راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۷

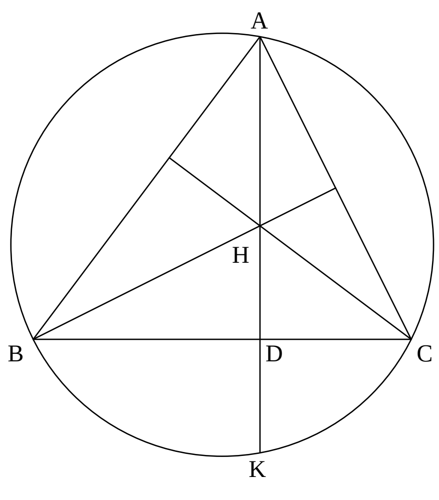
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه (ب) صحیح است.
فرض کنید که عدد $m = ۲^n + n^۲$ عددی اول باشد. روشن است که n باید فرد باشد، چون در غیر این‌صورت m زوج خواهد بود. پس n به پیمانه‌ی ۶ با یکی از اعداد ۱، ۳ یا ۵ همنهشت خواهد بود. اما توجه کنید که اگر $n \overset{۶}{\equiv} ۱$، آنگاه $n = ۶k + ۱$ و درنتیجه،

$$۲^n \overset{۳}{\equiv} \left(۲^۶\right)^k \times ۲ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

همچنین، $n^۲ \overset{۶}{\equiv} ۱$ و بنابراین $n^۲ + ۲^n \overset{۳}{\equiv} ۰$ و m اول نخواهد بود. به‌دلیل مشابه $n \overset{۶}{\equiv} ۵$ نیز رد می‌شود و فقط حالت $n \overset{۶}{\equiv} ۳$ باقی می‌ماند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
محل برخورد AD با دایره‌ی محیطی مثلث را K می‌نامیم.



دقت کنید که چون H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است،

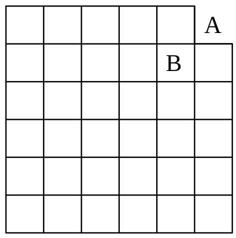
$$\angle HCB = ۹۰^\circ - \angle ABC = ۹۰^\circ - \angle AKC = \angle BCK$$

پس در مثلث HCK، ارتفاع و نیمساز برهم منطبق شده‌اند، و درنتیجه، این مثلث متساوی‌الساقین است. پس $HD = DK$. حال قوت نقطه‌ی D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$P(D) = BD \cdot CD = DK \cdot DA = HD \cdot DA$$

پس $۲ \times ۳ = ۴HD$ و بنابراین، $HD = \frac{۳}{۲}$.

۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید که S_k تعداد مربعهای به‌ضلع k در شکل زیر باشد.



روشن است که چنین مربعی با مشخص شدن راس گوشه‌ی پایین چپ آن به‌طور یکتا مشخص می‌شود. دقت کنید که هر یک از این نقاط مشخص شده جز A در $S_۱$ شمرده می‌شوند. پس $S_۱ = ۶^۲ - ۱$. به‌طور مشابه، هر یک از مربعها غیر از نقاط سطر بالا و ستون راست و همچنین، نقطه‌ی B، در محاسبه‌ی $S_۲$ به حساب می‌آیند. پس $S_۲ = ۵^۲ - ۱$، با استدلال مشابه می‌توان دید که $S_۳ = ۴^۲ - ۱$، ...، $S_۶ = ۲^۲ - ۱$ و $S_۷ = ۱^۲ - ۱$. پس اگر N تعداد کل مربعها را نشان دهد، آنگاه

$$N = \left(۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + ۶^۲\right) - ۶ = \frac{۶ \times ۷ \times ۱۳}{۶} - ۶ = ۸۵$$

یادداشت. استدلال مشابه نشان می‌دهد که اگر به‌جای جدول ۶×۶، جدولی $n \times n$ با یک خانه‌ی حذف شده در گوشه داشته باشیم تعداد مربعها برابر است با

$$N = \frac{n(n-۱)(۲n+۵)}{۶}$$

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اولاً دقت کنید که میله‌ی به‌طول ۱۰ نمی‌تواند در هیچ مثلثی شرکت کند. چون اگر طول اضلاع مثلثی $۱۰ < a < b$ باشند، آنگاه $b - a \geq ۱۰$ و بنابراین، $a + ۱۰ \leq b$. پس $(a, b, ۱۰)$ اضلاع مثلث نیستند. فرض کنید $۲۰ < a < b$ طول اضلاع مثلثی باشند. اگر $a = ۳۰$، آنگاه $b < ۲۰ + a = ۵۰$. پس $b = ۴۰$ و جواب قابل‌قبول $(۲۰, ۳۰, ۴۰)$ به‌دست می‌آید. اگر $a = ۴۰$، آنگاه جواب قابل‌قبول $(۲۰, ۴۰, ۵۰)$ پیدا می‌شود. همین‌طور، اگر $۳۰ < a < b$ طول اضلاع مثلث باشند، لزوماً $a = ۴۰$ و $b = ۵۰$ و جواب قابل‌قبول $(۳۰, ۴۰, ۵۰)$ به‌دست می‌آید. پس در مجموع سه مثلث به کمک این میله‌ها ساخته می‌شوند.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید $y = x + ۱$. در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} x^۲ + y^۲ + (xy)^۲ &= x^۲ + (x+۱)^۲ + (x(x+۱))^۲ \\ &= ۲x^۲ + ۲x + ۱ + (x(x+۱))^۲ \\ &= ۲x(x+۱) + ۱ + (x(x+۱))^۲ \\ &= (x(x+۱)+۱)^۲ \end{aligned}$$

که مربع کامل است.

