و $O_۲$ مرکز دایره‌ی محیطی ABZ باشد، $O_۱$ روی BA' و $O_۲$ روی BC' واقع است و به علاوه:

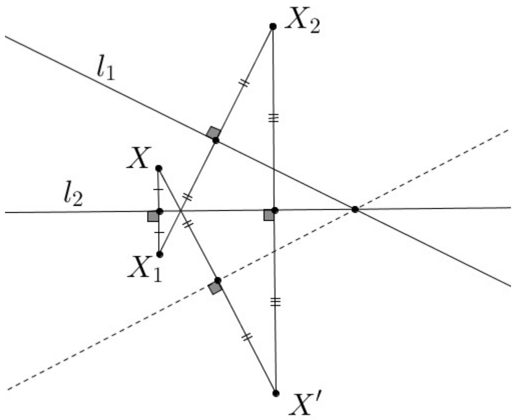
$$\frac{BO_۱}{O_۱A'} = \frac{BO_۲}{O_۲C'} = ۲$$

بنابراین طبق قضیه‌ی تالس $O_۱O_۲ \parallel A'C'$.
هم‌چنین از آن‌جایی که M وسط ضلع BC است و B' وسط YC، $MB' \parallel BY$. اما طبق لم می‌دانیم که $O_۱O_۲ \perp BY$، بنابراین $A'C' \perp MB'$.

۳. ابتدا به بیان و اثبات چند لم می‌پردازیم:
لم. اگر $l_۱$ و $l_۲$ دو محور تقارن از شکلی باشند، آن‌گاه قرینه‌ی $l_۱$ نسبت به $l_۲$ نیز محور تقارنی از شکل خواهد بود.

اثبات. چون $l_۲$ محور تقارن است، قرینه‌ی X نسبت به $l_۲$ که آن را با $X_۱$ نمایش می‌دهیم هم متعلق به شکل است و چون $l_۱$ محور تقارن است، قرینه‌ی $X_۱$ نسبت به $l_۱$ که آن را با $X_۲$ نمایش می‌دهیم

هم متعلق به شکل است. در نهایت چون $l_۲$ محور تقارن است، قرینه‌ی $X_۲$ نسبت به $l_۲$ که از X' برای نمایشش استفاده می‌کنیم هم نیز متعلق به شکل است. اما به سادگی می‌توان دید که X' قرینه‌ی X نسبت به خطی است که از قرینه کردن $l_۱$ نسبت به $l_۲$ به دست آمده است. پس در کل برای هر نقطه‌ی X در شکل، قرینه‌ی X نسبت به این خط هم در شکل قرار دارد و بنابراین این خط هم محور تقارنی از شکل است.



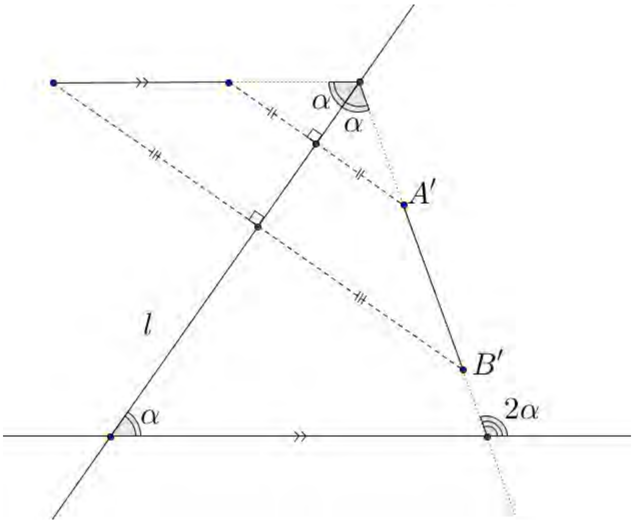
□

لم. هر مجموعه از اشکال که در ناحیه‌ای کران‌دار از صفحه(یعنی ناحیه‌ای که بتوان برای آن دایره‌ای با شعاع هر چند بزرگ یافت که به تمامی درون آن دایره قرار بگیرد.) باشد، نمی‌تواند دو محور تقارن موازی داشته باشد.

اثبات. فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو محور تقارن موازی برای مجموعه باشند. طبق لم ۱ قرینه‌ی $l_۱$ نسبت به $l_۲$ که آن را $l_۳$ می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب قرینه‌ی $l_۲$ نسبت به $l_۳$ که آن را $l_۴$ می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب نامتناهی خط موازی باید محور تقارن شکل باشند. اما به وضوح از جایی به بعد مجموعه‌ی ما در یک طرف این خطوط واقع خواهد شد و لذا این خط‌ها از جایی به بعد امکان ندارد که محور تقارن ما باشند. بنابراین چنین مجموعه‌ای دو محور تقارن موازی نمی‌تواند داشته باشد. □

لم. محور تقارن تعدادی مربع با اضلاع عمودی و افقی، خطی است افقی، عمودی و یا با زاویه‌ی ۴۵ درجه یا ۱۳۵ درجه نسبت به محور افقی.

