پاسخ مسائل مرحله اول بیستمین المپیاد ریاضی، سال ۱۳۸۰

۱) گزینهٔ (الف) صحیح است.

اگر $n \geqslant ۷$ باشد، آنگاه $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n = ۳^۷(۱ + ۳^۴ + ۳^{n-۷})$ و در نتیجه توان ۳ در این عبارت عددی فرد خواهد بود و لذا این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد. پس $n < ۷$.

حال با توجه به اینکه $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n = ۳^n(۳^{۷-n} + ۳^{۱۱-n} + ۱)$ نتیجه می‌گیریم که n باید عددی زوج باشد. امّا در این صورت $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n \overset{۴}{\equiv} -۱ - ۱ + (-۱)^n \overset{۴}{\equiv} -۱$ در حالی که باقیمانده یک عدد مربع کامل بر ۴ نمی‌تواند برابر ۱− باشد. بنابر این در حالت $n < ۷$ هم این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد.

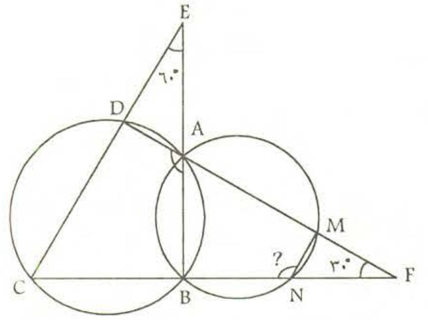
۲) گزینهٔ (ج) صحیح است.

ابتدا روشن است که d باید از هر سه عدد a و b و c بزرگ‌تر باشد. بنابر این

$$n^d = n^a+n^b+n^c \leqslant n^{d-۱}+n^{d-۱}+n^{d-۱} = ۳n^{d-۱} \Rightarrow n \leqslant ۳ \Rightarrow n = ۳ \text{ یا ۲ یا ۱}$$

واضح است که $n \neq ۱$. مثال‌های سادهٔ $۲^۳ = ۲^۲ + ۲ + ۲$ و $۳^۲ = ۳ + ۳ + ۳$ نشان می‌دهند که به ازای $n = ۲$ و $n = ۳$ معادلهٔ مذکور جواب دارد.

۳) گزینهٔ (ج) صحیح است.

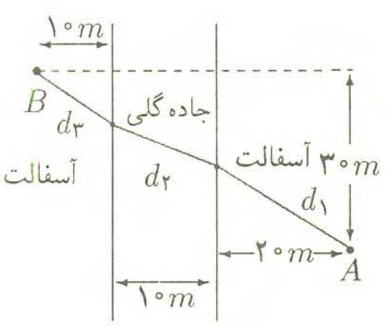


از آنجایی که چهارضلعی $ABNM$ محاطی است، لذا $\angle MNB = \angle BAD$. با جمع زدن زوایای دو مثلث $\triangle ECB$ و $\triangle FCD$ بدست می‌آوریم:

$$۲\hat{C} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{D} + \hat{B} = ۳۶۰^\circ$$

امّا $\hat{E} + \hat{F} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$، بنابر این $\hat{C} = ۴۵^\circ$ و از آنجا $\angle BAD = ۱۸۰ - ۴۵ = ۱۳۵^\circ$.

۴) پاسخ صحیح در بین گزینه‌ها موجود نمی‌باشد.



همهٔ گزینه‌ها را رد می‌کنیم.

فرض کنید دونده مطابق شکل پس از طی سه تکهٔ $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ از A به B برسد. زمانی که لازم دارد برابر است با:

$$t = \frac{d_۱}{۱۰} + \frac{d_۲}{۵} + \frac{d_۳}{۱۰} = \frac{d_۱+d_۲+d_۳}{۱۰} + \frac{d_۲}{۱۰} > \frac{AB}{۱۰} + \frac{۱۰}{۱۰} = \frac{۵۰}{۱۰} + ۱ = ۶$$

بنابر این این دونده به زمانی بیشتر از ۶ ثانیه احتیاج خواهد داشت، در حالی که همهٔ گزینه‌ها از ۶ کمترند.

