

مرحله ی اول نوزدهمین دوره ی المپیاد ریاضی ایران

بهمن ماه ۱۳۷۹

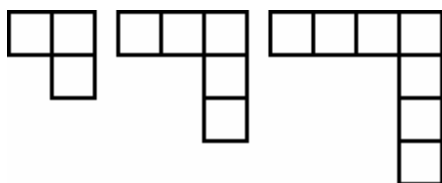
(۱) جدول اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & -1 \\
 & & & 1 & -1 & 1 \\
 & & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
 & & & & & . \\
 & & & & & . \\
 & & & & & .
 \end{array}$$

حاصل جمع کلیه ی سطر ها از سطر اول تا سطر ۱۳۷۹ (با خود سطر ۱۳۷۹) برابر است با:

الف) ۶۹۰ (ب) ۱ (ج) ۰ (د) ۱۳۷۹ (ه) ۶۸۹

(۲) شکل های زیر با چوب کبریت ساخته شده اند:



اگر ۵۰۰ تا چوب کبریت داشتیم، چند تا است؟

الف) ۱۶۷ (ب) ۱۶۶ (ج) ۱۶۵ (د) ۱۶۴ (ه) هیچ کدام

(۳) ۴۰ توپ را با اعداد ۱ تا ۴۰ شماره گذاری کرده ایم. می خواهیم توپ ها را در تعدادی جعبه قرار دهیم به این ترتیب که اگر در یک جعبه تویی با شماره ی n قرار داده شده باشد، توپ دیگری با مضارب n را نمی توانیم در آن جعبه بگذاریم، حداقل چند تا جعبه برای قرار دادن همه ی توپ ها لازم است؟

الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۱۲ (د) ۱۴ (ه) ۲۰

۴) پنج نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض است، کدام یک از نتیجه گیری های زیر درباره ی مختصات وسط پاره خط های واصل بین این نقاط درست است؟

الف) مختصات کلیه ی نقاط فوق الذکر نیز لزوما صحیح است.

ب) مختصات هیچ کدام لزوما صحیح نیست.

ج) حداقل مختصات یکی از نقاط صحیح است و نه لزوما بیش تر.

د) حداقل مختصات دو نقطه صحیح است و نه لزوما بیش تر.

ه) حداقل مختصات سه نقطه صحیح است و نه لزوما بیش تر.

۵) یک زوج (a, b) ، $a, b \in \mathbb{Z}$ ، خوب نامیده می شود اگر از هر مسیری از نقطه ی $(0, 2)$ حرکت کنیم و در هر مرحله روی شبکه ی مختصات یک واحد به بالا، پایین، چپ یا راست برویم و سرانجام به نقطه ی (a, b) برسیم دست کم یک بار از نقطه ای مثل (x, y) گذشته باشیم که $x^2 - 4y$ مربع کامل باشد. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

الف) زوج $(2000, 1379)$ خوب است ولی زوج $(-1361, 765)$ خوب نیست.

ب) زوج $(2000, 1379)$ و زوج $(-1361, 765)$ خوب هستند.

ج) زوج $(2000, 1379)$ خوب نیست ولی زوج $(-1361, 765)$ خوب است.

د) هیچ زوج خوبی وجود ندارد.

ه) تعداد متناهی زوج خوب وجود دارد و حداقل یک زوج خوب وجود دارد.

۶) تعداد اعداد طبیعی $n \leq 1379$ که به ازای آن ها عدد $n^3 + 2n^2$ مربع کامل باشد، چند تا است؟

الف) ۱۶ ب) ۶۴ ج) ۴۹ د) ۵۵ ه) ۳۶

۷) تعداد x های صحیح که در معادله ی زیر صدق می کنند چند تا است؟

$$\frac{x^2 + x}{x + 2} = 25$$

الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) بی شمار

۸) در مثلث ΔABC ، B' قرینه B نسبت به ضلع AC و C' قرینه C نسبت به ضلع AB است. می دانیم که $B'C' = AB + AC$. زاویه A چند درجه است؟

الف) 30° (ب) 40° (ج) 60° (د) 90° (ه) این زاویه یا 30° است و یا 60° .