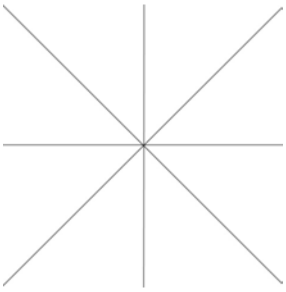
اثبات. فرض کنید خط l محور تقارنی از این شکل باشد و با قسمت مثبت محور x زاویه‌ی α بسازد. در این صورت اگر $A'B'$ قرینه‌ی یکی از اضلاع افقی یکی از مربع‌ها نسبت به l باشد، می‌توان به سادگی دید که باید با محور x زاویه‌ی ۲α بسازد. اما چون ضلع مربع‌ها عمودی و یا افقی است، $A'B'$ هم باید عمودی و یا افقی باشد. پس $۲\alpha \in \{۰, ۹۰^\circ, ۱۸۰^\circ, ۲۷۰^\circ\}$ و در نتیجه $\alpha \in \{۰, ۴۵^\circ, ۹۰^\circ, ۱۳۵^\circ\}$.



□

حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.

طبق لم‌های دوم و سوم، سه محور تقارن ما باید دارای سه زاویه‌ی مختلف از چهار زاویه‌ی معرفی شده در بالا باشند. حال با یک بررسی ساده می‌توان دید که در هر کدام از این حالت‌ها می‌توان دو خط یافت که زاویه‌ی آن‌های نسبت به هم برابر ۴۵ درجه باشد. حال از لم اول استفاده کنید، با قرینه کردن این دو محور نسبت به هم‌دیگر شکل ما چهار محور تقارن هم‌رس به صورت زیر پیدا می‌کند.



بنابراین مجموعه‌ی مطرح‌شده در صورت سؤال حتماً ۴ محور تقارن به این صورت دارد. حال وضعیت مربع‌ها را نسبت به این چهار محور بررسی می‌کنیم.

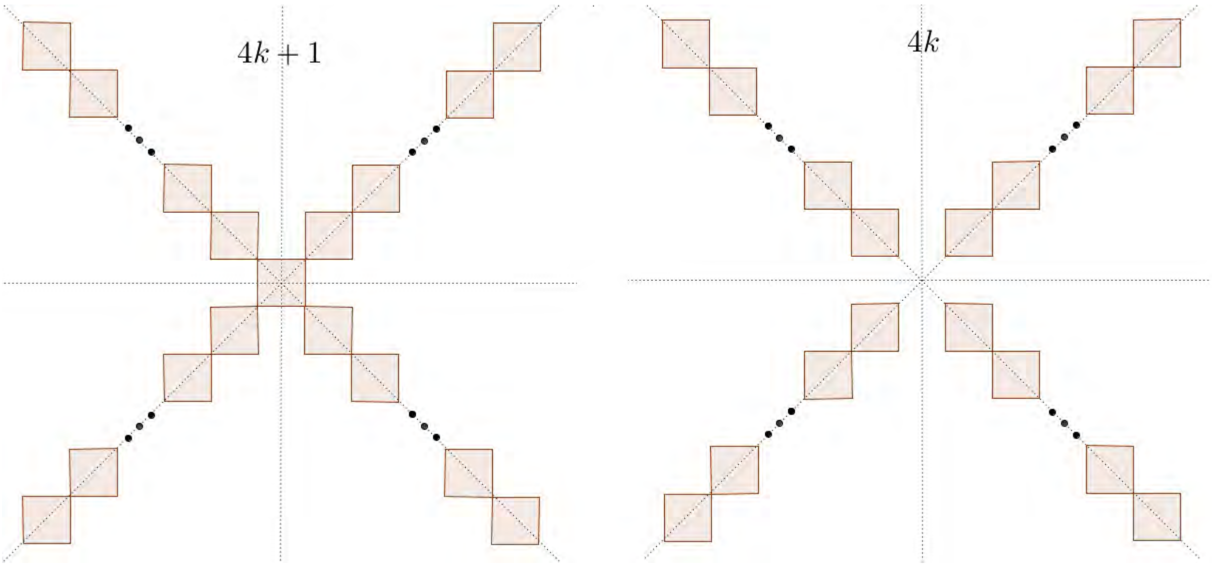
مرکز هر مربع یا در ناحیه‌های بین محورها است یا روی محورها و نه در نقطه‌ی تقاطع آن‌ها و یا در نقطه‌ی تقاطع است.