۵) گزینهٔ (الف) صحیح است.

از بین این اعداد، اعدادی را انتخاب می‌کنیم که در نوشتن آنها از تعداد فردی ۱ استفاده شده باشد. در اینصورت هر دوتایی از این اعداد حداقل در دو رقم با هم اختلاف دارند و تعداد کل چنین اعدادی برابر است با:

$$\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۵}=۵+۱۰+۱=۱۶$$

در ادامه نشان می‌دهیم که انتخاب بیش از ۱۶ عدد با خاصیت خواسته شده ممکن نیست.

تعداد کل اعداد ۵ رقمی که با رقم‌های ۱ و ۲ می‌توان ساخت برابر است با $۳۲ = ۲^۵$. حال ما این ۳۲ عدد را به شیوهٔ زیر به ۱۶ دستهٔ دوتایی تقسیم می‌کنیم:

هر دو عددی را که فقط در رقم یکان با هم تفاوت دارند در یک دسته قرار می‌دهیم. برای مثال دو عدد (۱۱۲۱۱, ۱۱۲۱۲) در یک دسته قرار می‌گیرند. حال واضح است که از دو عدد واقع در هر یک از این ۱۶ دسته حداکثر یکی را می‌توان انتخاب کرد. لذا حداکثر ۱۶ عدد از این اعداد را می‌توان انتخاب کرد.

۶) گزینهٔ (ج) صحیح است.

$$\begin{aligned}
a=۱+\sqrt[۳]{۶a-۲} &\Rightarrow (a-۱)^۳=۶a-۲ \Rightarrow a^۳-۳a^۲+۳a-۱=۶a-۲\\
&\Rightarrow a^۳-۳a^۲-۳a+۱=۰ \Rightarrow a^۳+۱-۳a(a+۱)=۰\\
&\Rightarrow (a+۱)(a^۲-a+۱-۳a)=۰
\end{aligned}$$

که با توجه به مثبت بودن a، $a+۱\neq۰$ و لذا $a^۲-۴a+۱=۰$. مشابهاً $b^۲-۴b+۱=۰$ بنابر این با توجه به فرض متمایز بودن a و b، این دو عدد باید همان ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند. لذا با توجه به رابطهٔ مربوط به حاصل‌ضرب ریشه‌ها خواهیم داشت $ab=۱$.

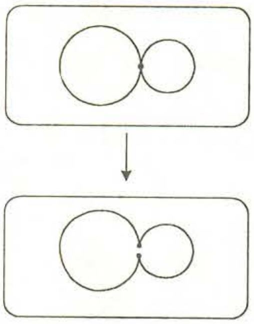
۷) گزینهٔ (ج) صحیح است.

اگر در تبدیل f، دو نقطهٔ نزدیک به هم در نظر بگیریم، از آنجایی که تبدیل f این دو تکه خمیر را به هم می‌چسباند لذا بعد از تبدیل، این دو نقطه همچنان نزدیک به هم باقی خواهند ماند. بنابر این f یک تبدیل پیوسته است.

امّا اگر در دو تکه خمیر به هم چسبیده شده، دو نقطه نزدیک به هم انتخاب کنیم بطوریکه هر دو در یک تکه خمیر نباشند (در دو طرف مرز چسبیدگی دو تکه خمیر باشند)، آنگاه تبدیل یافته‌های این دو نقطه، یکی در تکه خمیر بالایی و دیگری در تکه خمیر پایینی می‌افتد و لذا این نقاط دیگر نزدیک به هم نخواهند بود. بنابر این $f^{-۱}$ یک تبدیل ناپیوسته است.

۸) گزینهٔ (الف) صحیح است.

دو شکل A و B هم‌ریختند، زیرا به روشنی با تغییرات پیوسته می‌توان شکل A را به شکل B تبدیل کرد، بطوریکه نقاط نزدیک به هم، همچنان نزدیک به یکدیگر باقی بمانند.



