پاسخ مرحله اول «هجدهمین دوره» المپیاد ریاضی کشور

۱ ـ ب

فقط دنباله‌ی ۲۰ , ۱۸ , ۱۵ , ۱۴ , ۹ , ۷ , ۶ , ۲ , ۱ مشتمل به هیچ سه‌تایی که تشکیل تصاعد عددی بدهند نیست. برای حالت‌هایی که $a \in \{10, 11, 12, 13\}$ مثال‌های نقض زیر را می‌آوریم.

$a = 10$	۲ , ۶ , ۱۰	۲ , ۱۰ , ۱۸	۱۰ , ۱۵ , ۲۰	
$a = 11$	۲ , ۱۱ , ۲۰	۷ , ۹ , ۱۱	۷ , ۱۱ , ۱۵	
$a = 12$	۲ , ۷ , ۱۲	۶ , ۹ , ۱۲	۶ , ۱۲ , ۱۸	۹ , ۱۲ , ۱۵
$a = 13$	۱ , ۷ , ۱۳	۶ , ۱۳ , ۲۰		

۲ ـ د

$$a_3 = pa_2 + qa_1 \Rightarrow 14 = 5p + 2q \qquad (1)$$

$$a_4 = pa_3 + qa_2 \Rightarrow 41 = 14p + 5q \qquad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $p = 4 \ , \ q = -3$

در نتیجه: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

$$a_5 = 4a_4 - 3a_3 = (4\times41) - (3\times14) = 122$$

$$a_6 = 4a_5 - 3a_4 = (4\times122) - (3\times41) = 365$$

۳ ـ د

مبین p مثبت است پس $b^2 - 4ac$ در نتیجه $b^2 - 4ac \geq 1$ زیرا a و b و c صحیح هستند. p دو ریشه‌ی متمایز بین صفر و یک دارد بنابه روابط بین ریشه‌ها و ضرایب داریم: $0 < \frac{c}{a} < 1$ و $\frac{b}{a} < 0$

با توجه به مثبت بودن a داریم: $a > c > 0$ و $b < 0$. از طرفی چون a مثبت است مقدار $p(x)$ در دو سر بازه‌ی $(0 , 1)$ مثبت خواهد بود به‌ویژه $p(1) > 0$ در نتیجه $a+c > -b$. طرفین این نامساوی مثبت هستند که اگر آنها را مجذور کنیم داریم: $a^2 + 2ac + c^2 > b^2$. در نتیجه $(a - c)^2 > b^2 - 4ac$ که مجدداً از آنجاکه a و b و c صحیح هستند نتیجه می‌گیریم که: $a - c \geq 2$. یعنی $c \leq a - 2$

اینک اگر $a \leq 4$ بگیریم تنها سه حالت ممکن خواهد بود:

$$\begin{matrix} a = 4 \\ c = 2 \end{matrix} \Rightarrow 4 > b^2 - 32 > 0$$

$$\begin{matrix} a = 4 \\ c = 1 \end{matrix} \Rightarrow 9 > b^2 - 16 > 0$$

$$\begin{matrix} a = 3 \\ c = 1 \end{matrix} \Rightarrow 4 > b^2 - 12 > 0$$

ولی در هیچ‌کدام از حالت‌های فوق مقدار صحیحی برای b به‌دست نمی‌آید و در نتیجه $a \geq 5$ می‌باشد که در این حالت مشکلی پیش نمی‌آید و چند جمله‌ای $5x^2 - 5x + 10$ برای حالت $a = 5$ و چندجمله‌ای $6x^2 - 5x + 1$ برای حالت $a = 6$ در شرایط موردنظر صدق می‌کنند.