اگر مرکز مربع در ناحیه‌های بین محورها باشد، قرینه‌کردن این مربع نسبت به محورها، ۸ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند.

اگر روی محورها (و نه نقطه‌ی تقاطع آن‌ها) باشد، قرینه کردن این مربع نسبت به محورها، ۴ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند.

اگر به این ترتیب با کنار گذاشتن مربع‌های به مرکز نقطه‌ی تقاطع، بقیه‌ی مربع‌ها را می‌توان به دسته‌هایی

با تعداد اعضای ۴ یا ۸ تقسیم کرد. به مرکز نقطه‌ی تقاطع هم صفر یا یک مربع وجود دارد. لذا اگر بتوان n مربع یکسان با اضلاع افقی و عمودی در صفحه قرار داد که حداقل سه محور تقارن داشته باشد، n باید به یکی از دو صورت $۴k$ و یا $۴k+۱$ باشد. مثال‌های زیر نشان می‌دهد که برای همه‌ی مقدارهای k می‌توان $۴k$ و یا $۴k+۱$ مربع با این خاصیت یافت.



۴. فرض کنید n درجه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ باشد. در این صورت P به فرم زیر است.

$$P(x) = a_n x^x + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰ \quad (a_n \neq ۰)$$

حال ضریب بزرگ‌ترین توان x را در دو طرف عبارت داده‌شده در صورت مسئله محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P(۲P(x)) &= P(۲(a_n x^n + \cdots + a_۰)) \\ &= a_n(۲(a_n x^n + \cdots + a_۰))^n + \cdots + a_۰ \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن $x^{n^۲}$ است و ضریب این جمله برابر $۲^n a_n^{n+۱}$ است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} ۲P(P(x)) &= ۲P(a_n x^n + \cdots + a_۰) \\ &= ۲a_n(a_n x^n + \cdots + a_۰)^n + \cdots + a_۰ \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین توان x در این‌جا هم همان $x^{n^۲}$ است که ضریب آن برابر $۲a_n^{n+۱}$ است. در نهایت

$$۲P(x)^۲ = ۲(a_n x^n + \cdots + a_۰)^۲$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن برابر $x^{۲n}$ بوده و ضریب این جمله $۲a_n^۲$ است.

حال اگر $n > ۲$ باشد، $n^۲ > ۲n$ و لذا بزرگ‌ترین توان x در دو سمت عبارت $x^{n^۲}$ خواهد بود. از برابر قرار دادن ضریب این جمله در دو طرف تساوی به دست می‌آوریم $۲^n a_n^{n+۱} = ۲a_n^{n+۱}$ که با فرض $a_n \neq ۰$ و $n > ۲$ هیچ‌گاه نمی‌تواند برقرار باشد. به این ترتیب سه حالت برای درجه‌ی $P(x)$ محتمل است.

حالت اول. $n = ۰$. در این صورت $P(x) = a_۰$ است و باید داشته باشیم:

$$a_۰ = ۲a_۰ + ۲a_۰^۲ \Rightarrow ۲a_۰^۲ + a_۰ = ۰ \Rightarrow a_۰(۲a_۰ + ۱) = ۰$$

پس $a_0 = 0$ و یا $a_0 = -\frac{1}{2}$ و بنابراین تنها جواب‌های آن $P(x) \equiv 0$ و $P(x) \equiv -\frac{1}{2}$ هستند.
حالت دوم. $n = 1$. در این صورت $P(x) = ax + b$ که $a \neq 0$، و باید داشته باشیم:

$$a(2(ax+b)) + b = 2a(ax+b) + 2b + 2(ax+b)^2$$

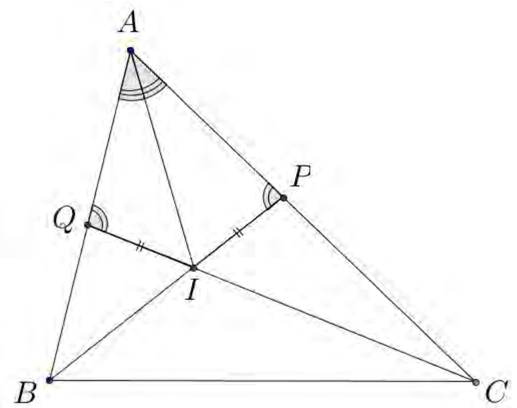
ضریب x^2 در طرف چپ صفر است، در حالی‌که در سمت راست ضریب x^2 برابر $2a^2$ است. پس باید a برابر صفر باشد که در این حالت فرض کرده‌ایم این طور نیست.
حالت سوم. $n = 2$. در این صورت $P(x) = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$، و باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} & P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2P(x)^2 \\ \Rightarrow \quad & 4aP(x)^2 + 2bP(x) + c = 2aP(x)^2 + 2bP(x) + c + 2P(x)^2 \\ \Rightarrow \quad & 2aP(x)^2 = c + 2P(x)^2 \end{aligned}$$

