۱) اعداد مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲۰۴۶\}$ را به ۱۰ مجموعه به صورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$A_1 = \{1, 2, 3\}$
$A_2 = \{4, 5, 6, 7\}$
$A_3 = \{8, 9, \ldots, 15\}$
$A_k = \{2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$
$A_{10} = \{1024, \ldots, 2046\}$

تعداد این مجموعه‌ها ۱۰ تا و تعداد اعضای انتخاب شده ۲۱ است. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری، ۳ تا از این اعداد از یک مجموعه انتخاب شده‌اند. این سه عدد را به ترتیب از کوچک به بزرگ c، a و b می‌نامیم. ادعا می‌کنیم که این سه عدد در رابطه‌ی مورد نظر مسأله صدق می‌کنند.

اگر این سه عدد متعلق به A_1 باشند، که به وضوح $bc < 2a^2 < 4bc$.

حال فرض کنید که این سه عدد متعلق به یکی دیگر از مجموعه‌ها باشند. مجموعه‌های A_2،...،A_{10} چه خاصیت جالبی دارند؟ دقت کنید که در همه‌ی این مجموعه‌ها، بزرگ‌ترین عضو مجموعه از دو برابر کوچک‌ترین عضو مجموعه کمتر است. پس برای هر دو عدد مثل x و y در این مجموعه‌ها $x < 2y$. با توجه به این خاصیت و ترتیبی که برای a و b و c قائل شدیم ($c < a < b$)، داریم

$$\left.\begin{array}{l} c < a \\ b < 2a \end{array}\right\} \Rightarrow bc < 2a^2, \quad \left.\begin{array}{l} a < b \\ a < 2c \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 < 2bc \Rightarrow 2a^2 < 4bc$$

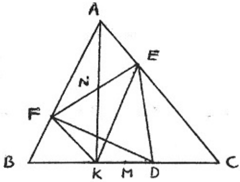
بنابراین $bc < 2a^2 < 4bc$.

۲) ابتدا فرض کنید $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$. M را وسط BC و K را قرینه‌ی D نسبت به M بگیرید. در این‌صورت $BD = KC$ و $DC = BK$ و بنابراین

$$\frac{CK}{KB} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

و در نتیجه طبق قضیه تالس $KE||AB$ و $KF||AC$. پس چهارضلعی $AFKE$ متوازی الاضلاع است، و بنابراین قطرهای این چهارضلعی، یعنی AK و EF،

هم‌دیگر را در نقطه‌ی N نصف می‌کنند.



حالا به مثلث $\overset{\triangle}{AKD}$ توجه کنید. میانه AM از ضلع BC و میانه‌ی DN از ضلع EF، میانه‌های این مثلث نیز هستند و بنابراین مرکز ثقل این مثلث (که آن‌را G می‌نامیم)، AM و DN را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. لذا G مرکز ثقل دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ نیز هست. اثبات طرف عکس نیز مشابه است. فرض کنید مراکز ثقل این دو مثلث بر هم منطبق باشند، بنابراین میانه AM از ضلع BC و DN از ضلع EF، هم‌دیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند. محل برخورد AN با BC را K بنامید. در این صورت چون در مثلث $\overset{\triangle}{AKD}$، AM و DN هم‌دیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم کرده‌اند، لذا باید میانه باشند. پس

$$AN = NK, KM = MD$$

حال با توجه به این‌که $AN = NK$ و $FN = NE$، چهار ضلعی $AFKE$ باید متوازی الاضلاع باشد و لذا $KF||AC$ و $KE||AB$. بنابراین طبق قضیه تالس

$$\frac{AF}{FB} = \frac{CK}{KB} = \frac{CE}{EA}$$

اما ثابت کردیم $KM = MD$، پس $CK = BD$ و $KB = DC$ و رابطه‌ی فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA}$$

۳) مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$ را به روش زیر می‌سازیم:
ابتدا ۸ تا از این مجموعه‌ها را انتخاب کرده و ۱ را در آنها می‌گذاریم، سپس ۸ تای دیگر را (که دقیقاً همان ۸ تای قبل نباشند) انتخاب کرده و ۲ را در آنها می‌گذاریم و به همین ترتیب کار را ادامه می‌دهیم؛ یعنی برای هر یک از اعضای M، مثل a، ۸