۴ـ ج

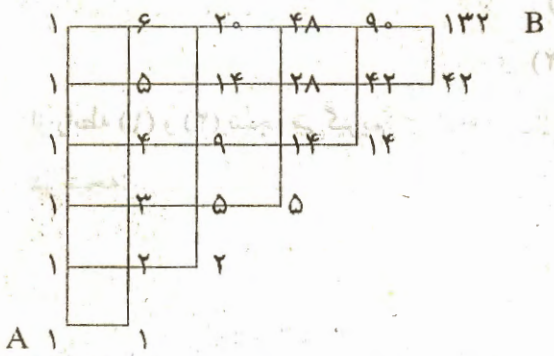
بنابر قوت داریم:

$$\begin{cases} 3a = 2(a+4) \Rightarrow a = 8 \\ ax = 4(a+2) \Rightarrow 8x = 40 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

۵ـ ب

در این دنباله همواره $a_n \overset{3}{\equiv} 1$. در بین گزینه‌های داده شده فقط عدد ۷۸۶۴۲۷ به هنگ ۳ با ۱ هم‌نهشت می‌باشد پس تنها این عدد می‌تواند در بین a_i ها ظاهر شود.

۶ـ ب



توجه کنید که برای هر سه‌تایی X ـــ Y ـــ Z تعداد مسیرهای مورد قبول از A به X برابر تعداد راه‌های A به Y به اضافه‌ی تعداد راه‌های از A به Z است و چون در ردیف اول عددهای سست داده شده ۱ است (تعداد راه‌های A به آنها ۱ است) با پرکردن جدول به عدد ۱۳۲ می‌رسیم.

۷ـ د

برای به‌دست آوردن جواب مسئله کافی است با توجه به اصل شمول و عدم شمول تعداد مقسوم‌علیه‌های هر سه عدد را با هم جمع کرده بعد تعداد مقسوم‌علیه‌های ب.م.م دو به‌دوی آنها را از مجموع به‌دست آمده کم کرده و در انتها تعداد مقسوم‌علیه‌ها مشترک هر سه عدد را به حاصل اضافه نماییم.

$12^{50} = 2^{100} \times 3^{50} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 101 \times 51$

$45^{20} = 5^{20} \times 3^{40} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 21 \times 41$

$50^{100} = 2^{100} \times 5^{200} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 101 \times 201$

$(12^{50}, 45^{20}) = 3^{40} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(12^{50}, 45^{20}) = 41$

$(۱۲^{۵۰}, ۵۰^{۱۰۰}) = ۲^{۱۰۰}$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۱۲^{۵۰}, ۵۰^{۱۰۰})$ = ۱۰۱

$(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}) = ۵^{۲۰}$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰})$ = ۲۱

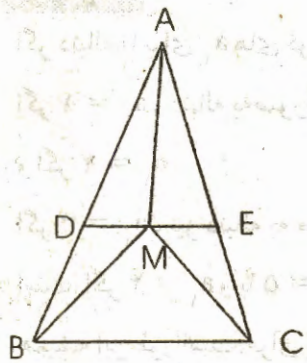
$(۴۱^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}, ۱۲^{۵۰}) = ۱$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}, ۱۲^{۵۰})$ = ۱

در نتیجه جواب مسئله برابر است با:

$$(۱۰۱\times۵۱) + (۲۱\times۴۱) + (۱۰۱\times۲۰۱) - (۱۰۱+۴۱+۲۱) + ۱ = ۲۶۱۵۱$$

۸ـ ب

چون اگر DE || BC داریم:



$$MC < ME + EC$$

$$MB < MD + BD$$

$$MA < \max\{AD , AE\}$$

$$DE < \min\{AD , AE\}$$

با جمع زدن ۴ نامساوی فوق داریم:

$$MA + MB + MC < AB + AC$$

(در راه حل فوق فرض شده است که BC کوچکترین ضلع مثلث است.)

۹ـ د

$a = ۱$, $b = ۴$

نمی‌توان چنین زنجیره‌ای یافت.

دو حالت داریم $\begin{cases} ۱ \to ۲ \to X \\ ۱ \to ۳ \to X \end{cases}$

الف) تک تک عوامل a را حذف می‌کنیم و تک تک عوامل k را اضافه می‌کنیم.

ب) یک سری اعداد اول خیلی بزرگ درنظر می‌گیریم (بزرگتر از همه‌ی b_i ها). a را در یکی از آنها ضرب می‌کنیم و بعد عوامل a را کم کم حذف می‌کنیم و عوامل $b_۱$ را جایگزین می‌کنیم و در آخرین مرحله، آن عامل اولِ خیلی بزرگ را برمی‌داریم تا به $b_۱$ برسیم. به همین روش می‌توان از $b_۱$ به $b_۲$ رسید تا .....