از برابر قرار دادن ضریب x^4 در دو طرف نتیجه می‌شود که $2a^3 = 2a^4$ و که چون $a \neq 0$ باید $a = 1$ باشد. حال تساوی بالا نشان می‌دهد که $c = 0$. بنابراین جواب این قسمت به صورت $x^2 + bx$ است که می‌توان دید در شرط مسئله صدق می‌کند.
بنابراین همه‌ی جواب‌های مسئله به دست آمد.

۵. در دو مثلث AIP و AIQ از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\frac{IP}{\sin(\frac{\angle A}{2})} = \frac{AI}{\sin(\angle P)}, \qquad \frac{IQ}{\sin(\frac{\angle A}{2})} = \frac{AI}{\sin(\angle Q)}$$



بنابراین اگر $IP = IQ$، آن‌گاه $\sin(\angle P) = \sin(\angle Q)$. پس یا این دو زاویه با هم برابر هستند و یا مکمل یک‌دیگرند. اما $\angle P = \angle C + \frac{1}{2}\angle B$ و $\angle Q = B + \frac{1}{2}\angle C$. بنابراین اگر $\angle P = \angle Q$ آن‌گاه $\angle B = \angle C$ که خلاف فرض $AB > AC$ است. پس $\angle P + \angle Q = 180^\circ$. در نتیجه

$$\angle C + \frac{1}{2}\angle B + \angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = \frac{2}{3}180^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ$$

۶. الف) خانه‌های این جدول را از چپ به راست با عددهای ۱، ۲، ۳،... شماره‌گذاری می‌کنیم. در هر حالت تعداد مهره‌های موجود در خانه‌ی kام را با a_k نمایش می‌دهیم. در هر گام از فرآیند مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k + \text{تفاضل تعداد مهره‌ها}$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هر عمل (چه از نوع یک و چه از نوع دو) حداقل یک واحد کاهش می‌یابد. زیرا:

اگر عمل از نوع یک باشد، و این دو خانه، خانه‌های iام و $i+1$ام باشند، از S به اندازه‌ی $i+(i+1)+1$ واحد کم‌شده و $i+2$تا به S اضافه می‌شود. بنابراین S به $S-i$ تبدیل می‌شود و در نتیجه حداقل یک واحد کاهش می‌یابد.

اگر عمل از نوع دو باشد، و این خانه، خانه‌ی iام باشد، از S به اندازه‌ی $2i$ کم‌شده و $(i+1)+(i-2)$ جای‌گزین آن می‌شود. پس S به $S-1$ تبدیل شده و یک واحد کاهش می‌یابد.

اما دقت کنید که هم‌واره باید $S \geq 0$. بنابراین اگر مقدار S را در ابتدای کار S_0 بنامیم.(دقت کنید که چون تعداد مهره‌ها در آغاز کار متناهی است، لذا مقدار S_0 نیز متناهی است) ما قادر به انجام بیش‌تر از S_0 عملیات نیستم و بنابراین حداکثر بعد از انجام S_0 عمل، عملیات به پایان می‌رسد.

ب) دنباله‌ی اعداد فیبوناتچی را که به شکل زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید.

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ n \geq 0$$

ابتدا دقت کنید که به راحتی می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی n،

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

حال برای حل مسئله، مجموع S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k f_k$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هیچ‌یک از دو عمل ذکرشده در صورت مسئله تغییر نمی‌کند. زیرا اگر عمل نوع ۱ باشد و روی خانه‌های n و $n+1$ام انجام شود، تغییرات S برابر است با $f_{n+2}-f_n-f_{n+1} = 0$.
و اگر عمل از نوع ۲ باشد و روی خانه‌ی nام انجام شود، تغییرات S برابر است با

$$\begin{aligned} f_{n+1} + f_{n-2} - 2f_n &= f_n + f_{n-1} + f_{n-2} - 2f_n \\ &= f_{n-1} + f_{n-2} - f_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

مقدار S در ابتدای کار برابر با $S_0 = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$ است و طبق آن‌چه گفته شد، مقدار S در همه‌ی مرحله‌ها همین مقدار $f_{n+2} - 1$ باقی خواهد ماند. بنابراین اگر در مرحله‌ای، مهره‌ای از خانه‌ی $n+1$ام جلوتر برود، مقدار S باید حداقل f_{n+2} بشود که این‌گونه نخواهد بود.