۹) اعداد طبیعی x, y و n در شرایط زیر صدق می کنند:

(i) بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک x و y برابر با 1379 است.

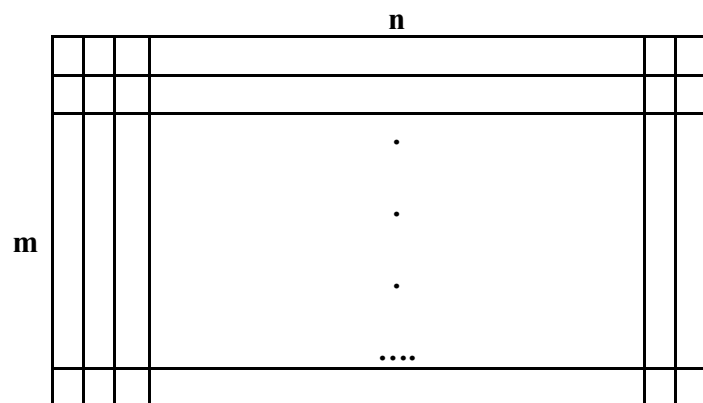
(ii) کوچک ترین مقسوم علیه مشترک x و y برابر $n!$ است.

n با کدام یک از اعداد زیر می تواند برابر باشد؟

الف) ۲۷ (ب) ۶۴ (ج) ۱۲۵ (د) ۲۱۶ (ه) هیچ کدام

۱۰) کارخانه ی « شوکولات » شکلات کاکائویی خوشمزه ای به شکل یک مستطیل شبکه بندی شده تولید کرده است. وقت خوردن، در هر گاز، یکی از خطوط افقی یا عمودی زیر دندان قرار می گیرد و می شکنند. در نتیجه شکلات به دو مستطیل تقسیم می شود. و یک قسمت آن خورده می شود، شخص با انتخاب کدام ابعاد برای شکلاتش می تواند در بیش ترین تعداد گاز آن را بخورد؟

الف) 32×35 (ب) 60×4 (ج) 33×34 (د) 3×80 (ه) 79×7



۱۱) آیا اعداد طبیعی x_1, x_2, \dots, x_n و x_{n+1} وجود دارند که

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_{n+1}^2$$

الف) برای هر n ای اعداد x_1, \dots, x_{n+1} وجود دارند.

ب) به جز $n=1, 2$ چنین اعدادی وجود ندارند.

ج) فقط برای هر n مربع کامل و $n=1, 2$ چنین اعدادی وجود دارند.

د) فقط برای $n=1$ و اعداد اول n چنین اعدادی وجود دارند.

ه) هیچ کدام

۱۲) در مثلث ABC داریم $AB > AC$. دو نیم دایره به قطر های AB و AC در خارج مثلث رسم می کنیم. نقاط تلاقی امتداد ارتفاع های CH' و BH را با نیم دایره های مزبور به ترتیب C' و B' می نامیم. کدام صحیح است؟

الف) همواره $AC' < AB'$

ب) $AC' < AB'$ اگر و تنها اگر $\angle A$ حاده باشد.

ج) همواره $AC' > AB'$

د) $AC' = AB'$ اگر و تنها اگر $\angle A$ حاده باشد.

ه) همواره $AC' = AB'$

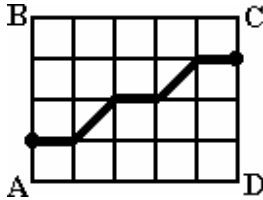
۱۳) در مثلث حاده الزاویه ABC ، BD و CE به ترتیب ارتفاع های وارد بر اضلاع AC و AB هستند. می دانیم $\angle DE = BC$. زاویه $\angle A$ چند درجه است؟

الف) 60° ب) 30° ج) 45° د) 30° یا 60° ه) نمی توان زاویه $\angle A$ را مشخص کرد.