تا از این مجموعه‌ها که برای هیچ‌یک از اعضای قبلی دقیقا همین ۸ تا را انتخاب نکرده‌ایم، انتخاب می‌کنیم و a را در این ۸ تا قرار می‌دهیم. چنین کاری قطعاً ممکن است؛ چون تعداد حالاتی که می‌توان ۸ تا از این ۱۶ مجموعه را انتخاب کرد برابر است با $۱۰۰۰۰ < \binom{۱۶}{۸} = ۱۲۸۷۰$. بنابراین می‌توان ۸ مجموعه را برای هر یک از ۱۰۰۰۰ عضو M چنان انتخاب کرد، که این ۸ تایی‌ها برای هیچ دو عضوی یکسان نباشند.

حال واضح است که مجموعه‌های $A_۱, \ldots, A_{۱۶}$ خاصیت مورد نظر را دارند. زیرا برای هر $a \in M$، اگر همان ۸ مجموعه‌ای که a را در آنها قرار داده‌ایم در نظر بگیریم، همه‌ی آنها a را دارند و هیچ چیز مشترک دیگری ندارند، زیرا طبق نحوه‌ی ساختن ما، برای هیچ عضو دیگری، دقیقاً همین ۸ مجموعه را انتخاب نکرده‌ایم.

۴) فرض کنید مجموع اعضای A، B و C برابر k باشد. در این‌صورت

$$۱ + ۲ + \cdots + n = ۳k \Rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲} = ۳k \Rightarrow n(n+۱) = ۶k$$

در این صورت واضح است که n باید به یکی از فرم‌های $۶t$، $۶t+۲$، $۶t+۳$ و $۶t+۵$ باشد. و n نمی‌تواند به فرم‌های $۶t+۱$ و $۶t+۴$ باشد (چون در این‌صورت $n(n+۱)$ مضرب ۶ نخواهد شد). بنابراین لازم است که $n = ۶t, ۶t+۲, ۶t+۳$ یا $۶t+۵$.

حال دقت کنید که اگر n خاصیت مورد نظر را داشته باشد، $n+۶$ هم خاصیت مورد نظر را خواهد داشت. زیرا کافیست اعداد $\{n+۱, \ldots, n+۶\}$ را به سه زوج $(n+۱, n+۶)$، $(n+۲, n+۵)$ و $(n+۳, n+۴)$ دسته‌بندی کرده و هر زوج را به یکی از مجموعه‌های A، B و C اضافه کنید. بنابراین،

چون $n = ۶$، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه $n = ۶t$ها $(t \in N)$ خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون $n = ۸$، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه $n = ۶t+۲$ها $(t \in N)$ خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون $n = ۹$، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه $n = ۶t+۳$ها $(t \in N)$ خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون $n = ۵$، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه $n = ۶t+۵$ها $(t \geq ۰)$ خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

اعداد $۲ + ۰ \times ٦ = ۲$ و $۳ + ۰ \times ٦ = ۳$ هم که به وضوح خاصیت مورد نظر را ندارند. پس، اعدادی که خاصیت مورد نظر مسأله را دارند عبارتند از:

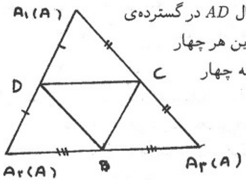
$n = ٦t, t \in N$

$n = ٦t + ۲, t \in N$

$n = ٦t + ۳, t \in N$

$n = ٦t + ۵, t \in N \cup \{۰\}$

۵) چهار وجهی را از رأس A باز کنید. چون مجموع سه زاویه‌ی موجود در هر یک از رئوس B، C و D برابر ۱۸۰° است، گسترده‌ی این چهار وجهی، همان‌طور که در شکل می‌بینید، بصورت یک مثلث خواهد بود، که نقاط B، C و D وسط‌های اضلاع آن هستند (دقت کنید که مثلاً یال AD در گسترده‌ی چهار وجهی دو بار ظاهر می‌شود.) بنابراین هر چهار مثلث موجود در شکل، یعنی هر چهار وجه چهار وجهی، با هم برابرند (چرا؟).