ج) چون تکرارشدن اشکالی ندارد، می‌شود ابتدا از ۱ به ۲ رفت و بعد به ۱ برگشت. از ۱ به ۳ رفت و بعد دوباره به ۱ برگشت و به همین شکل در هر مرحله از ۱ به b می‌رویم (طبق الف) و بعد به ۱ برمی‌گردیم ... پس همه‌ی جملات این دنباله را در a ضرب می‌کنیم.

د) با روشی که در ابتدای قسمت (ج) گفتیم، زنجیره‌ای نامتناهی شامل همه‌ی اعداد به‌دست می‌آید.

۱۰ـ ج

ثابت می‌کنیم که L هیچ یک از اعداد فرد را نمی‌تواند بگیرد در حالی‌که کلیه‌ی اعداد زوج بین ۱ تا ۱۰ را می‌تواند بگیرد.

اینکه L زوج است بدیهی است چون داریم: $\sum f_i = \sum (a_i - i) = ۰$

پس $\sum_{i=1}^{1999} (f_i)$ زوج است و چون مجموع فرد عدد، یک عدد زوج شده حتماً یکی از آنها زوج است پس L که حاصلضرب این اعداد است هم باید زوج شود همچنین بدیهی است که L تمام مقادیر زوج را می‌گیرد چون کافی است جایگشت $(1998, 1999) = (2k+4, 2k+5)(2k+2, 2k+3)(1, 2, 3, \ldots, 2k+1)$ را درنظر بگیریم مقداری که برای این جایگشت به‌دست می‌آید 2k است پس کلیه‌ی مقادیر زوج بین ۱ تا ۱۰ را می‌توان پوشاند. پس L می‌تواند با ۵ تا از اعداد ۱ تا ۱۰ مساوی شود.

۱۱ - ج

اگر دنباله را برای a_1 های کوچک بنویسیم متوجه‌ی نکته‌ای می‌شویم:

اگر $a_1 = 1$، دنباله به‌صورت روبرو است: $1, 2, 3, 2, 3, \ldots$

و اگر $a_1 = 2$ $2, 3, 2, 3, \ldots$

اگر $a_1 = 3$، نیز دنباله به صورت $3, 2, 3, 2, \ldots$

است. اگر $a_1 = 4$ و یا $a_1 = 5$ باز هم به تناوب ۳ , ۲ در دنباله خواهیم رسید. پس می‌توانیم حدس بزنیم که همیشه این‌طور است. برای اثبات حدس، از استقرا استفاده می‌کنیم.

برای $a_1 \leq 3$ حکم در بالا، ثابت شد. حالا اگر حکم برای $1 \leq a_1 \leq n$ درست باشد $(n \geq 3)$ آن را برای $a_1 = n+1$ ثابت می‌کنیم. اگر $n+2$ اول نباشد داریم

$$a_2 \leq \frac{n+2}{2} \leq n$$

پس دنباله‌ای که از a_2 شروع می‌شود، متناوب خواهد شد (بنابر فرض استقرا) پس این اتفاق برای a_1 هم خواهد افتاد.

اگر $n+2$ اول باشد آنگاه $n+3$ اول نخواهد بود (چون $n \geq 3$) پس

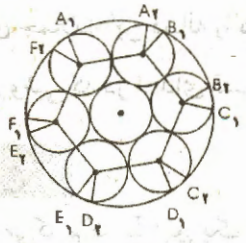
$$a_2 = n+2 \ , \ a_3 \leq \frac{n+3}{2} \leq n$$

با استقرا، حکم ثابت است.

یعنی تمام اعداد، خوبند!

۱۲ - د

محیط کش را می‌توان به ۶ پاره‌خط مماس بر دوایر که طول هر کدام ۲ می‌باشد و ۶ کمان که روی هم یک دایره به شعاع یک می‌سازند تقسیم کرد.



$$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2} = \overline{D_1D_2} = \overline{E_1E_2} = \overline{F_1F_2} = 2$$

$$X = \overset{\frown}{A_2B_1} + \overset{\frown}{B_2C_1} + \overset{\frown}{C_2D_1} + \overset{\frown}{D_2E_1} + \overset{\frown}{E_2F_1} + \overset{\frown}{F_2A_2} = 2\pi$$

در نتیجه طول کش برابر است با:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} + \overline{D_1D_2} + \overline{E_1E_2} + \overline{F_1F_2} + X = 6 \times 2 + 2\pi = 12 + 2\pi$$

۱۳ - الف و ب

هم گزینه‌ی (الف) و هم گزینه‌ی (ب) جواب است (هرچند قرار است فقط یک گزینه جواب باشد!)