۱۴) یک جدول 9×9 از مربعات سفید موجود است. حداکثر مقدار n را بیابید که اگر به هر طریق ممکن n تا از خانه های جدول را سیاه کنیم، باز هم در این جدول بتوان به هر طریق ممکن n تا از خانه های جدول را سیاه کنیم، باز هم در این جدول بتوان چهار خانه ی سفید متوالی عمودی یا افقی یافت.

الف) ۱۷ ب) ۱۸ ج) ۱۹ د) ۲۰ ه) ۲۱

۱۵) می خواهیم در شکل زیر از نقطه ی دلخواه روی ضلع AB به نقطه ی دلخواه روی ضلع CD برویم. فرض کنید تنها مجازیم دو نوع حرکت انجام دهیم، یک قدم افقی به سمت راست یا یک قدم مایل با زاویه ی 45° به سمت بالا- راست. به چند طریق این کار ممکن است؟



الف) ۱۲۶ ب) ۱۲۷ ج) ۱۲۸ د) ۱۲۹ ه) ۱۳۰

۱۶) یک فرش مربعی شکل 3×3 داریم که طرح روی آن 9 مربع 1×1 است. می خواهیم هر یک از مربع های 1×1 را با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم. چند فرش متفاوت با این خواص داریم؟ (اگر فرش را دوران دهیم، فرش جدیدی به وجود نمی آید!)

الف) ۱۲۰ ب) 2^7 ج) 2^8 د) 2^9 ه) ۱۴۰

۱۷) چند سه تایی مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد به طوری که داشته باشیم:

$$xyz = 2 + x + y + z, \quad xy + yz + zx = 12$$

الف) صفر ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) ۱۲

۱۸) تمام پنج تایی های مرتب از اعداد طبیعی به صورت $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ را در نظر بگیرید که

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1$$

در این صورت کدام یک از گزینه های زیر در مورد تعداد این پنج تایی های مرتب صحیح است؟

الف) تعداد آن ها متناهی است.

ب) فقط یک پنج تایی مرتب با خاصیت فوق وجود دارد.

ج) تعداد این پنج تایی ها بر 5 بخش پذیر است.

د) تعداد این پنج تایی ها به صورت $5k+1$ است که $k \geq 1$ است.

ه) هیچ کدام

۱۹) بزرگ ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر سه عدد حقیقی $a, b, c \geq 0$ داشته باشیم:

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca) \geq k(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۹ ه) ۱۲

۲۰) دنباله ای از اعداد حقیقی به این شکل تعریف می شوند $x_1=8, x_2=3$ و برای هر $n \geq 1, x_{n+1}=3x_n-4x_{n-1}$. به طور مثال: $x_2=4, x_3=12, \dots$ در بین 2001 جمله ی ابتدایی این دنباله از x_0 تا x_{2000} چند مضرب ۳ داریم؟

الف) ۹۹۹ ب) ۱۰۰۰ ج) ۱۰۰۱ د) ۱۵۰۰ ه) ۱۵۰۱

۲۱) چند عدد صحیح $n \geq 2$ وجود دارد که به ازای هر n عدد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n گزاره ی شرطی زیر برقرار باشد؟

$$x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n+x_nx_1 \leq 0 \Rightarrow x_1+x_2+\dots+x_n=0$$

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۲۲) در یک صفحه ی شطرنج 13×79 یک خانه را مناسب می نامیم. اگر با حذف آن خانه بتوان مابقی خانه های صفحه س شطرنج را با موزاییک های 2×1 پر کرد. تعداد خانه های مناسب این صفحه ی شطرنج چند تاست؟ (موزاییک ها می توانند افقی یا عمودی قرار گیرند).