٦) الف) فرض کنید $A = \cdots a_۲a_۱a_۰$.
A ممکن است در جلوی خود تعدادی صفر داشته باشد، a_i را اولین رقم غیر صفر A بگیرید. ابر عدد $B = \cdots b_۲b_۱b_۰$ را به این صورت می‌سازیم:

$$b_n = \begin{cases} ۰ & n < i \\ ۱۰ - a_i & n = i \\ ۹ - a_n & n > i \end{cases}$$

در این صورت واضح است که $A + B = \overleftarrow{۰}$.

ب) مشخص است که رقم یکان A باید فرد و مخالف ۵ باشد. زیرا اگر رقم یکان A زوج و یا ۵ باشد، رقم یکان $A \times B$ نیز یا زوج خواهد شد و یا ۵، و به هر حال ۱ نخواهد شد.

ادعا می‌کنیم که شرط فوق، کافی نیز هست. یعنی اگر $A = \cdots a_۲a_۱a_۰$ و $a_۰$ فرد و $a_۰ \neq ۵$ باشد، در این‌صورت A حتماً وارون ضربی دارد.

برای اثبات ادعای خود سعی می‌کنیم عدد $B = \cdots b_۲b_۱b_۰$ را طوری بسازیم که $A \times B = \overleftarrow{۰}۱$. اولاً چون $a_۰$ فرد و مخالف ۵ است، پس $(a_۰, ۱۰) = ۱$،

در نتیجه $\exists\ 0 \le b_0 \le 9\ :\ a_0 b_0 \overset{10}{\equiv} 1$

به این ترتیب با انتخاب b_0 به صورت فوق، رقم یکان $A \times B$، برابر ۱ خواهد شد.

حال فرض کنید ارقام $b_0، b_1، \ldots، b_k$ را چنان ساخته باشیم که $k + 1$ رقم اول $A \times B$، برابر $1\underbrace{0\ldots00}_{k\text{ تا}}$ باشد. نشان می‌دهیم می‌توان b_{k+1} را طوری انتخاب کرد که $k+2$ رقم اول $A \times B$ برابر $1\underbrace{0\ldots00}_{k+1\text{ تا}}$ باشد.

ابتدا فرض کنید $A \times b_k b_{k-1} \cdots b_0 = \cdots c_{k+2} c_{k+1} \overbrace{00\ldots00}^{k\text{ تا}} 1$

در این‌صورت

$$\begin{aligned} A \times b_{k+1} b_k b_{k-1} \cdots b_0 &= \cdots c_{k+2} c_{k+1} \overbrace{00\ldots00}^{k\text{ تا}} 1 \\ &\quad + 10^{k+1} A \times b_{k+1} \\ &= \cdots c_{k+2} c_{k+1} \overbrace{00\ldots00}^{k\text{ تا}} 1 \\ &\quad + (A \times b_{k+1})\ \ 0\ldots\ \ 00 \end{aligned}$$

رقم یکان $A \times b_{k+1}$ برابر است با باقی‌مانده‌ی $a_0 \times b_{k+1}$ بر ۱۰. بنابراین اگر b_{k+1} را طوری انتخاب کنیم که

$$a_0 \times b_{k+1} + c_{k+1} \overset{10}{\equiv} 0 \qquad (\star)$$

در این‌صورت $k+2$ رقم اول $A \times B$ برابر $1\underbrace{0\ldots00}_{k+1\text{ تا}}$ خواهد شد. برای ارضای معادله‌ی $(\star)$ کافیست b_{k+1} را برابر باقی‌مانده‌ی $-c_{k+1}.b_0$ بر ۱۰ بگیرید. در این صورت

$$a_0 \times b_{k+1} + c_{k+1} \overset{10}{\equiv} a_0(-b_0.c_{k+1}) + c_{k+1}$$