۶. گزینه (ه) صحیح است.
اگر تعریف کنیم $b_n = a_n + ۱$، آنگاه $b_۰ = ۰$ و به‌ازای $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} b_{n+۱} &= a_{n+۱} + ۱ \\ &= (n+۱)a_n + n + ۱ \\ &= (n+۱)(a_n + ۱) \\ &= (n+۱)b_n \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به $b_0 = 1$ داریم،

$$b_n = nb_{n-۱} = n(n-۱)b_{n-۲} = \cdots = n!$$

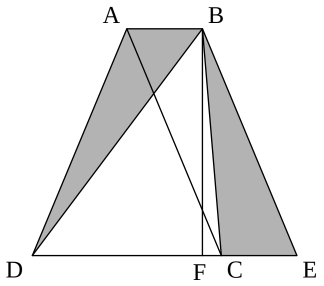
پس $a_n = n! - ۱$. اما دقت کنید که

$$۱۰۱ = ۱ \times ۲ \times \cdots \times ۵۱ \times \cdots \times ۱۰۱$$

بر $۱۰۲ = ۵۱ \times ۲$ بخش‌پذیر است. بنابراین،

$$\begin{aligned} a_{۱۰۱} &\overset{۱۰۲}{\equiv} (۱۰۱)! - ۱ \\ &\overset{۱۰۲}{\equiv} ۱۰۲ - ۱ \\ &\overset{۱۰۲}{\equiv} ۱۰۱ \end{aligned}$$

۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
در ذوزنقه‌ی $ABCD$ فرض کنید که $AC = ۱۳$ و $BD = ۱۵$ و ارتفاع ذوزنقه برابر ۱۲ باشد.



از نقطه‌ی B به موازات قطر AC خطی رسم می‌کنیم تا امتداد قاعده‌ی DC را در نقطه‌ی E قطع کند. چون چهارضلعی $ABEC$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AB = CE$. پس دو مثلث ABD و BCE دارای قاعده و ارتفاع مساوی‌اند. پس مساحت این دو مثلث برابر است. حال اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [ABD] + [BCD] \\ &= [BCE] + [BCD] \\ &= [BDE] \end{aligned}$$

اگر پای عمود وارد از B بر CD را F بنامیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} DE &= DF + EF \\ &= \sqrt{BD^۲ - BF^۲} + \sqrt{BE^۲ - BF^۲} \\ &= \sqrt{۱۵^۲ - ۱۲^۲} + \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} \\ &= ۹ + ۵ \\ &= ۱۴ \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [BDE] \\ &= \tfrac{۱}{۲}(۱۴ \times ۱۲) \\ &= ۸۴ \end{aligned}$$

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
N را به‌صورت زیر تجزیه‌ی می‌کنیم:

$$N = \left(۳^{۲۵۶} + ۱\right)\left(۳^{۱۲۸} + ۱\right)\cdots\left(۳^۲ + ۱\right)\left(۳^۲ - ۱\right)$$

توجه کنید که به‌ازای هر عدد زوج مانند k،

$$۳^k + ۱ \overset{۴}{\equiv} (-۱)^k + ۱ \overset{۴}{\equiv} ۲$$

پس بزرگترین توان ۲ در $۳^k + ۱$ برابر ۲ است. اما چون بزرگترین توان ۲ در $۳^۲ - ۱$ برابر ۳ است، پس بزرگترین توان ۲ در N برابر $۱۱ = ۳ + ۸$ خواهد بود.

یادداشت. استدلالی مشابه استدلال بالا نشان می‌دهد که به‌ازای $n \geq ۳$، توان ۲ در $۳^{۲^n} - ۱$ برابر $n + ۲$ است.

۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید $a_۰ = ۰$ و به‌ازای $i \geq ۱$، $a_i = ۱ + ۲ + \cdots + i = \frac{i(i+۱)}{۲}$. با توجه به اینکه روی قطر i ام دقیقاً i عدد می‌آیند، به آسانی می‌توان دید که قطر i ام با عدد $a_{i-۱} + ۱$ شروع می‌شود و با عدد a_i پایان می‌پذیرد. همچنین برای مقادیر زوج i، اولین عدد در قطر i ام در سطر اول و برای مقادیر فرد i، اولین عدد در قطر i ام، در ستون اول ظاهر می‌شود.