امّا دو شکل C و D هم‌ریخت نیستند. زیرا اگر بخواهیم شکل D را به شکل C تبدیل کنیم، ابتدا باید دو سوراخ را به هم نزدیک کنیم تا جایی که دقیقاً در یک نقطه مطابق شکل مشترک شوند. حال باید خمیر را از نقطهٔ اشتراک دو دایره پاره کنیم تا دو سوراخ به یک سوراخ تبدیل شوند، ولی در اینصورت نقاط دو طرف محل اشتراک دو دایره، به وضوح از هم دور خواهند شد و لذا تبدیل پیوسته نیست.

۹) گزینهٔ (هـ) صحیح است.

راه اول: با کمی دقت می‌توان دریافت که در فاصلهٔ هر یک ساعت، دقیقاً یک بار این اتفاق روی می‌دهد. یک بار بین ساعت ۱ و ۲، یک بار بین ساعت ۲ و ۳ و .... امّا علاوه بر اینها رأس ساعت ۶ هم یک بار دیگر این اتفاق روی می‌دهد. لذا در کل ۱۳ بار این ساعت زنگ می‌زند.

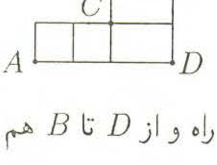
راه دوم: فرض کنید z مختصات نوک عقربهٔ ساعت‌شمار در صفحهٔ مختلط باشد. می‌توان z را روی دایره واحد فرض کرد. در اینصورت مختصات عقربهٔ دقیقه‌شمار برابر z^{12} خواهد بود. حال برای اینکه محور افقی نیمساز زاویهٔ بین دو عقربه باشد، باید $\bar{z} = z^{12}$ و به عبارتی $1 = z \cdot \bar{z} = z \cdot z^{12}$ یعنی $z^{13} = 1$ که این معادله دارای ۱۳ جواب در مجموعهٔ اعداد مختلط است.

۱۰) گزینهٔ (د) صحیح است.

از فرض مسأله نتیجه می‌شود که اگر دو پدر با هم دوست نباشند، پسرهای آنها نیز با هم دوست نیستند. لذا اگر در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر موجود باشند که هیچ دوتایی دوست نباشند، آنگاه پسرهای آنها نیز با هم دوست نیستند و لذا k دانش‌آموز وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

۱۱) گزینهٔ (ب) صحیح است.

مسیرها را به سه دسته تقسیم می‌کنیم:



i) مسیرهایی که از C رد می‌شوند و از D رد نمی‌شوند، که در اینصورت از A تا C، ۴ راه و از C تا B هم ۴ راه خواهیم داشت، لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با $۴ \times ۴ = ۱۶$.

ii) مسیرهایی که از D رد می‌شوند و از C رد نمی‌شوند، که در اینصورت از A تا D، ۲ راه و از D تا B هم ۲ راه خواهیم داشت، لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با $۲ \times ۲ = ۴$.

iii) مسیرهایی که هم از C و هم از D رد می‌شوند، که این خود به دو صورت ممکن است:

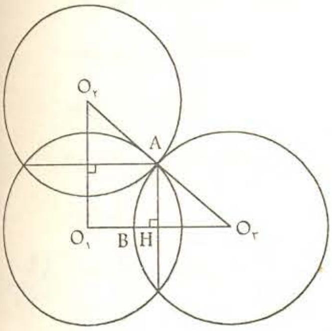
اول اینکه، از A به C، از C به D و از D به B برویم که تعداد این مسیرها با توجه به اینکه از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کرد، به ترتیب برابرند با: ۲، ۱، ۲ و لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با: $۲ \times ۱ \times ۲ = ۴$

دوم اینکه، از A به D، از D به C و از C به B برویم که تعداد این مسیرها با توجه به اینکه از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کرد، به ترتیب برابرند با: ۲، ۱، ۲ و لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با: $۲ \times ۱ \times ۲ = ۴$.

بنابر این تعداد کل مسیرهای از A به B برابر خواهد بود با $۱۶ + ۴ + ۴ + ۴ = ۲۸$.

۱۲) گزینهٔ (د) صحیح است.

