به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۷۹

۱. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

حاصل‌جمع اعداد سطرهای با شماره‌ی فرد ۱ و سطرهای با شماره‌ی زوج صفر است پس مجموع کل اعداد برابر تعداد سطرهای با شماره‌ی فرد است و چون ۶۹۰ عدد فرد از ۱ تا ۱۳۷۹ موجود است جمع کل اعداد ۶۹۰ می‌شود .

۲. صورت سوال ایراد دارد!

چرا که اگر منظورش ساخت یکی از آن شکل‌ها بود باید تعداد چوب کبریت‌ها 6k+4 می‌بود و اگر منظورش مجموعه‌ی این شکل‌ها بود باید تعداد چوب کبریت‌ها مساوی $\sum_{i=1}^{k} 6i + 4 = 6\frac{k(k+1)}{2} + 4k = 3k^2 + 7k$ می‌بود ولی معادله‌ی $3k^2 + 7k = 500$ جواب ندارد.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

مطمئناً حداقل ۶ جعبه لازم است چرا که هیچ دو تایی از اعداد ۱,۲,۴,۸,۱۶,۳۲ نمی‌توانند در یک جعبه باشند. دسته‌بندی زیر نشان می‌دهد که ۶ جعبه کافی هم است.

۱

۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۳۹

۴,۶,۹,۱۰,۱۴,۱۵,۲۱,۲۲,۲۵,۲۶,۳۳,۳۴,۳۵,۳۸

۸,۱۲,۱۸,۲۰,۲۷,۲۸,۳۰

۱۶,۲۴,۳۶,۴۰

۳۲

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

پنج نقطه با مختصات صحیح داریم طبق اصل لانه کبوتری زوجیت مولفه‌ی x سه تا از این اعداد با هم برابر است حال باز هم از بین این سه نقطه دو نقطه موجودند که زوجیت مولفه‌ی yشان نیز برابر است. پس دو نقطه یافتیم که زوجیت مولفه‌ی x شان با هم و y شان نیز با هم برابر است پس وسط این دو نقطه دارای مختصات صحیح است. مثال زیر هم نشان می‌دهد که لزومی ندارد این اتفاق بیش از یکبار بیفتد.

(۱,۱) (۱,۲) (۲,۳) (۲,۴) (۲,۷)

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید به برای هر نقطه‌ی (x,y) روی خط $y = x - ۱$ و $y = -x - ۱$ مقدار $x^۲ - ۴y$ مربع کامل است. زیرا

$$x^۲ - ۴(x - ۱) = x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)^۲$$
$$x^۲ - ۴(-x - ۱) = x^۲ + ۴x + ۴ = (x + ۲)^۲$$

دقت کنید که مطابق شکل اگر نقطه‌ای زیر یکی از این دو خط قرار داشته باشد با توجه به این که $(۰,۲)$ بالای این دو خط است برای حرکت از $(۰,۲)$ و رسیدن به آن نقطه ناچار باید از نقاطی از یکی از این دو خط عبور کنیم. یعنی نقاطی که $y \leq x - ۱$ و یا $y \leq -x - ۱$(معادلاً $y \leq \left|x\right| - ۱$) خوب هستند. بنابراین هر دو زوج $(۲۰۰۰,۱۳۷۹)$ و $(-۱۳۶۱,۷۶۵)$ خوب هستند.

۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

پس $n + 2 = \frac{k^2}{n^2} = (\frac{k}{n})^2$ پس n+2 باید مربع کامل باشد.
و از آن‌جایی که n≤1379 :

پس ۳۶ عدد با این خاصیت داریم.

۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ولی $x^2 + 1 \equiv 1,2,5,3\ (mod\ 7) \ \rightarrow\ 7 \nmid x^2 + 1$

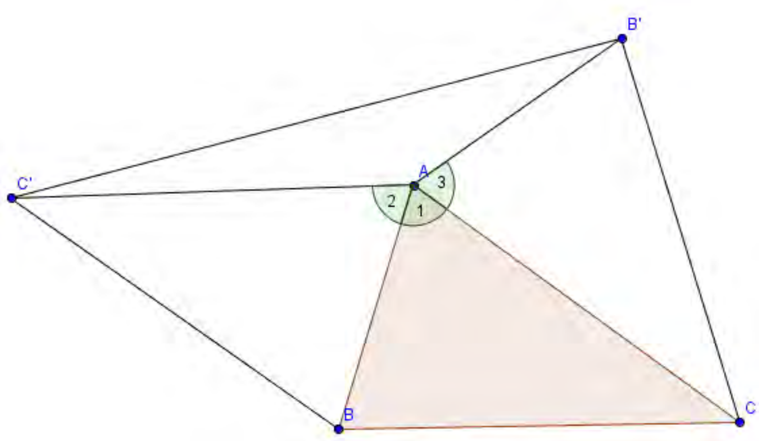
پس *x=7k* با جای‌گذاری در *(1)* دایم: $k(49k^2 + 1) = 5(7k + 3)$ در ضمن *k* ناصفر است(*k=0* نتیجه می‌دهد *x=0* که جواب نیست) پس با تقسیم بر *k* داریم: $49k^2 + 1 = 35 + \frac{15}{k}$ ولی طرف راست این عبارت

حداکثر ۵۰ است و طرف چپ به ازای $k \neq 0,1,-1$ بزرگ‌تر از ۵۰ است و با امتحان این سه مقدار می‌بینیم که فقط k=1 جواب است و در نتیجه فقط x=7 جواب است .

۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

چون c′ و b′ قرینه‌ی c و b اند پس ABC′ و AB′C با ABC هم‌نهشت اند و AC′ برابر AC و AB′ برابر AB است پس داریم: AC′ + AB′ =C′B′ یعنی زاویه‌ی C′AB′ برابر °۱۸۰ است.

و چون A1,A2,A3 با هم برابراند وجمعشان °۱۸۰ است پس هرکدام°۶۰ اند .



۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

این شرط فقط در گزینه‌ی (د) صدق می‌کند.(مثال X=۱۳۷۹ , y=۲۱۶! نشان می‌دهد که این گزینه درست است.)

۱۰. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در هر مرحله گاز زدن m+n(جمع طول و عرض مستطیل) حداقل یک واحد کم می‌شود پس تعداد گاز زدن‌ها حداکثر m+n است در ضمن m+n ممکن است به این صورت که هر بار پایین‌ترین خط افقی را گاز می‌زنیم تا به مستطیلی n×۱ برسیم سپس راست‌ترین خط‌های عمودی را گاز می‌زنیم. ماکزیمم m+n برای گزینه‌ی (ه) به دست می‌آید.

۱۱. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ثابت می‌کنیم برای هر nای این کار امکان‌پذیر است برای n=۱ که به وضوح دو عدد مساوی جواب است برای n=۲ هم اعداد فیثاغورسی موجودند مثلا $12^2 + 5^2 = 13^2$ برای سایر n ها با توجه به رابطه‌ی

روش ساختنی زیر را ارائه می‌دهیم:

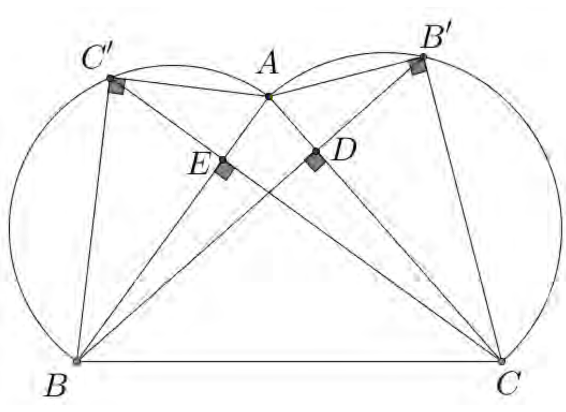
برای مثال x ای که در $2x+1 = 13^2$ صدق می‌کند یعنی ۸۴ را در نظر بگیرید طبق فرمول فوق :

$$84^2 + 13^2 = 85^2 = 84^2 + 12^2 + 5^2$$

وبرای n=4: $85^2 = 2x + 1 \rightarrow x = 3612 \rightarrow 3612^2 + 85^2 = 3613^2$

و همین طور به صورت استقرایی برای تمامی n ها ساخته می‌شود .

