راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. ابتدا حکم را به‌ازای $n = 3$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید x، y و z سه عدد طبیعی باشند و $x < y < z$. قرار دهید

$$\begin{aligned} S &= xy^4 + yz^4 + zx^4 \\ T &= yx^4 + zy^4 + xz^4 \end{aligned}$$

در این‌صورت،

$$\begin{aligned} S - T &= (x-z)y^4 + y\left(z^4 - x^4\right) + xz\left(x^3 - z^3\right) \\ &= (x-z)\left(y^4 - y\left(z^2+x^2\right)(z+x)\ + xz\left(x^2+xz+z^2\right)\right) \\ &= (x-z)\left(y^4 - yz^3 - yz^2x - yzx^2 - yx^3 + x^3z + x^2z^2 + xz^3\right) \\ &= (x-z)\left(y\left(y^3 - x^3\right) + z^3(x-y)\ + x^2z(x-y) + xz^2(x-y)\right) \\ &= (x-z)(x-y)\left(-y\left(x^2+xy+y^2\right)\ + z^3 + x^2z + xz^2\right) \\ &= (x-z)(x-y)\left(-yx^2 - xy^2 - y^3 + z^3 + x^2z + xz^2\right) \\ &= (x-z)(x-y)\left((z-y)\left(z^2+zy+y^2\right) + x^2(z-y) + x\left(z^2-y^2\right)\right) \\ &= (x-z)(x-y)(z-y)\left(z^2+zy+y^2+x^2+xz+yz\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(x-z)(x-y)(z-y)\left((x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2\right) \geq 0 \end{aligned}$$

حال فرض کنید که حکم به‌ازای عدد طبیعی n برقرار باشد و اعداد $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1}$ مفروض باشند. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} S_n &= a_1a_2^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 \\ S_{n+1} &= a_1a_2^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_{n+1}^4 + a_{n+1}a_1^4 \end{aligned}$$

T_n و T_{n+1} نیز به‌همین ترتیب تعریف می‌شوند. روشن است که

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_na_{n+1}^4 + a_{n+1}a_1^4 - a_na_1^4 \\ T_{n+1} &= T_n + a_{n+1}a_n^4 + a_1a_{n+1}^4 - a_1a_n^4 \end{aligned}$$

پس

$$S_{n+۱} - T_{n+۱} = S_n - T_n +$$

$$\left(a_۱ a_n^۴ + a_n a_{n+۱}^۴ + \ a_{n+۱} a_۱^۴ - a_n a_۱^۴ - a_{n+۱} a_n^۴ - a_۱ a_{n+۱}^۴\right)$$

بنابر فرض استقرا $S_n - T_n \geq ۰$ و همچنین، بنابر حالت $n = ۳$ (که در بالا ثابت کردیم) و توجّه به این نکته که $a_۱ < a_n < a_{n+۱}$، جمله‌ی دوّم نیز نامنفی است و بنابراین، حکم به استقرا ثابت می‌شود.

یادداشت. این مسأله در واقع حالت خاصی از قضیه‌ای کلی‌تر در مورد توابع محدّب است. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را محدّب می‌نامیم هر گاه، به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $۰ \leq \alpha \leq ۱$.

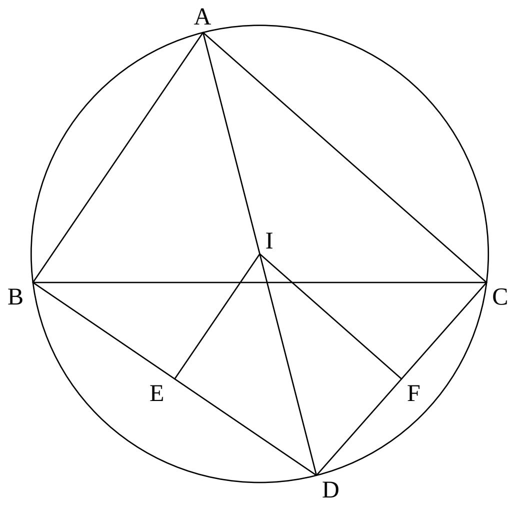
$$f\left(\alpha x + (۱ - \alpha) y\right) \leq \alpha f(x) + (۱ - \alpha) f(y)$$