اولاً طبق قضیه فیثاغورس



$$.O_2O_3 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

بنابر این دو دایرهٔ C_2 و C_3 در وسط O_2O_3 بر هم مماسند، و البته از آنجایی که در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف وتر است، فاصلهٔ O_1 از وسط O_2O_3 برابر $5 = \frac{10}{2}$ خواهد بود و بنابر این دایرهٔ C_1 نیز از وسط O_2O_3 یعنی همان محل تماس C_2 و C_3 می‌گذرد.

قرار دهید $\hat{O}_2 = \theta$ و $\hat{O}_3 = \theta'$. در اینصورت مساحت ناحیهٔ مشترک C_3 و C_1 برابر است با:

$$4 \times (O_3AB \text{ مساحت قطاع } - \triangle O_3AH \text{ مساحت مثلث}) =$$

$$4 \times (\frac{5^2\theta'}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{O_1O_3}{2} \times \frac{O_1O_2}{2}) = 4 \times (\frac{5^2\theta'}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{6}{2} \times \frac{8}{2}) = 50\theta' - 24$$

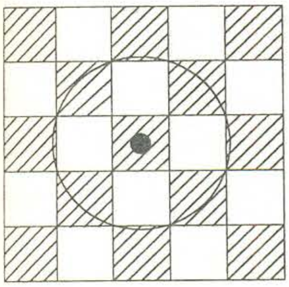
مشابهاً مساحت ناحیه مشترک C_2 و C_1 برابر است با:

$$4(\frac{5^2\theta}{2} - \frac{3 \times 4}{2}) = 50\theta - 24$$

لذا مساحت ناحیه‌ای از C_1 که با C_2 و C_3 تداخل ندارد، برابر است با:

$$\pi \times 5^2 - (50\theta - 24 + 50\theta' - 24) = 25\pi - (50(\theta + \theta') - 48)$$
$$= 25\pi - (50 \times \frac{\pi}{2} - 48) = 48$$

۱۳) گزینهٔ (الف) صحیح است.



دایره نشان داده شده در شکل تماماً در خانه‌های سیاه قرار دارد و شعاع آن برابر است با

$$\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

و چون $\sqrt{\frac{5}{2}}$ بزرگ‌ترین گزینهٔ مسأله است، پس $\sqrt{\frac{5}{2}}$ جواب مسأله خواهد بود.

۱۴) گزینهٔ (ج) صحیح است.

زیرا چنانچه گزارهٔ (ج) در مورد اعداد جالب برقرار باشد، باید $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$ هم جالب باشد که نیست.

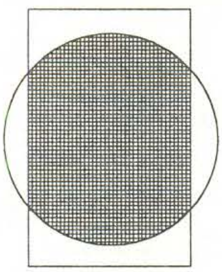
۱۵) گزینهٔ (د) صحیح است.

با کمی دقت و نگاه کردن به گزینه‌ها می‌توان به سادگی دریافت که گزینهٔ (د) صحیح است، زیرا مساحت متوازی‌الاضلاعی مثل $ABCD$ که رئوس آن شبکه‌ای باشند، برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} = ۲S_{ABC} &= ۲ \times \frac{۱}{۲}|y_۱(x_۲ - x_۳) + y_۲(x_۳ - x_۱) + y_۳(x_۱ - x_۲)| \\ &= |y_۱(x_۲ - x_۳) + y_۲(x_۳ - x_۱) + y_۳(x_۱ - x_۲)| \end{aligned}$$

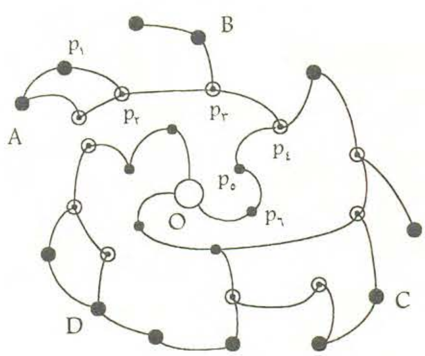
که عددی صحیح است. لذا گزینهٔ (د) صحیح است.

۱۶) گزینهٔ (الف) صحیح است.