نادرستی گزینه‌ی (الف):

C C A B B

A A B C C

B B C A A

بیشتر مردم C را بر A ترجیح می‌دهند ⟵ ولی { بیشتر مردم A را بر B ترجیح می‌دهند ؛ بیشتر مردم B را بر C ترجیح می‌دهند }

نادرستی گزینه‌ی (ب):

A A A B B

B B B C C

C C C A A

A رئیس نمی‌شود { امتیاز A = ۱۱ ؛ امتیاز B = ۱۲ } { بیشتر مردم A را بر B ترجیح می‌دهند ؛ بیشتر مردم A را بر C ترجیح می‌دهند }

(ج):

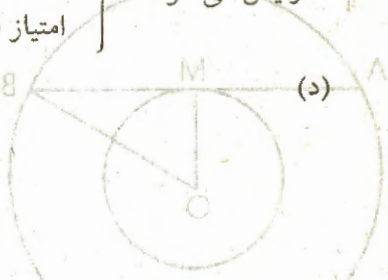
A A B B C

B B A A A

C C C C B

A رئیس می‌شود { امتیاز A = ۱۲ ؛ امتیاز B = ۱۱ } کمتر از نصف مردم A را هم بر B و هم بر C ترجیح می‌دهند.

(د)



C B B

A S C ⟵ B رئیس می‌شود

B C A

(هـ) B B A A A تک مرحله‌ای ⟵ B رئیس می‌شود

C C B B B

A A C C C دو مرحله‌ای ⟵ A رئیس می‌شود

۱۲ ـ هـ

قرار دهید: $c = b + ۱$. در نتیجه داریم:

$$a^۲ + b^۲ = (b + ۱)^۲ + ۳ \Rightarrow a^۲ = ۲b + ۴$$

پس اگر $a = 2k$ داریم: $4k^2 = 2b + 4$

یعنی $b = 2k^2 - 2$ و با فرض $c = b + 1 = 2k^2 - 1$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} a = 2k \\ b = 2k^2 - 2 \\ c = 2k^2 - 1 \end{cases}$$ به‌ازای هر $k \in N$ این جواب‌ها برای (a,b,c) در معادله صدق می‌کنند پس این معادله بی‌نهایت جواب دارد.

$$(2k)^2 + (2k^2 - 2)^2 = (2k^2 - 1)^2 + 3$$

۱۵ ـ د

صفحه را به صورت ستونی سیاه و سفید (یکی در میان) رنگ می‌کنیم. چون مربع ۲×۲، و مستطیل‌های سطری ۱×۴ به تعداد مساوی از خانه‌های سفید و سیاه را می‌پوشانند، پس تعداد مستطیل‌های ۱×۴ ستونی که تماماً در خانه‌های سفید قرار دارند با آنهایی که کاملاً در خانه‌های سیاه قرار می‌گیرند، برابر است. پس تعداد کل مستطیل‌های ۱×۴ ستونی زوج است.

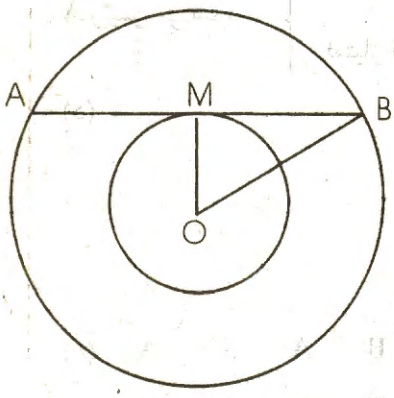
با همین استدلال، تعداد کل مستطیل‌های ۱×۴ سطری هم زوج است پس $n^2 - 1$ که تعداد مستطیل‌های ۱×۴ است زوج است، یعنی n فرد است.

حالا نشان می‌دهیم برای n های فرد، می‌توان این کار را کرد.

