راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۸

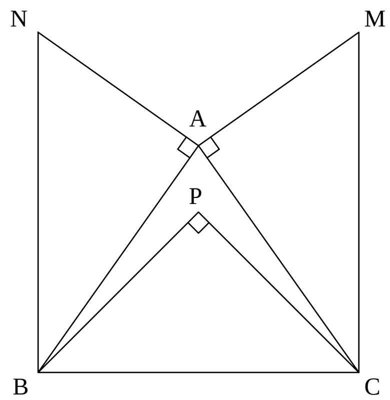
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. خیر وجود ندارد. فرض کنید $a = 2^m$ و $b = 2^n$ دو توان ۲ باشند که رقمهای آنها یکسان باشند. بدون کم شدن از کلیت مسأله، فرض کنید که $m < n$. چون $a < b$ و تعداد رقمهای a و b در نمایش ده‌دهی آنها برابر است، پس $\frac{b}{a} < 10$ و درنتیجه، $2^{n-m} < 10$. پس $n - m$ یکی از اعداد ۱، ۲، یا ۳ خواهد بود. اما چون رقمهای a و b یکسان هستند، پس a و b به پیمانه‌ی ۹ همنهشت‌اند؛ یعنی

$$9 | b - a = 2^m(2^{n-m} - 1)$$

اما چون ۹ و ۲ نسبت به‌هم اول‌اند، پس باید $9|2^{n-m} - 1$. اما با توجه به اینکه $n - m \in \{1, 2, 3\}$، چنین چیزی ممکن نیست.

۲. فرض کنید که $R(X, \alpha)$ دوران حول نقطه‌ی X به اندازه‌ی زاویه‌ی α را نشان دهد.



توجه کنید که $T = R(P, 90^\circ) \circ R(A, 90^\circ)$ دورانی به اندازه‌ی 180° حول نقطه‌ای مانند E است. پس $T \circ T$ تابع همانی است. یعنی

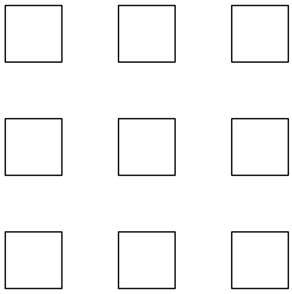
$$R(P, 90^\circ) \circ R(A, 90^\circ) \circ R(P, 90^\circ) \circ R(A, 90^\circ)(Q) = Q$$

حال اثر سمت چپ تساوی را بر نقطه‌ی N پیدا می‌کنیم. روشن است که $R(A,90^\circ)(N) = B$، $R(P,90^\circ)(B) = C$ و $R(A,90^\circ)(C) = M$. پس،

$$R(P,90^\circ)(M) = N$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳. فرض کنید که درختها در صفحه‌ی مختصات، در نقطه‌های (i,j) که $0 \leq i,j \leq 99$ قرار گرفته باشند. درختها را مطابق شکل به گروههای چهارتایی تقسیم می‌کنیم.



یعنی هر گروه از چهار درخت

$$(2i,2j),(2i,2j+1),(2i+1,2j),(2i+1,2j+1), \quad 0 \leq i,j \leq 49$$

تشکیل شده است. روشن است که دو درخت که در یک گروه قرار داشته باشند یکدیگر را می‌بینند. پس از هر گروه حداکثر یک درخت را می‌توان قطع کرد. پس حداکثر ۲۵۰۰ درخت را می‌توان قطع کرد که خاصیت مورد نظر مسأله برقرار بماند.

اکنون نشان می‌دهیم که می‌توان ۲۵۰۰ درخت را قطع کرد به‌طوری که از محل هر یک از درختهای قطع شده نتوان درخت قطع شده‌ی دیگری را دید. برای این کار کافی است درختهایی که مختصات آنها را از دو عدد زوج تشکیل شده است، یعنی درختهای $(2i,2j)$ به ازای $0 \leq i,j \leq 49$. فرض کنید که $(2i,2j)$ و $(2i',2j')$ محل دو درخت قطع شده باشند. تعریف کنید

$$a = 2i - 2i', \quad b = 2j - 2j'$$

فرض کنید بزرگترین توانهای ۲ را که a و b را می‌شمارند به‌ترتیب با m و n نشان دهیم. اگر $a = 0$ قرار دهید $m = \infty$. و اگر $b = 0$ قرار دهید $n = \infty$. فرض کنید $m \leq n$. در این‌صورت نقطه‌ی $(\frac{a}{2^m}, \frac{b}{2^m})$ نقطه‌ای با مختصات صحیح است که دست‌کم یکی از مختصهای آن عددی فرد است. اما توجه کنید که نقطه‌ی $(2i' + \frac{a}{2^m}, 2j' + \frac{b}{2^m})$ روی پاره‌خطی قرار دارد که دو نقطه‌ی $(2i,2j)$, $(2i',2j')$ را به‌هم وصل می‌کند و دست‌کم یکی از مختصهای آن عددی فرد است.