۱۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

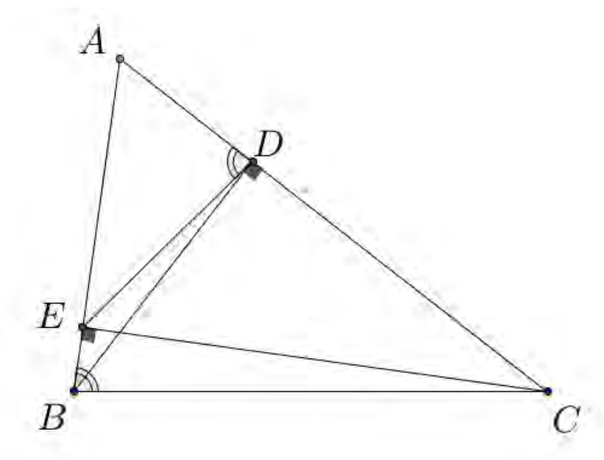


ابتدا دقت کنید که اگر زاویه‌ی A حاده نباشد، ارتفاع‌های یاد شده اصلاً نیم‌دایره‌ها را قطع نمی‌کنند. حال اگر زاویه‌ی A حاده باشد داریم:

$$AB' \perp B'C, AC \perp B'D \Rightarrow AB'^{۲} = AD.AC$$
$$AC' \perp BC', AB \perp C'E \Rightarrow AC'^{۲} = AE.AB$$

به علاوه دقت کنید که $\angle BEC = \angle BDC = ۹۰^\circ$ پس چهارضلعی $BEDC$ محاطی است و بنابراین $AD.AC = AE.AB$ که این با توجه به رابطه‌ی بالا نتیجه می‌دهد $AB' = AC'$.

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.



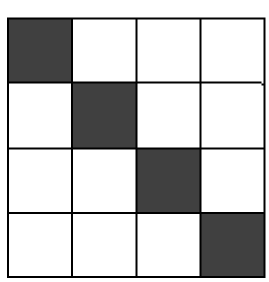
ابتدا دقت کنید که مطابق شکل روبه‌رو داریم:

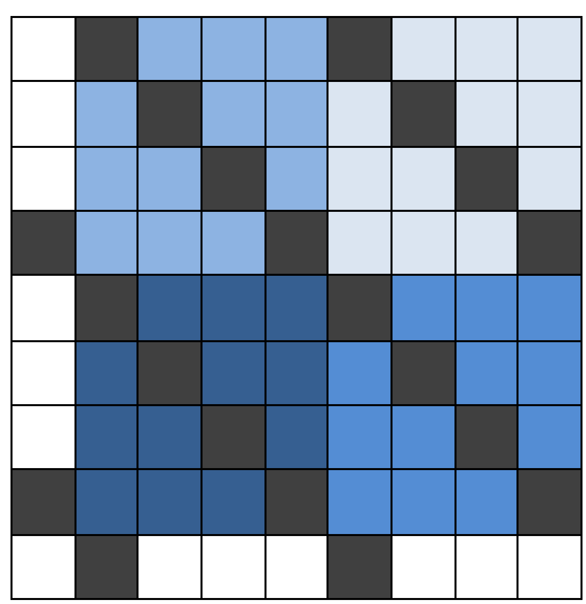
$$\angle BDC = \angle BEC = ۹۰^{\circ}$$