اکنون با استدلالی مشابه استدلال گفته شده می‌توان ثابت کرد که اگر f تابعی محدّب باشد و $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n$ اعدادی حقیقی باشند، آنگاه

$$x_۱ f(x_۲) + x_۲ f(x_۳) + \cdots + x_n f(x_۱) \geq$$

$$x_۲ f(x_۱) + x_۳ f(x_۲) + \cdots + x_۱ f(x_n)$$

۲. صورت صحیح مسأله: مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. I مرکز دایره‌ی محاطی آن و D نقطه‌ی برخورد AI با دایره محیطی ABC است. فرض کنید E و F به‌ترتیب پای عمودهای وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $IE + IF = \frac{۱}{۲} AD$، زاویه‌ی $\angle BAC$ را پیدا کنید.



راه حل. بنابر قضیه‌ای از هندسه‌ی مقدماتی، $DI = DB = DC$. بنابراین، اگر R شعاع دایره‌ی محیطی ABC باشد،

$$\begin{aligned} IE &= ID \cdot \sin \angle BDI &&= ID \cdot \sin C \\ &= BD \cdot \sin C &&= ۲R \sin \frac{A}{۲} \sin C \end{aligned}$$

به‌همین ترتیب،

$$IF = ۲R\sin\frac{A}{۲}\sin B$$

و

$$AD = ۲R\sin\angle ACD = ۲R\sin\left(C+\frac{A}{۲}\right)$$

بنابر فرض مسأله،

$$۲R\sin\frac{A}{۲}\sin B + ۲R\sin\frac{A}{۲}\sin C = R\sin\left(C+\frac{A}{۲}\right)$$

و بنابراین،

$$\sin\frac{A}{۲}(\sin B+\sin C) = \frac{۱}{۲}\sin\left(C+\frac{A}{۲}\right)$$

قرار می‌دهیم $X = C+\frac{A}{۲}$. با جایگذاری X در معادله‌ی بالا به‌دست می‌آوریم

$$\sin\frac{A}{۲}\left(\sin\left(X+\frac{A}{۲}\right)+\sin\left(X-\frac{A}{۲})\right)\right) = \frac{۱}{۲}\sin X$$

یا

$$۲\sin\frac{A}{۲}\sin X\cos\frac{A}{۲} = \frac{۱}{۲}\sin X$$

و چون $\sin X \neq ۰$، نتیجه می‌شود

$$۲\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

یا $\sin A = \frac{۱}{۲}$ و درنتیجه، $\angle A = ۳۰^\circ$.

۳. دنباله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$a_۱, a_۱+a_۲, a_۱+a_۲+a_۳, \ldots, a_۱+a_۲+\cdots+a_n$$

ادعا می‌کنیم که هیچ دو جمله‌ی این دنباله به پیمانه‌ی n، همنهشت نیستند. در واقع، اگر $i<j$ و

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_i \equiv a_۱+a_۲+\cdots+a_j \pmod n$$

آنگاه، $n|a_{i+۱}+\cdots+a_j$ که خلاف فرض مسأله است. چون دنباله‌ی بالا n عضو دارد، پس این n عضو یک رده‌ی کامل مانده‌های به پیمانه‌ی n را تشکیل می‌دهند. به دلیل مشابه دنباله‌ی

$$a_۲, a_۱+a_۲, a_۱+a_۲+a_۳, \ldots, a_۱+a_۲+\cdots+a_n$$

نیز یک رده‌ی کامل مانده‌های به پیمانه‌ی n است. اما چون جملات دوم به بعد این دو دنباله یکی هستند، پس جملات اول باید به پیمانه‌ی n همنهشت باشند. یعنی، $a_۱ \overset{n}{\equiv} a_۲$. با توجّه به تقارن موجود در مسأله $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n همگی به پیمانه‌ی n، همنهشت‌اند. فرض کنید