اگر استوانه را باز کنیم تا به مستطیلی تبدیل شود، مساحتی که حشره می‌تواند به آن برود قسمتی از دایرهٔ به مرکز وسط مستطیل و شعاع یک خواهد بود که داخل مستطیل قرار می‌گیرد. (دقت کنید که چون قطر دایره برابر ۲ و از $\sqrt{۳}$ بیشتر است، دایره کاملاً داخل مستطیل نمی‌افتد.) همین جا می‌توان جواب مسأله را پیدا کرد، زیرا مساحت این ناحیه حتماً از مساحت کل دایره که $\pi \times ۱^۲ = \pi$ است کمتر است و بین گزینه‌ها تنها گزینه (الف) از π کمتر است. البته خودتان به سادگی می‌توانید مساحت قسمت‌هایی از دایره را که بیرون مستطیل می‌افتد حساب کنید و به صورت تشریحی هم به همین جواب برسید.

۱۷) گزینهٔ (الف) صحیح است.



A: آرش مهره را به $p_۱$ می‌برد، علی به اجبار آن را به $p_۲$ می‌برد. آرش آن را به $p_۳$ و سپس علی به اجبار به $p_۴$، آرش آن را به $p_۵$ و علی به اجبار به $p_۶$ و در نهایت آرش آن را به O می‌برد

B: آرش مهره را به $p_۳$ و علی به اجبار به $p_۴$ و سپس آرش آن را به $p_۵$ و علی به اجبار به $p_۶$ و در نهایت آرش آن را به O می‌برد.

۱۸) گزینهٔ (الف) صحیح است.

دقت کنید که می‌توان دونده‌های E و D و C و B را بدون حرکت در نظر گرفت و در عوض سرعت آنها یعنی یک دور در ساعت را به سرعت A افزود. (به بیانی سرعت نسبی این متحرک‌ها مهم است.) در این صورت همهٔ دونده‌ها ثابتند و A با سرعت ۵ دور در ساعت حرکت می‌کند. در دور اول چوب را به E می‌دهد، در دور دوم چوب را از E گرفته به D می‌دهد، در دور سوم از D به C و در دور چهارم از C به B می‌دهد. در دور پنجم هم چوب را از B می‌گیرد و لذا در پایان این دور چوب در دست خود A خواهد بود.

۱۹) گزینهٔ (ه) صحیح است.

فرض کنیم که این اتومبیل در فاصلهٔ x کیلومتری شهر B باشد. سرعت این اتومبیل در x کیلومتر باقیمانده حداکثر x کیلومتر بر ساعت است. لذا برای طی مسافت باقیمانده به حداقل یک ساعت زمان احتیاج دارد.

به عبارتی این اتومبیل در هر نقطه‌ای از مسیر که باشد، حداقل یک ساعت تا مقصد فاصله دارد. بنابر این این اتومبیل هیچ‌گاه به مقصد نخواهد رسید!

۲۰) گزینهٔ (ه) صحیح است.

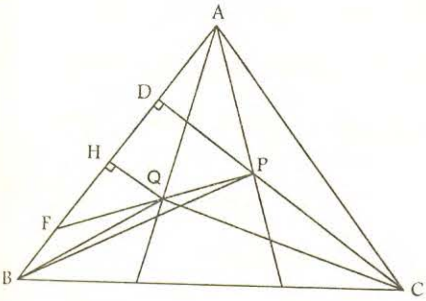
گزارهٔ (الف) صحیح است، زیرا اگر x نقطه‌ای درون دایره واحد باشد، مثلثی متساوی‌الاضلاع به مرکز ثقل x در نظر می‌گیریم و آن قدر این مثلث را کوچک می‌کنیم که کاملاً درون دایرهٔ واحد بیفتد. درستی گزارهٔ (ب) نیز با استدلال مشابهی اثبات می‌شود.

گزارهٔ (ج) نیز صحیح است، زیرا فرض کنید x نقطه‌ای درون مجموعه‌ای با ساختار دایره‌ای باشد، لذا دایره توپری به مرکز x وجود دارد که کاملاً داخل مجموعه بیفتد. حال مثلثی متساوی‌الاضلاع به مرکز ثقل x در نظر می‌گیریم و آن را آنقدر کوچک می‌کنیم تا کاملاً درون این دایره بیفتد، لذا مثلث متساوی‌الاضلاع توپری به مرکز ثقل x وجود دارد که کاملاً درون مجموعه باشد، بنابر این مجموعه ساختار مثلثی نیز دارد.