پس چهارضلعی $BEDC$ محاطی است. بنابراین زاویه‌های $\angle ADE$ و $\angle ABC$ برابر هستند که این نتیجه می‌دهد دو مثلث ADE و ABC متشابه هستند که چون $\frac{DE}{BC} = \frac{۱}{۲}$ پس $\frac{AE}{AC} = \frac{۱}{۲}$ و لذا $\cos(\angle A) = \frac{۱}{۲}$ و $\angle A = ۶۰^{\circ}$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

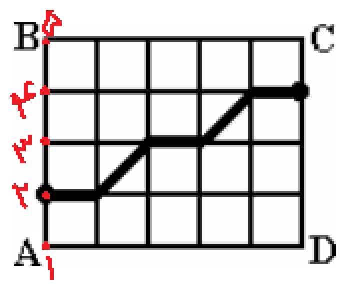
هر جدول ۴×۴ به وضوح حداقل ۴ خانه‌ی سیاه نیاز دارد تا هیچ ۴ خانه‌ی متوالی سفیدی در آن یافت نشود . شکل سمت چپ در زیر یک مثال برای ۴ خانه‌ی سیاه است. هم‌چنین هر سطر یا ستون ۹ تایی برای این که ۴ خانه‌ی متوالی سفید در آن یافت نشود، حداقل ۲ خانه‌ی سیاه نیاز دارد و چون جدول ۹×۹ را می‌توان به ۴ جدول ۴×۴ و دو ردیف ۹ تایی مانند شکل افراز کرد پس حداقل ۴×۴+۲×۲=۲۰ خانه‌ی سیاه نیاز است تا هیچ ۴ خانه‌ی سفید متوالی یافت نشود. شکل زیر نشان می‌دهد که ۲۰ خانه‌ی سیاه برای رسیدن به این هدف کافی هم هست. بنابراین با حداکثر ۱۹ خانه‌ی سیاه نمی‌توان این کار را کرد و حتماً ۴ خانه‌ی متوالی سفید یافت خواهد شد.





۱۵. سؤال اشکال دارد!

چون در هر گام حتماً یک خانه‌ی افقی به سمت راست می‌رویم و فاصله‌ی افقی دو ضلع AB و CD نیز ۵ خانه است پس در کل هر مسیر شامل ۵ گام است.



برای نمونه تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۱ روی AB به نقطه‌ی ۳ روی CD برابر $\binom{5}{2}$ است چرا که باید ۲ تا از حرکات را از نوع اُریب انتخاب کنیم . به همین ترتیب :

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۱ روی AB به ضلع CD : $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۲ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۳ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۴ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۵ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}$

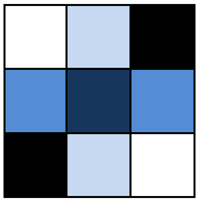
جواب ۸۰ می‌شود که در گزینه‌ها موجود نیست!

۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در کل به 2^9 طریق می‌توان فرش را رنگ کرد که یه سری حالات تکراری هستند:

چون دوران حالت جدیدی به وجود نمی‌آورد، پس بعضی حالات را هرکدام ۴ بار شمرده‌ایم به جز :

- حالاتی که با هر دورانی تغییری نمی‌کنند که تنها یک بار شمرده شده‌اند: در این حالت گوشه‌ها باید با هم هم‌رنگ باشند پس برای رنگ آن‌ها 2 حالت داریم. رنگ خانه‌ی وسط هم ۲ حالت دارد بقیه خانه‌ها هم با هم هم‌رنگ اند پس برای رنگ آن‌ها هم ۲ حالت داریم پس در کل ۲×۲×۲=۸ حالت داریم.
- حالاتی که با دوران ۱۸۰ درجه ثابت می‌مانند و بنابراین دو بار شمرده شده اند: در این حالت هم‌رنگ‌ها در شکل روبه‌رو باید در فرش با هم هم‌رنگ باشند که منجر به ۳۲ حالت می‌شود.



پس تعداد حالاتی که با دوران ۱۸۰ تغییر نمی‌کنند ولی مثلاً با دوران ۹۰ تغییر می‌کنند برابر ۸-۳۲ =۲۴ است.