در واقع پوشاندن یک مستطیل ۲×۲n (که n فرد است) به وسیله‌ی یک مربع ۲×۲ و $n-1$ مستطیل ۱×۴ ساده است. پوشاندن مستطیل ۴×۲n با مستطیل‌های ۱×۴ هم ساده است و چون n فرد است پس با کنار هم گذاشتن یک مستطیل ۲×۲n و تعدادی مستطیل ۴×۲n، مربع ۲n×۲n حاصل می‌شود.

۱۶ ـ ج

فرض کنید شعاع دایره‌ی کوچک r و شعاع دایره‌ی بزرگ R باشد.



$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = r$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OM}^2 = R^2 - r^2 = 49 \qquad (1)$$

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $S = 49\pi$

۱۷ ـ الف

ماکزیمم وقتی می‌شود که:

الف) هیچ دانش‌آموزی بیش از یک بار اول نشود.

ب) ۳۵ محل از رتبه‌ی دوم تا ششم، در ۷ آزمون، با ۸ دانش‌آموز (غیر رتبه اول) که هر کدام حداقل ۴ بار ظاهر می‌شوند پرگردد.

رتبه \ آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	T	U	V	W	X	Y	Z
۲	A	B	C	D	E	F	G
۳	H	A	B	C	D	E	F
۴	G	H	A	B	C	D	E
۵	F	G	H	A	B	C	D
۶	E	F	G	H	—	—	—

پس حداکثر ۱۵ دانش‌آموز می‌توانند جایزه بگیرند.

۱۸ ـ ج

به کمک اتحاد زیر داریم:

$$a + b = c \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2$$

(اثبات: با توان رساندن به‌دست می‌آید.)

پس چون $a + b = c$ داریم:

$$A = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2} = \frac{2(a^2 + ab + b^2)^2}{a^2b^2} = 2\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{ab}\right)^2$$

امّا $\frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \geq 3$ زیرا $(a - b)^2 \geq 0$. پس

$$A \geq 2 \times 9 = 18$$

برای حالت تساوی قرار می‌دهیم: $a = b = 1 \ , \ c = 2$

۱۹ ـ الف

$$f_m = \underbrace{11 \ldots . 1}_{m \text{ بار}}$$

$$m \geq 2 \Rightarrow f_m \overset{4}{\equiv} 11 \overset{4}{\equiv} 3 \qquad (1)$$

$$x \in N \Rightarrow \begin{cases} x^2 \overset{4}{\equiv} 0 \\ x^2 \overset{4}{\equiv} 1 \end{cases} \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که برای $m \geq 2$ تساوی $f_m = x^2 + y^2$ نمی‌تواند برقرار باشد حالت $m=1$ نیز واضح است.

۲۰ ـ الف

داریم: $1 + 2 + 3 + \ldots + 61 = \frac{61 \times 62}{2} = 61 \times 31$

در ردیف موردنظر عدد سومی را a و عدد آخری را b می‌نامیم. می‌خواهیم a را پیدا کنیم: با توجه به فرض مسأله داریم:

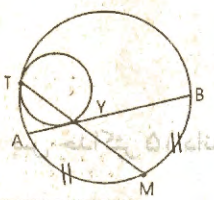
$a \mid ۶۱+۱ = ۲\times۳۱$ و $b \mid ۱+۲+ \ldots + ۶۱-b \Rightarrow b \mid ۱+۲+ \ldots + ۶۱ = ۶۱\times۳۱$

چون ۶۱ و ۳۱ هر دو عدد اولند به‌دست می‌آید:

$(a = ۲$ یا $a = ۳۱)$ و $(b = ۶۱$ یا $b = ۳۰)$

اما $b = ۶۱$ **قابل قبول** نیست زیرا ۶۱ قبلاً در خانه‌ی اول آمده پس به‌دست می‌آید $b = ۳۱$. حالا که خانه‌ی آخر یعنی b برابر **۳۱ شد** پس $a = ۳۱$ هم امکان ندارد پس $a = ۲$ جواب موردنظر می‌باشد.

۲۱ - ج



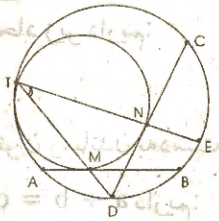
با توجه به شکل و بنابر قضیه‌ای می‌دانیم:

$$AM = BM$$

پس TM از C یعنی وسط AB می‌گذرد.