۴. ادعای کلی‌تر زیر را به استقرا ثابت می‌کنیم:
برای عدد طبیعی n، همه‌ی اعدادی که می‌توان آنها را به شکل

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}, \quad (1 \leq i \leq n, a_i \in \mathbb{N})$$

نمایش داد عبارتند از ۱، ۲، . . . و $\frac{n(n+1)}{2}$.
روشن است که اگر x را بتوان به‌صورت بالا نمایش داد، از $a_i \geq 1$ نتیجه می‌شود

$$x \leq 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

برای اثبات عکس این مطلب، از استقرا استفاده می‌کنیم. درستی حکم به‌ازای $n = 1$ روشن است. فرض کنید حکم به‌ازای $n - 1$ درست باشد. پس اگر $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$، آنگاه k را می‌توان به‌صورت

$$k = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{n-1}{a_{n-1}}$$

نمایش داد. اما اگر قرار دهیم $a_n = 1$، نتیجه می‌شود

$$k + n = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{n}{a_n}$$

و چون $n + 1 \leq k + n \leq \frac{n(n+1)}{2}$، پس همه‌ی اعداد طبیعی مانند k را که $n + 1 \leq k \frac{n(n+1)}{2}$ می‌توان به‌صورت بالا نمایش داد. کافی است نشان دهیم که اعداد ۱، ۲، . . . و n را نیز می‌توان به شکل بالا نشان داد. برای $k = 1$ نمایش زیر به‌دست می‌آید:

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{2}{2n} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

به‌ازای $2 \leq k \leq n$ تعریف کنید،

$$a_{k-1} = 1, \quad a_i = (n-1)i, \quad i \neq k-1$$

پس،

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{a_1} + \tfrac{2}{a_2} + \cdots + \tfrac{n}{a_n} &= \tfrac{k+1}{a_{k-1}} + \sum_{i \neq k-1} \frac{i}{a_i} \\
&= k - 1 + \sum_{i \neq k-1} \frac{i}{(n-1)i} \\
&= k - 1 + \tfrac{n-1}{n-1} \\
&= k
\end{aligned}$$

۵. مثلثهای $A'B'C'$ و ABC که اضلاع موازی دارند، متشابه و درنتیجه متجانس‌اند. یعنی خطهای AA'، BB' و CC' در نقطه‌ای مانند K همرس‌اند. فرض کنید

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \lambda$$

فرض کنید که P_1 محل تلاقی KP و $A'B'$ باشد. چون AB و $A'B'$ موازی‌اند، نتیجه می‌شود

$$\frac{KP_1}{PP_1} = \frac{KP_1}{KP - KP_1} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

بنابراین، اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{[KAB']}{[KA'PB']} = \frac{[KAB']}{[KA'B'] + [A'PB']} = \lambda$$

به همین ترتیب،

$$\frac{[KB'C']}{[KB'QC']} = \frac{[KC'A']}{[KC'RA']} = \lambda$$

بنابراین،

$$\frac{[A'B'C']}{[PQR]} = \frac{[KA'B] + [KB'C'] + [KC'A']}{[KA'PB'] + [KB'QC'] + [KC'RA']} = \lambda$$

که حکم مسأله را اثبات می‌کند.

۶. ادعا می‌کنیم که حداقل تعداد نقاط به‌دست آمده برابر $۲n - ۳$ است. ابتدا ثابت می‌کنیم که دست‌کم $۲n - ۳$ نقطه به‌وجود می‌آید. اثبات را در دوگام انجام می‌دهیم:

گام نخست. نقاط $A_۱$، ...، A_n روی یک خط قرار دارند.

نقطه‌ی دلخواه O را روی این خط به‌عنوان مبدأ و یک جهت را به‌عنوان جهت محور انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که نقاط فوق متناظر با اعداد حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n شوند. بدون کم شدن از کلیت مسأله، می‌توان فرض کرد که $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$. اما چون

$$\frac{a_۱ + a_۲}{۲} < \frac{a_۱ + a_۳}{۲} < \cdots < \frac{a_۱ + a_n}{۲} < \frac{a_۲ + a_n}{۲} < \cdots < \frac{a_{n-۱} + a_n}{۲}$$

نقاط وسط پاره‌خطهای $A_۱A_۲$، ...، $A_۱A_n$، $A_۲A_n$، ... و $A_{n-۱}A_n$، $۲n - ۳$ نقطه‌ی متمایزند.

گام دوم. خط l را در صفحه طوری انتخاب می‌کنیم که تصویر نقاط A_i بر l متمایز باشند. برای این کار کافی است خط l را چنان بگیریم که بر هیچ یک از خطوط A_iA_j عمود نباشد. اگر $B_۱$، ... و B_n تصویرهای نقاط $A_۱$، ... و A_n بر l باشند، بنابر استدلال گام نخست، وسطهای B_iB_j ها دست‌کم $۲n - ۳$ نقطه را مشخص می‌کنند. پس وسطهای A_iA_jها نیز دست‌کم $۲n - ۳$ نقطه را مشخص می‌کنند.

همچنین اگر $A_۱$، ... و A_n را نقاط متناظر با اعداد ۱، ۲، ... و n روی خط راست بگیریم، هر نقطه قرمز مختصی به‌صورت $\frac{a}{۲}$ خواهد داشت که $۳ \leq a < ۲n - ۱$. پس $۲n - ۳$ نقطه‌ی قرمز وجود دارد.