پس تعداد کل حالت‌ها برابر عبارت زیر است :

$$\frac{۲^۹ - (۲۴ + ۸)}{۴} + ۸ + \frac{۲۴}{۲} = ۱۴۰$$

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

نامساوی حسابی هندسی : $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{\mathrm{xyz}}$

نامساوی حسابی توافقی: $\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{y}}+\frac{1}{\mathrm{z}}}$

نامساوی هندسی توافقی: $\sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{y}}+\frac{1}{\mathrm{z}}}$

بنابر نامساوی حسابی توافقی: $\frac{4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} - \frac{2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$$\rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq \frac{2}{3} \xRightarrow{\text{(نامساوی توافقی هندسی)}} xyz \geq \left(\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)^3 \geq 8$$

(نامساوی حسابی هندسی) $12 = xy + yz + zx \ \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \rightarrow xyz \leq 8$

پس $xyz = 8$ و حالت تساوی نامساوی‌های فوق رخ داده یعنی همه با هم برابر هستند و $x = y = z = 2$

۱۸. گزینه‌های (الف) و (د) هر دو صحیح هستند.

ابتدا فرض می‌کنیم $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ و از آنجایی که همه‌ی a_i ها نمی‌توانند بزرگتر از ۵ باشند (در این صورت مجموع مورد نظر از ۱ کمتر می‌شود) باید داشته باشیم $a_1 \le 5$ پس

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم که

$a_2 \le \frac{1}{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{k})} = \frac{4k}{k-1}$ $(k = 1,2,3,4,5)$ یعنی $a_2 \le 8$ و به همین ترتیب برای بقیه‌ی اعداد نیز کران بالایی پیدا می‌شود، یعنی تعداد جواب‌ها متناهی است.

به علاوه غیر از حالتی که ۵ عدد با هم مساوی هستند، در دیگر حالت‌ها (مثلاً در حالتی که چهارتا از عددها برابر ۸ و یکی برابر ۲ است.) با جای‌گشت اعداد به تعدادی جواب می‌رسیم که مضرب ۵ است. پس در کل تعداد جواب‌های معادله به صورت $۵k + ۱$ است.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید که

$$(a+b+c)^۲ab \ge (a+b)^۲ab \ge ۴a^۲b^۲$$

با نوشتن نامساوی‌های مشابه برای دیگر متغیرها و جمع کردن آن‌ها نامساوی خواسته‌شده برای $k = ۴$ نتیجه می‌شود. پس $k \le ۴$ است و مثال $(a,b,c) = (۱,۱,۰)$ نشان می‌دهد که $k = ۴$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

x_1

پس دقیقاً x های با اندیس زوج مضرب ۳ هستند که ۱۰۰۱ عدد هستند.

۲۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر $n = ۲$، $x_۱ + x_۲ = ۰$ و لذا $x_۱^۲ + x_۲^۲ + ۲x_۱x_۲ = ۰$ پس $x_۱x_۲ + x_۲x_۱ \leq ۰$.

اگر $n = ۳$، $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰$ و لذا $x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + ۲(x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱) = ۰$، بنابراین $x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱ \leq ۰$.

اگر $n = ۴$، $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$ و لذا

$$x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۴ + x_۴x_۱ = (x_۲ + x_۴)(x_۱ + x_۳)$$

که چون جمع دو عدد $x_۱ + x_۳$ و $x_۲ + x_۴$ صفر شده است، حاصل‌ضربشان نامثبت است.