درستی گزارهٔ (د) نیز مشابهاً اثبات می‌شود.

بنابر این گزینهٔ (ه) پاسخ مسأله خواهد بود.

۲۱) گزینهٔ (ه) صحیح است.



اولاً ادعا می‌کنیم $PQ = QF$، زیرا:

$$\frac{QF}{PF}=\frac{QH}{PD}=\frac{QH\cdot AB}{PD\cdot AB}=\frac{S_{AQB}}{S_{APB}}=\frac{\frac{1}{6}S_{ABC}}{\frac{2}{6}S_{ABC}}=\frac{1}{2}$$

بنابر این $QF = \frac{1}{2}PF$ و یا معادلاً $PQ = QF$، یعنی نقطه Q وسط پاره‌خط PF است.

حال از آنجایی که $\frac{AF}{FB} = \frac{S_{AFC}}{S_{BFC}}$، سعی می‌کنیم مساحت مثلث $\triangle BFC$ را محاسبه کنیم. دقت می‌کنیم که چون Q وسط PF است، لذا ارتفاع وارد از Q بر BC برابر نصف مجموع ارتفاع‌های وارد از P و F بر BC می‌باشد و لذا $S_{QBC} = \frac{S_{FBC}+S_{PBC}}{2}$ و از آنجا:

$$S_{FBC} = 2S_{QBC} - S_{PBC} = 2\times\frac{2}{6}S_{ABC} - \frac{3}{6}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABC} \Rightarrow$$
$$S_{AFC} = S_{ABC} - S_{BFC} = \frac{5}{6}S_{ABC}$$

و بنابر این،

$$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{AFC}}{S_{BFC}}=\frac{\frac{5}{6}S_{ABC}}{\frac{1}{6}S_{ABC}}=5$$

۲۲) گزینهٔ (ج) صحیح است.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول از ۱ تا ۳۰ را انتخاب می‌کنیم. تعداد این اعداد ۱۰ تاست و روشن است که هیچ‌یک از این اعداد حاصلضرب بقیه‌شان را نمی‌شمارد.

حال نشان می‌دهیم که ۱۰ حداکثر مقدار ممکن نیز می‌باشد.

فرض کنید تعدادی عدد انتخاب کرده‌ایم، بطوریکه هیچ‌کدام از آن‌ها حاصلضرب مابقی را نمی‌شمارد. ادعا می‌کنیم می‌توان تمام این اعداد را به صورت p^α در نظر گرفت، بدون اینکه تعداد این اعداد کاهش یابد. برای این کار فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ یکی از این اعداد باشد، در اینصورت حداقل یکی از $p_i^{\alpha_i}$ها حاصلضرب مابقی اعداد را نمی‌شمارد، زیرا در غیر اینصورت حاصلضرب مابقی اعداد باید بر همهٔ $p_i^{\alpha_i}$ها و در نتیجه بر حاصلضرب آنها یعنی n بخشپذیر باشد که تناقض است. حال می‌توان جای n و $p_i^{\alpha_i}$ را با هم عوض کرد، بدون اینکه خاصیت مسأله به هم بخورد.

به این ترتیب می‌توان همهٔ این اعداد را به p^αها تبدیل کرد بدون اینکه تعداد آنها کاهش یابد. حال دقت می‌کنیم که اگر p^α و q^β دو تا از این اعداد باشند، در اینصورت $p \neq q$ (چرا؟) لذا تعداد این اعداد حداکثر برابر تعداد اعداد اول مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, 30\}$، یعنی ۱۰ خواهد بود.

* قبل از شروع به بررسی این سه سؤال سعی می‌کنیم برداشت مناسبی از مفاهیم خط، نقطه و دایره که در این مسأله تعریف شده‌اند پیدا کنیم:

نقطه: منظور از نقطه همان نقطهٔ صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ است. با این خاصیت که باید مختصات آن صحیح باشد.