و طبق استدلال فوق اگر E وسط کمان DC باشد، E و N و T روی یک خط هستند پس:

کمان‌های $BE = y$ و $DE = z$ و $AC = CB = x$ را در نظر می‌گیریم داریم:



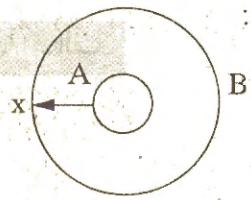
$$\begin{cases} x = ۳۰^\circ \\ z = x+y = ۳۰+y \\ y+z = ۶۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y = ۱۵^\circ \\ x = ۳۰^\circ \\ z = ۴۵^\circ \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{۲} = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵^\circ$$

۲۲ - د

فرض کنید $r < \frac{۱}{۴}$ (مقدار دقیق آن را بعداً مشخص خواهیم کرد.)

اگر علی‌مردان خان روی دایره‌ای به مرکز وسط حوض و شعاع r بچرخد، سرعت‌زاویه‌ای‌اش از عباس‌قلی‌خان بیشتر خواهد بود. پس می‌تواند کاری کند که وضعیت روبرو رخ دهد:



A، علی‌مردان خان و B، عباس‌قلی‌خان است. حال اگر علی‌مردان خان مستقیم به سمت x شنا کند باید مسیری به طول $r - ۱$ را طی کند. عباس قلی‌خان هم برای رسیدن به نقطه x باید مسیری به طول π را طی کند. نشان می‌دهیم r را می‌توان طوری انتخاب کرد که $\pi > ۴(۱-r)$. یا به عبارتی $r > ۱ - \frac{\pi}{۴}$. برای وجود چنین r‌ای باید داشته باشیم $۱ - \frac{\pi}{۴} < \frac{۱}{۴}$. یعنی $\pi > ۳$. که این هم درست است.

۲۳ - الف

با استقرا نشان می‌دهیم که اگر n یعنی تعداد تخمه‌ها به‌صورت $۳k$ باشد نفر دوم برنده است و در غیر این‌صورت نفر اول برنده خواهد بود.

برای $n = ۱$ و $n = ۲$ واضح است که نفر اول برنده خواهد بود.

برای $n = ۳$ اگر نفر اول یک تخمه بردارد، نفر دوم ۲ تخمه برمی‌دارد و اگر نفر اول ۲ تخمه بردارد نفر دوم یک تخمه برخواهد داشت پس برای $n = ۳$ نفر دوم برنده خواهد بود.

حال فرض می‌کنیم که حکم برای اعداد ۱ تا $۳k$ برقرار باشد ما حکم را برای اعداد $۳k+۱$ و $۳k+۲$ و $۳(k+۱)$ ثابت می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که حکم به‌ازای هر n برقرار است.

اگر تعداد تخمه‌ها $3k+1$ باشد نفر اول یعنی A، ۱ تخمه برمی‌دارد. در وضعیت جدید تعداد تخمه‌ها $3k$ می‌باشد و A نفر دوم خواهد شد و شخص B نفر اول می‌باشد پس طبق فرض استقرا A برنده می‌شود.
اگر تعداد تخمه‌ها $3k+2$ باشد نفر اول یعنی A، ۲ تخمه برمی‌دارد. در وضعیت جدید تعداد تخمه‌ها $3k$ می‌باشد و A نفر دوم خواهد شد و B نفر اول می‌باشد و طبق فرض استقرا A برنده می‌شود.
اگر تعداد تخمه‌ها $3(k+1)$ باشد نفر اول یعنی A اگر ۱ یا ۲ و یا ۵ تخمه بردارد در وضعیت جدید به‌ترتیب $3k+2$ یا $3k+1$ یا $3(k-1)+1$ تخمه باقی می‌ماند و چون در این وضعیت A نفر دوم و B نفر اول است طبق فرض استقرا B برنده خواهد شد.
پس طبق استقرای حکم برای هر n برقرار می‌باشد و گزینه‌ی (الف) گزینه‌ی صحیح می‌باشد.