$$a_۱ \equiv a_۲ \equiv ۲\cdots \equiv a_n \equiv k \pmod n$$

در این‌صورت، به‌ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $a_i \geq k$. بنابراین،

$$kn \leq a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۲n$$

پس، $k = ۱$ یا $k = ۲$. اگر $k = ۲$، باید برای هر i داشته باشیم $a_i = ۲$ و بنابراین به جواب $(۲, ۲, \ldots, ۲)$ می‌رسیم که به سادگی می‌توان دید که به‌ازای مقادیر فرد n یک جواب است. اگر $k = ۱$، باید $n - ۱$ تا از a_iها برابر ۱ و یکی از آنها برابر $n + ۱$ باشد و به سادگی می‌توان بررسی کرد که برای هر عدد طبیعی مانند n، به تعداد n جواب به‌دست می‌آید:

$$(n + ۱, ۱, ۱, \ldots, ۱)$$

$$(۱, n + ۱, ۱, \ldots, ۱)$$

$$\vdots$$

$$(۱, ۱, ۱, \ldots, n + ۱)$$

۴. ادعا می‌کنیم که n عددی زوج است. در غیر این‌صورت، $d_۱^۲$، $d_۲^۲$، $d_۳^۲$ و $d_۴^۲$ اعدادی فرد خواهند بود و $d_۱^۲ + \cdots + d_۴^۲$ عددی زوج است که با فرد بودن n تناقض دارد. بنابراین، $d_۱ = ۱$ و $d_۲ = ۲$.

اکنون، ادعا می‌کنیم که $d_۳$ یا ۴ است یا عددی اول. در واقع، اگر $d_۳ = ۲^\alpha(۲m + ۱)$، آنگاه $۲m + ۱$ مقسوم علیه n خواهد بود. پس، یا $۲m + ۱ = ۱$ که نتیجه می‌دهد که $d_۳ = ۲^\alpha$ و با توجّه به تعریف $d_۳$ نتیجه می‌شود $d_۳ = ۴$ یا $\alpha = ۰$ که در این صورت، با توجّه به این که $d_۳$ کوچکترین مقسوم علیه n بعد از ۲ است، $d_۳$ باید عددی اوّل باشد.

حالت اوّل. فرض کنید، $d_۳ = ۴$، در این صورت،

$$n = ۱ + ۴ + ۱۶ + d_۴^۲$$

پس، چون $d_۴|n$ و $d_۴|d_۴^۲$ نتیجه می‌شود $d_۴|۲۱$. بنابراین، $d_۴ = ۷$ یا $d_۴ = ۲۱$. به آسانی می‌توان بررسی کرد که جوابهای $n = ۷۰$ و $n = ۴۴۲$ به‌دست آمده، قابل‌قبول نیستند.

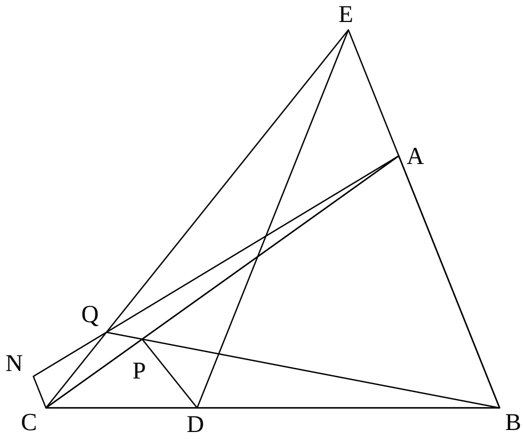
حالت دوم. فرض کنید، $d_۳ = p$ و p عددی اوّل باشد. در این حالت، تساوی $n = ۵ + p^۲ + d_۴^۲$ ایجاب می‌کند که $d_۴$ زوج باشد. پس، $d_۴ = ۴$ یا $d_۴ = ۲p$. اگر $d_۴ = ۴$ آنگاه $d_۳ = ۳$ و $n = ۳۰$ به‌دست می‌آید که قابل‌قبول نیست. پس، $d_۴ = ۲p$. بنابراین،

$$n = ۱ + ۴ + p^۲ + ۴p^۲ = ۵(۱ + p^۲)$$

و چون $p|n$ پس، $p|۵$. بنابراین، $p = ۵$ و جواب $n = ۱۳۰$ به‌دست می‌آید که در معادله‌ی اصلی نیز صدق می‌کند و تنها جواب مسئله است.