خط: منظور از یک خط، نقاط صحیح واقع بر یک خط است، البته این خط باید حداقل یک نقطه صحیح داشته باشد و به علاوه شیب آن نیز باید گویا باشد. (و یا موازی محور عمودی باشد.)

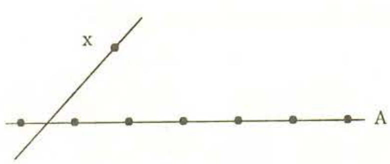
دایره: منظور از دایره، نقاط صحیح واقع بر یک دایره است. البته مختصات مرکز دایره نیز باید صحیح باشد.

حال با در نظر داشتن این مطالب به حل این مسایل می‌پردازیم.

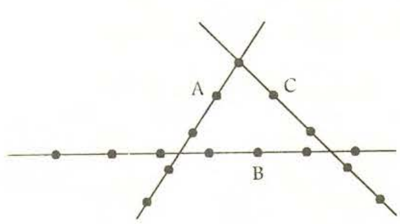
۲۳) گزینهٔ (ب) صحیح است.

گزارهٔ (۱) به وضوح درست است.

گزارهٔ (۲) غلط است. زیرا اگر x نقطه‌ای خارج از خط A باشد کافیست از این نقطه خطی با شیب گویا رسم کنید که خط A را در نقطه‌ای غیر صحیح قطع کند. در اینصورت این خط با خط A موازی خواهد بود.

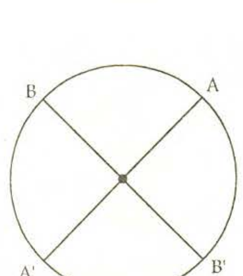


گزارهٔ (۳) غلط است. مطابق شکل A با B موازی و B با C موازی است، ولی A و C موازی نیستند.



گزارهٔ (۴) غلط است، مثلاً دو نقطهٔ $(1, 0)$ و $(0, 0)$ را در نظر بگیرید. مجموعه نقاطی که از این دو نقطه به یک فاصله‌اند خط $x = \frac{1}{2}$ است، که شامل هیچ نقطهٔ صحیحی نیست؛ لذا یک خط نیست.

۲۴) گزینهٔ (ج) صحیح است.



ابتدا دقت کنید که تعداد نقاط صحیح روی یک دایره متناهی است. حال ادعا می‌کنیم که این تعداد مضرب ۴ است. زیرا اگر A نقطه‌ای صحیح روی دایره باشد، A' نقطهٔ مقابل قطری A و دو سر قطر عمود بر AA' نیز صحیح خواهند بود. پس نقاط صحیح روی دایره به صورت دسته‌های چهارتایی هستند و لذا تعداد آنها مضرب ۴ می‌باشد.

۲۵) گزینهٔ (ب) صحیح است.

زیرا از هر نقطه روی دایره می‌توان بی‌نهایت خط با شیب گویا رسم کرد که دایره را در نقطهٔ صحیحی قطع نکنند. در اینصورت تمام این خطوط بر دایره مماس خواهند بود.

۲۶) گزینهٔ (الف) صحیح است.

دقت کنید که در شکل (۱)، اجتماع هر دو شکل، شکل سوم را می‌پوشاند. بنابر این، این تابلو منگول نیست. در مورد شکل (۲) نیز همین مطلب صادق است.

۲۷) گزینهٔ (ب) صحیح است.

تابلوی گزارهٔ (۱) منگول است، زیرا خطی را در نظر بگیرید که موازی هیچ‌کدام از محورهای انتقال نباشد. با نزدیک کردن این خط از بی‌نهایت به این شکل‌ها، به ترتیب برخورد، ترتیب کشیده شدن شکل‌ها بدست می‌آید.