برای $n \geq ۵$ قرار می‌دهیم $x_۱ = x_۲ = -(n - ۲)$ و $x_۳ = \cdots = x_n = ۲$. می‌دانیم مجموع این اعداد برابر صفر است، اما

$$x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + \cdots + x_nx_۱ = (n - ۲)^۲ - ۲(n - ۲) + \underbrace{۴ + \cdots + ۴}_{n-۳} - ۲(n - ۲)$$
$$= n^۲ - ۴n = n(n - ۴) \geq ۵ \times ۱ > ۰$$

پس تنها سه عدد طبیعی دارای این خاصیت هستند.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

صفحه را شطرنجی رنگ می‌کنیم چون تعداد خانه‌ها فرد است از یک رنگ بیش‌تر داریم در ضمن هر موزائیک ۱×۲ از هر رنگ یک خانه را می‌پوشاند. پس اگر صفحه را فرش کرده باشیم از هر دو رنگ به یک تعداد داریم. خانه‌های به آن رنگی که تعدادشان بیش‌تر است همه مناسب اند یعنی ۵۱۴ تا. با یک بررسی ساده و الگویابی می‌توان نشان داد که با حذف هر کدام از این ۵۱۴ خانه بقیه‌ی جدول را می‌توان با موزاییک‌های ۲×۱ پر کرد.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون شرایط در کل برای همه یک‌سان است احتمال برد همه با هم برابر است، پس تعداد حالاتی که امین برنده می‌شود برابر یک هفتم تعداد راه‌های دادن ۶ کارت به ۷ نفر است که برابر $\binom{12}{6} = 942$ است پس جواب مساله برابر ۱۳۲ است.

۲۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

لذا هر عدد فرد یا هر عدد مضرب ۴ ای این خاصیت را دارد. به علاوه با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد مربع کامل بر ۴ برابر ۱ و صفر است، امکان ندارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی که به این صورت قابل نمایش است بر ۴ برابر دو باشد. حال با بررسی گزینه‌ها می‌بینیم که تنها گزینه‌ی (الف) در خواسته‌ی سؤال صادق است.

۲۵. صورت سوال ایراد دارد از آنجایی که BC بزرگ‌تر از AB است زاویه‌ی $\angle A_۱$ بزرگ‌تر از زاویه‌ی $\angle C_۳$ می‌شود، یعنی زاویه‌ی $\angle A_۱$ بزرگ‌تر از ۴۵° می‌شود که این با توجه به شرط اول مسئله امکان ندارد.

۲۶. این مسئله ایراد دارد!

$c-b \Big| c^۲-b^۲$ پس اختلاف b و c توانی از ۲ است پس $c=b+۲^s$ که s یک عدد صحیح نامنفی است.

$$(b+۲^s)^۲-b^۲=۲^{s+۱}(b+۲^{s-۱})=۲^k \Rightarrow b=۲^{k-s-۱}-۲^{s-۱}$$

که برای $s=۱,۲,\ldots,\left\lceil\frac{k-۱}{۲}\right\rceil$ یک جواب طبیعی به ما می‌دهد. پس جواب $\left\lceil\frac{k-۱}{۲}\right\rceil$ است که در گزینه‌ها موجود نیست.

۲۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$۳xy-y-۵x=۱۳ \Rightarrow x=\frac{y+۱۳}{۳y-۵} \Rightarrow \ ۳y-۵ \mid y+۱۳ \Rightarrow \left|۳y-۵\right| \leq y+۱۳$$

دقت کنید که اگر x طبیعی است پس مخرج کسری که با x برابر است یعنی $۳y-۵$ مثبت است و لذا

$$۳y-۵ \leq y+۱۳ \Rightarrow ۲y \leq ۱۸ \Rightarrow y \leq ۹$$

با امتحان کردن yها مشخص می‌شود ۳ جواب $\begin{cases} x = ۱۵\ , y = ۲ \\ x = ۴\ , y = ۳ \\ x = ۱, y = ۹ \end{cases}$ موجود است .

۲۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه حل اول :

$0 \leq \{$

اگر این مقادیر را امتحان کنیم می بینیم برای ۳۰ مقدار زیر درست است :

0,6,10,12,15,16,18,20,21,22,24,25,26,27,28,31,32,33,34,35,37,38,39,41,43, 44,47,49,53,59

راه حل دوم :

فرض کنید $0 \leq r < 30$ که $a = 30k + r$ در این صورت :

یعنی: $31k + \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{5}\right] = 30k + r$ پس : $k = r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right]$

پس برای هر مقدار $0 \leq r < 30$ یک k خواهیم داشت یعنی تعداد جواب‌ها ۳۰ تا است .