۵. بنابر فرض مسأله، چهار ضلعی $ABCQ$ چهار ضلعی محاطی است و در نتیجه،

$$\angle QAC = \angle QBC \qquad (۱)$$



همچنین از

$$\angle AQC + \angle ABC = ۱۸۰^\circ$$

نتیجه می‌شود

$$\angle ABC = \angle CQN$$

در اینجا، N نقطه‌ای روی AQ (نزدیک به Q) است که $QC = QN$. دو مثلث EBD و CQN دو مثلث متساوی‌الساقین هستند که زاویه‌ی رأس آنها نیز مساوی است؛ یعنی، داریم:

$$\angle CNQ = \angle DEB \tag{۲}$$

حال، چون چهار ضلعی $EBDP$ محاطی است،

$$\angle BPD = \angle DEB = \angle CNQ \tag{۳}$$

رابطه‌های (۱) و (۳) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \angle QAC + \angle CNQ &= \angle QBC + \angle DPB \\ ۱۸۰^\circ - \angle NCA &= ۱۸۰^\circ - \angle PDB \\ \angle NCA &= \angle PDB \end{aligned} \tag{۴}$$

حال، از رابطه‌های (۱) و (۴) و تساوی $AC = BD$، نتیجه می‌شود که دو مثلث BDP و ACN برابرند. پس،

$$BP = AN = AQ = QN \tag{۵}$$

و چون $QN = QC$، نتیجه می‌شود $BP = AQ + QC$ که همان حکم مسئله است.

۶. الف) فرض کنید $A = (a_۱, \ldots, a_n)$، $B = (b_۱, \ldots, b_n)$ و $C = (c_۱, \ldots, c_n)$. توجّه کنید که اگر هر سه مؤلفه‌ی a_i، b_i و c_i را تغییر دهیم (یعنی از صفر به یک و از یک به صفر تبدیل کنیم)، در فاصله‌ی دوبه‌دوی این دنباله‌ها تغییری ایجاد نمی‌شود. پس، بدون کم شدن از کلیّت مسئله، می‌توان فرض کرد که $A = (۰, ۰, \ldots, ۰)$. همچنین فرض کنید

$$\begin{aligned} B' &= \{i | ۱ \leq i \leq n, b_i = ۱\} \\ C' &= \{i | ۱ \leq i \leq n, c_i = ۱\} \end{aligned}$$

بنابر فرض مسأله، فاصله‌ی A از B و C به‌ترتیب برابر $|B'|$، $|C'|$ و فاصله‌ی C و B برابر $|B'\Delta C'|$ است ($X\Delta Y$، تفاضل متقارن دو مجموعه، مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی است که درست به یکی از X و Y تعلّق دارند). پس،

$$|B'| = |C'| = |B'\Delta C'| = d$$

فرض کنید

$$x = |B' - C'|, \quad y = |C' - B'|, \quad z = |B' \cap C'|$$

در این‌صورت،

$$x + y = x + z = y + z = d \quad (*)$$

پس، $۳d = ۲(x+y+z)$ و بنابراین، $۳d$ زوج است. درنتیجه d زوج است.

ب) از دستگاه $(*)$، نتیجه می‌شود که

$$x = y = z = \frac{d}{۲}$$

حال اگر قرار دهیم $D' = B' \cap C'$، آنگاه

$$\begin{aligned} |D' \cap B'| &= x = \frac{d}{۲} \\ |D' \cap C'| &= y = \frac{d}{۲} \\ |D'| &= z = \frac{d}{۲} \end{aligned}$$

پس، اگر دنباله‌ی

$$D = (d_۱, \dots, d_n)$$

را چنان بسازیم که $d_i = ۱$ اگر و فقط اگر $i \in D'$، آنگاه، فاصله‌ی D از هر یک از A، B و C برابر $\frac{d}{۲}$ است.