تابلوی گزارهٔ (۳) نیز منگول است، دایره‌ای به شعاع به اندازهٔ کافی بزرگ در نظر بگیرید که همه شکل‌ها را شامل باشد. با کوچک کردن شعاع، این دایره دایره‌ها را قطع خواهد کرد. حال کافیست شکل‌ها به ترتیب عکس این قطع کردن‌ها کشیده شوند. (البته باید دایرهٔ مذکور را طوری انتخاب کنیم که هیچ‌گاه به طور همزمان بر دو تا از این دوایر مماس نشود که برای این منظور هم کافیست مرکز دایره را نقطه‌ای غیر از نقاط واقع بر هذلولی‌های به کانون‌های مراکز این دوایر و به فاصلهٔ رأسی تفاضل دوبه‌دوی شعاع‌های این دوایر در نظر بگیریم. (چرا؟))

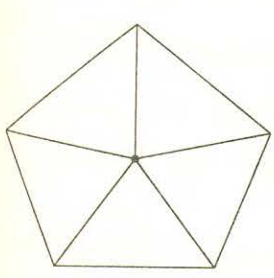
۲۸) گزینهٔ (ب) صحیح است.

به سادگی می‌توان دید که در هر شکل منگول شرط (ب) برقرار است.

توضیح: به دلیل برداشت‌های متفاوتی که از صورت این سؤال شده بود، هر سه گزینهٔ (ب)، (د) و (ه) در تصحیح اوراق به عنوان پاسخ صحیح پذیرفته شدند.

۲۹) گزینهٔ (ب) صحیح است.

ابتدا یک تابلو برای گزینهٔ (ب) ارائه می‌کنیم. یک ۱۰۰۰۰ ضلعی منتظم در نظر بگیرید که با وصل کردن مرکز آن به رئوسش به ۱۰۰۰۰ قاچ برابر تقسیم شده است. (این کار در شکل برای ۵ ضلعی منتظم نشان داده شده است.)



حال ۱۹ قاچ پشت سرهم از این ۱۰۰۰۰ ضلعی منتظم را حذف کنید و شکل باقیمانده را F_1 بنامید. از حذف ۱۹ قاچ‌های متوالی دیگر اشکال $F_2, F_3, \ldots, F_{10000}$ بدست می‌آیند. حال تابلو را متشکل از این ۱۰۰۰۰ شکل بگیرید. به وضوح هیچ ۲۱ شکلی تشکیل یک منگول نمی‌دهند، زیرا اجتماع هر ۲۰ تا از آنها حتماً ۲۱ـامی را می‌پوشاند. از طرفی یک شکل و ۱۹ دوران دیگر آن به اندازهٔ $\frac{2\pi}{10000}$ (به عبارتی هر ۲۰ شکل متوالی) منگول می‌باشند. پس گزینهٔ (ب) قطعاً درست است.

حال شما خود می‌توانید با مثال مشابهی گزینهٔ (الف) را رد کنید. یعنی مثالی بسازید که در آن هیچ ۱۰ شکلی تشکیل منگول ندهند. برای این منظور کافیست در مثال قبل بجای ۱۹ قاچ پشت سرهم، ۸ قاچ متوالی را حذف کنید تا دیگر در این تابلو هیچ ۱۰ شکلی منگول نباشند.

۳۰) گزینهٔ (ج) صحیح است.

زیرا هر بار هرکس شکلی بکشد، کافی است نفر بعد شکلی بکشد که از همه شکل‌ها به اندازهٔ کافی فاصله داشته باشد و با آنها اشتراکی نداشته باشد.

توماس کارلایل TOMASS CARLYLE

نویسنده دانشمند مشهور انگلیسی

هیچ‌کس قرآن را با دقت نمی‌خواند مگر آن‌که می‌بیند حقایقی اصیل در برابر وی آشکار است و در می‌یابد که این کتاب وابسته به اصلی حقیقی و مبدئی عالی و مقدس پیوسته است و تردیدی نیست که گفتار حقیقی و درست نفوذ خاصی بر دل‌ها دارد و حق آن است که تمام کتاب‌ها در برابر قرآن ناچیز و کوچکند و این کتاب از هرگونه عیب و نقص و اصول ناپسند پاکیزه و مبرا است.

تاریخ قرآن ص ۱۵۲، به نقل از کتاب اعترافات دانشمندان بزرگ جهان، ص ۴۷.