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

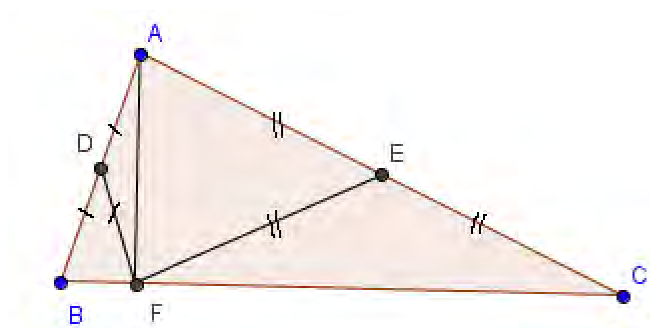
دقت کنید که چون در نمایش یک عدد جالب همه‌ی اعداد ۰،۱،... ، ۹ ظاهر می‌شوند هر عدد جالب باید بر ۹ هم بخش‌پذیر باشد پس هر عدد جالب بر ۹۹۹۹۹ بخش‌پذیر است. حال فرض کنید n عددی جالب باشد و x و y به ترتیب ۵ رقم سمت چپ و سمت راست n باشند. در این صورت $n = ۱۰^۵x + y$. دقت کنید که

$$۰ \equiv n \equiv ۱۰^۵x + y \equiv x + y \ (\text{به پیمانه‌ی } ۹۹۹۹۹)$$

پس $x + y$ باید بر ۹۹۹۹۹ بخش‌پذیر باشد، اما x و y هر دو ۵رقمی و با توجه به متفاوت بودن ارقامشان متمایز هستند، پس $۰ < x + y < ۲ \times ۹۹۹۹۹$. این نتیجه می‌دهد که $x + y = ۹۹۹۹۹$. با توجه به این که در ایجاد مجموع ۹ در یک جمع ده بر یک نداریم پس مجموع هر رقم در x با رقم متناظرش در y برابر ۹ است. پس کافی است پنج رقم x را انتخاب کنیم. برای انتخاب رقم سمت چپ ۹ حالت برای رقم بعدی ۸ حالت و رقم‌های بعدی به ترتیب ۶، ۴ و ۲ حالت داریم. پس در کل تعداد چنین اعدادی $۹ \times ۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲ = ۳۴۵۶$ خواهد بود.

۳۰. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ادعا می‌کنیم عدد ۴ و همه‌ی اعداد طبیعی بیش‌تر یا مساوی ۶ مثلثی هستند. برای ۴ با توجه به این که میانه‌ی وارده بر وتر نصف وتر است شکل زیر را در نظر می‌گیریم.



اگر برای یکی از مثلث‌های درونی شکل بالا این کار را انجام دهیم نتیجه می‌شود که ۷ هم عددی مثلثی است. حال دقت کنید که اگر n مثلثی باشد، می‌توان ابتدا یک ارتفاع مثلث را رسم کرد و به وسیله‌ی روش بالا یکی از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ایجاد شده را به دو مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کرد. به علاوه چون n مثلثی است می‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر را به n مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کرد. پس در کل مثلث به $n + ۲$ مثلث متساوی‌الساقین تقسیم شده است و در نتیجه $n + ۲$ هم مثلثی است.

حال با توجه به این که ۴ مثلثی است و اگر n مثلثی باشد $n+۲$ هم مثلثی است، همه‌ی اعداد زوج بزرگ‌تر از ۲ مثلثی هستند. به علاوه از آن‌جا که ۷ مثلثی است همه‌ی اعداد فرد بزرگ‌تر از ۵ هم مثلثی هستند. پس ادعایمان ثابت شد.