۲۴ ـ د

داریم:

$$(x+y)(y+z) = xy + xz + y^2 + yz = xz + y(x+y+z) = xz + \frac{1}{xz}$$

و با توجه به اینکه $(\sqrt{xz} - \frac{1}{\sqrt{xz}})^2 \geq 0$ نامساوی $xz + \frac{1}{xz} - 2 = (\sqrt{xz} - \frac{1}{\sqrt{xz}})^2 \geq 0$ برقرار می‌باشد پس حداقل مقدار عبارت $(x+y)(y+z)$ برابر ۲ است.

۲۵ ـ ه

نشان می‌دهیم که یک سؤال کافی است. توجه کنید که $2^7 = 128 > 100$
پس اگر $1 \leq a \leq 100$، p عددی اول و $p^k \mid a$ آنگاه $k \leq 7$. حال اگر $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰ باشند. m را به‌صورت روبرو تعریف می‌کنیم: $m = p_1^7 p_2^7 \ldots p_n^7$
واضح است که $(n, m) = n$
پس کافی است در اولین سؤال عدد m را بگوییم.

۲۶ ـ د

می‌توان هر کارگر را با یک نقطه نمایش داد و در صورتی که دو کارگر دوست باشند نقطه‌های متناظر آنها را به‌هم وصل کرد. با این کار یک گراف به‌دست می‌آید، که شامل یک یا چند مؤلفه همبندی است. مثال زیر نشان می‌دهد که گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) نادرست هستند.

عباس قلی‌خان

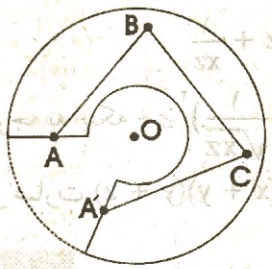
توجه کنید که میانگین حقوق همه‌ی کارگرها $\frac{9}{5}$ است.
حال نشان می‌دهیم که (د) درست است. در واقع حقوق افراد یک مؤلفه همبندی گراف، مقدار ثابتی است. فرض کنید در یک مؤلفه بیشترین مقدار حقوق M باشد. حقوق رأس‌های متصل به این رأس از M تجاوز نمی‌کند و در ضمن میانگین این مقدار هم M است. پس حقوق همه دوستان این کارگر M است. با تکرار همین کار نتیجه می‌شود که حقوق همه افراد یک مؤلفه همبندی برابر M است.

۲۷ ـ ج

از دو نقطه‌ی متقاطع بی‌نهایت دایره‌ی عظیمه می‌گذرد. پس گزینه‌ی (الف) نادرست است. اگر سه نقطه روی یک دایره‌ی عظیمه باشند تشکیل یک مثلث با سه زاویه‌ی 180° می‌دهد که مجموع زوایای آن 540° است. اگر مثلثی کوچک روی کره رسم کنیم، مجموع زوایای آن نزدیک 180° است. پس گزینه‌ی (ب) نیز نادرست است. با توجه به نکته‌ی اخیر نادرست بودن گزینه‌ی (د) هم نتیجه می‌شود. توجه کنید که وقتی مساحت مثلث به صفر نزدیک شود مجموع زوایای آن به 180° نزدیک می‌شود.

اگر کمی دقت کنید می‌بینید که هر سه نقطه نشان دهنده‌ی دو مثلث بر روی کره هستند. این دو مثلث با هم سطح کره را می‌پوشانند و مجموع زاویه‌های دو مثلث روی هم، $3\times360^\circ$ یعنی 1080° است. حال اگر مساحت یکی از این دو به صفر نزدیک شود مجموع زوایایش به 180° نزدیک می‌شود و همیشه از این مقدار بیشتر است. در این وضعیت مجموع زوایای مثلث دیگر به $180^\circ - 1080^\circ$ یعنی 900° نزدیک می‌شود و همیشه از این مقدار کمتر است. پس گزینه (ه) صحیح است.

۲۸ ـ ب

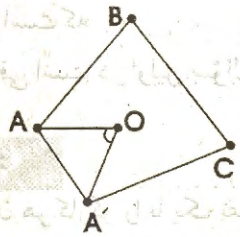


اگر ABC مثلثی باشد که دور رأس مخروط چرخیده با پاره‌کردن مخروط و مسطح کردن آن به شکل روبرو می‌رسیم.