الف) ۳۱۷ ب) ۴۲۹ ج) ۵۱۴ د) ۶۲۰ ه) ۷۱۶

۲۳) یک بازی ۷ نفره، بین امین، سلمان، علی، بابک، آرش، رضا و داود که به ترتیب دور یک دایره نشسته اند، انجام می شود. ابتدا هر کدام تعدادی کارت دارند. تعداد کل کارت های بین آن ها ۶ تاست. بازی از امین شروع می شود و به ترتیب سلمان، علی، ...، رضا، داود، سلمان، ... بازی می کنند. در هر مرحله کسی که نوبتش است اگر بیش از یک کارت دستش باشد ۱ کارت را نگه می دارد و بقیه ی کارت ها را به کسی که نوبت بعدی را دارد می دهد. کسی که هیچ وقت کارتی به او نرسد برنده است. (اگر ۶ نفر دقیقاً ۱ کارت داشته باشند و نفر هفتم بدون کارت باشد با انجام بازی وضعیت تغییر نمی کند.) تعداد حالاتی را بیابید که امین برنده شود.

الف) ۱۳۸ ب) ۸۸ ج) ۱۴۲ د) ۱۳۲ ه) ۱۳۰

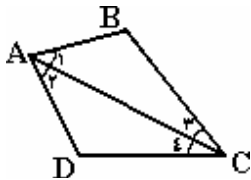
۲۴) کدام یک از اعداد زیر به صورت $a^2 - b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$ قابل بیان هستند؟

الف) ۱۶، ۱۳۷۹، ۲۰۰۱ (ب) ۱۶، ۲۰۰۱، ۹۸

ج) ۱۴، ۱۳۷۹، ۲۰۰۱ (د) ۲۰۰۱، ۶۶، ۹۸

ه) ۱۶، ۶۶، ۹۸

۲۵) مساحت چهارضلعی زیر چقدر است اگر $\angle A_1 + \angle C_2 = 90^\circ$ و $\angle A_1 + \angle C_4 = 30^\circ$ و $AB=4$, $BC=8$, $CD=9$, $DA=5$.



الف) ۲۸

ب) ۲۹

ج) $18 + 10\sqrt{2}$

د) $10 + 9\sqrt{2}$

ه) $9 + 10\sqrt{2}$

۲۶) فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد. تعداد جواب های طبیعی معادله $a^2 + b^2 = c^2$ چند تا است؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) k (د) $(k-1)^2$ (ه) $k-1$

۲۷) تعداد جواب های معادله $3xy - y - 5x = 13$ که $x, y \in \mathbb{N}$ برابر است با

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) بی نهایت

۲۸) چند عدد حقیقی مانند a وجود دارد که در معادله $y^2 - 2ay + a^2 = 0$ صدق می کند؟

$$\left[\frac{a}{2} \right] + \left[\frac{a}{3} \right] + \left[\frac{a}{5} \right] = a$$

([x] برابر با بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x است.)

الف) ۱۰ (ب) ۱۵ (ج) ۳۰ (د) ۶۰ (ه) بی نهایت

۲۹) یک عدد ۱۰ رقمی را جالب می گوئیم اگر تمام ارقام آن متفاوت باشند و بر ۱۱۱۱۱ بخش پذیر باشد. چند عدد ۱۰ رقمی جالب وجود دارد؟

الف) ۲۰۴۸ (ب) ۴۰۹۶ (ج) ۳۴۵۶ (د) ۳۸۴۰ (ه) هیچ کدام

۳۰) عدد طبیعی n را یک عدد « مثلثی » می گوئیم اگر بتوان هر مثلث دل خواه را به n مثلث متساوی الساقین افراز کرد (این n مثلث تنها می توانند روی محیط با هم اشتراک داشته باشند). کدام یک از اعضای مجموعه ی {۴،۶،۷،۱۰} مثلثی هستند؟

الف) هیچ کدام از این اعداد مثلثی نیستند.

ب) ۷

ج) ۴، ۶ و ۱۰

د) ۴

ه) همه ی این اعداد مثلثی هستند.