اما b_0 چنان بود که $a_0 b_0 \overset{10}{\equiv} 1$، بنابراین

$$a_0 \times b_{k+1} + c_{k+1} \overset{10}{\equiv} -a_0 b_0.c_{k+1} + c_{k+1} \overset{10}{\equiv} -c_{k+1} + c_{k+1} \overset{10}{\equiv} 0$$

به این ترتیب دیدیم که دنباله‌ی $b_۰، b_۱، b_۲، \ldots$ را می‌توان طوری گسترش داد که ارقام اول $A \times b_{k+۱} \ldots b_۰$ برای هر $k \in N$ برابر $۱ \underbrace{۰ \ldots ۰۰}_{k+۱ \text{ تا}}$ شوند، پس

$$A \times B = \cdots ۰۰۰ \ldots ۰۱ = \overleftarrow{۰}۱$$

ج) سعی می‌کنیم ابر عددهای ناصفر $A = \cdots a_۲ a_۱ a_۰$ و $B = \cdots b_۲ b_۱ b_۰$ را طوری بسازیم که همه ارقام حاصل‌ضرب $C = A \times B = \cdots c_۲ c_۱ c_۰$ برابر صفر باشد.

می‌گیریم $a_۰ = ۵$ و $b_۰ = ۲$، در این‌صورت $c_۰ = ۰$. حال می‌خواهیم a_nها و b_nها را بگونه‌ای پیدا کنیم که برای هر n، $c_n = ۰$. این کار را به شیوه‌ی استقرایی انجام می‌دهیم. به حاصل‌ضرب $A \times B$ توجه کنید؛

$$\begin{array}{r} \ldots r_۳ r_۲ ۱ \\ \ldots a_۳ a_۲ a_۱ ۵ \\ \times \ldots b_۳ b_۲ b_۱ ۲ \\ \hline \ldots c_۳ c_۲ c_۱ ۰ \end{array}$$

که در بالای هر طبقه ده بر یک نقلی از طبقه‌ی قبل را نوشته‌ایم. یکان $A \times B$ که با انتخاب $a_۰ = ۵$ و $b_۰ = ۲$ صفر می‌شود و البته ۱ ده بر یک برای رقم دهگان ایجاد می‌کند.

رقم دهگان $A \times B$ برابر است با باقی‌مانده‌ی $۲a_۱ + ۵b_۱ + ۱$ بر ۱۰. پس برای صفر کردن $c_۱$ باید $۰ \leq a_۱, b_۱ \leq ۹$ را چنان پیدا کنیم که

$$۲a_۱ + ۵b_۱ + ۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

مثلاً کافیست قرار دهیم $a_۱ = ۲$ و $b_۱ = ۱$.

حال فرض کنید a_iها و b_iها را برای $i < n$ طوری ساخته‌ایم که برای $i < n$، $c_i = ۰$؛ و سعی می‌کنیم a_n و b_n را طوری پیدا کنیم که رقم بعدی C، یعنی c_n هم صفر شود. اما c_n برابر است با باقی‌مانده‌ی عبارت زیر بر ۱۰ (چرا؟)

$$۵b_n + a_۱ b_{n-۱} + \cdots + a_{n-۱} b_۱ + ۲a_n + r_n$$

که در آن r_n رقم نقلی از طبقه‌ی قبلی است. باید نشان دهیم اعداد $۰ \leq a_n, b_n \leq ۹$ موجودند، به طوری که

$$۵b_n + ۲a_n \overset{۱۰}{\equiv} -(a_۱ b_{n-۱} + \cdots + a_{n-۱} b_۱ + r_n) = c$$

اگر $c = 2k$، می‌گیریم $b_n = 0$ و $a_n \overset{10}{\equiv} k$.
اگر $c = 2k + 1$، می‌گیریم $b_n = 1$ و $a_n \overset{10}{\equiv} k - 2$.
به این ترتیب می‌توانیم ابر عددهای ناصفر A و B را طوری تکمیل کنیم که برای هر n، $c_n = 0$.