توجه کنید که با این کار طول خم‌ها تغییر نمی‌کند و در نتیجه شبه‌خطها به خط تبدیل می‌شوند. (A و A' در واقع یک نقطه روی مخروط ناقص هستند.)

با انجام کار اخیر مثلثی مثل Δ_1 به یک مثلث معمولی تبدیل می‌شد. پس مجموع زوایای Δ_1، 180° است (گزاره ۱)

حال نشان می‌دهیم مجموع زوایای ABC، $\pi + \theta$ است که $\theta = \hat{AOA'}$. (θ مستقل از مثلث است).



$$\text{مجموع زوایای ABC} = \hat{BAO} + \hat{OA'C} + \hat{B} + \hat{C}$$
$$= \hat{BAA'} - \hat{OAA'} + \hat{AA'C} - \hat{AA'O}$$
$$+ \hat{B} + \hat{C} = 2\pi - \hat{OAA'} - \hat{AA'O}$$
$$= \pi + \theta$$

پس گزاره ۲ نیز صحیح است.

۲۹ ـ ب

$$N * S = (V * P) * S = V * (P * S) = V * Q = T$$

پس قرینه‌ی T نسبت به محور xها، محل برخورد NS با منحنی است. پس محل سوم برخورد NS، قرینه‌ی T یعنی S است. یعنی NS در S بر منحنی مماس است پس (الف) صحیح است.

به‌علاوه

$$(U * P) * T = ((Q * S) * P) * (P * Q') = Q * (S * P) * P * Q'$$
$$= Q * Q * P * Q' = (Q * Q') * P * Q'$$
$$= (\infty * P) * Q = P * Q = S$$

پس (ج) هم درست است.

(د) هم درست است چراکه مماس در P عمودی است و اگر در Q مماس عمودی باشد، Q و قرینه‌ی Q برهم

منطبق‌اند و لذا Q همان P است.

اگر $A * X = A * Y = Z$ آنگاه قرینه Z را Z' بنامید. پس AZ' خم را در نقطه X و Y قطع می‌کند پس X و Y قرینه‌ی Z' نسبت به A هستند که یکتا است پس $X = Y$ حال

$$A^{۷} = A^{۱۱} \Rightarrow A^{۷} * \infty = A^{۷} * A^{۴} \Rightarrow \infty = A^{۴}$$

$$A^{۱۵} = A^{۲۰} \Rightarrow A^{۱۵} * \infty = A^{۱۵} * A^{۵} \Rightarrow \infty = A^{۵}$$

$$\Rightarrow A^{۴} = A^{۵} \Rightarrow A^{۴} * \infty = A^{۴} * A \Rightarrow \infty = A$$

پس (هـ) هم درست است.

اما اگر مماسی بر منحنی در Q از $U * P$ بگذرد مماس در Q' از قرینه‌ی $U * P$ می‌گذرد و لذا

$$Q' * Q' = U * P$$

$$U * P = Q * S * P = Q * Q \Rightarrow Q' * Q' = Q * Q$$

یعنی مماس در Q همان مماس در Q' است و این تناقض است. پس گزینه غلط (ب) است.

۳۰ ـ هـ

$\infty * A$ را محاسبه می‌کنیم. خط عمودی گذرا از A، خطی است که از ∞ هم می‌گذرد و منحنی را در قرینه‌ی A، یعنی A'، قطع می‌کند. قرینه‌ی A' نسبت به محور xها A است پس $A * \infty = A$. قرار دهید $E = \infty$ تا (الف) نتیجه شود.

برای (ب)، B' را قرینه‌ی B فرض کنید. پس کافی است X چنان باشد که AX، M را در B' قطع کند یا معادلاً AB'، M را در X قطع کند یا $X' = A * B'$ که X' قرینه‌ی X است و این طبق اطلاعات داده شده همیشه یک X می‌دهد.

(ج) در راه حل سؤال ۲۹ نشان داده شد.

اگر $X * X = \infty$، مماس در X از ∞ می‌گذرد پس مماس در X عمودی است و این همان قسمت (د) از سؤال ۲۹ می‌باشد که ثابت شد صحیح است پس همه‌ی گزینه‌ها درست هستند.

کلید پاسخ به سؤالات مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد ریاضی کشور

سال تحصیلی ۷۹-۱۳۷۸