ابتدا قطری را که عدد ۱۳۷۷ در آن قرار دارد پیدا می‌کنیم. باید مقدار i را پیدا کنیم که $a_{i-۱} + ۱ \leq ۱۳۷۷ \leq a_i$. توجه کنید که اگر

$$\frac{i(i-۱)}{۲} + ۱ \leq ۱۳۷۷ \leq \frac{i(i+۱)}{۲}$$

آنگاه

$$۴i^۲ - ۴i + ۸ \leq ۱۱۰۱۶ \leq ۴i^۲ + ۴i$$

نابرابری سمت چپ به‌صورت $(۲i-۱)^۲ \leq ۱۱۰۰۹$ یا $۲i - ۱ < ۱۰۴$ یا $۲i - ۱ \leq ۱۰۳$ در می‌آید. پس $i \leq ۵۲$. نابرابری سمت راست به‌صورت $(۲i+۱)^۲ \geq ۱۱۰۱۷$ یا $۲i + ۱ > ۱۰۴$ یا $۲i + ۱ \geq ۱۰۵$ در می‌آید. پس $i \geq ۵۲$. بنابراین، $i = ۵۲$. چون $a_{۵۲} = ۱۳۷۸$ پس ۱۳۷۷ عدد یکی مانده به‌آخر در قطر ۵۲ ام است. اما چون ۵۲ زوج است، پس آخرین عدد در این قطر در ستون اول و سطر ۵۲ ظاهر می‌شود. بنابراین عدد ۱۳۷۷ در این جدول در ستون دوم و سطر ۵۱ ظاهر شده است.

۱۰. گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که عدد طبیعی n را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت اگر و فقط اگر n فرد باشد و یا $۴|n$. در واقع، با توجه به رابطه‌های

$$\begin{aligned} ۲k + ۱ &= (k+۱)^۲ - k^۲ \\ ۴k &= (k+۱)^۲ - (k-۱)^۲ \end{aligned}$$

هر یک از اعداد به‌صورت بالا را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت. همچنین اگر $n = x^۲ - y^۲ = (x-y)(x+y)$، بسته به آن که x و y زوجیت یکسان یا متفاوت داشته باشند، عدد n فرد و یا مضرب ۴ خواهد بود.

پس کافی است اعداد به‌صورت $۴k + ۲$ در مجموعه‌ی $\{۱۳۷۷, \ldots, ۱۹۹۹\}$ را حذف کنیم. اما

$$۱۳۷۷ \leq ۴k + ۲ \leq ۱۹۹۹$$

آنگاه

$$۳۴۴ \leq k \leq ۴۹۹$$

پس باید ۱۵۶ عدد از بین $۱۹۹۹ - ۱۳۷۶ = ۶۲۳$ عدد را حذف کنیم و ۴۶۷ عدد باقی می‌ماند.

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

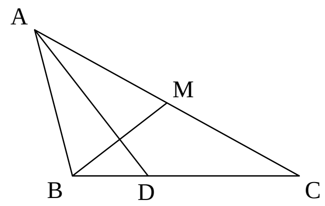
دو تا از عددها را x و y می‌نامیم اگر مجموع اعداد قبل و بعد از حذف x و y را به‌ترتیب با S و S' نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$S' = S + |x-y| - x - y \overset{۲}{\equiv} S + x - y - x - y \overset{۲}{\equiv} S$$

پس چون $۱ + ۲ + \cdots + ۱۳۷۷$، یعنی ۱۳۷۷×۶۸۹، عددی فرد است و زوجیت S هربار ثابت می‌ماند، پس عدد نهایی باید فرد باشد. گزینه‌ی (ج) نادرست است. توجه کنید که دنباله‌ی ۱، ۲، ...، $i + ۴$ را می‌توان با سه‌گام به دنباله‌ی ۱، ۲، ...، i تبدیل کرد. برای این کار ابتدا $i + ۴$ و $i + ۳$ و سپس $i + ۲$ و $i + ۱$ را حذف می‌کنیم و در گام سوم دو عدد ۱ به‌دست آمده را حذف می‌کنیم. با تکرار این کار می‌توان به دنباله‌ی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ رسید. اگر فرایند حذف i و j را با $\xrightarrow{ij}$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

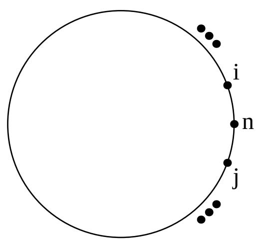
$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \xrightarrow{۱۵} ۲, ۳, ۴, ۴ \xrightarrow{۲۴} ۲, ۳, ۴ \xrightarrow{۲۳} ۱, ۴ \xrightarrow{۱۴} ۳$$

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید AD نیمساز زاویه‌ی A و BM میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد و $AD \perp BM$.



در مثلث ABM، ارتفاع و نیمساز نظیر رأس A برهم منطبق شده‌اند. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و $AM = AB$. پس $AC = ۲AB$. بنابراین اگر $x + ۱$، x و $x - ۱$ طول اضلاع مثلث باشند، یکی از این سه عدد دو برابر دیگری است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که این فقط وقتی امکان دارد که $x = ۳$. پس اضلاع مثلث ۲، ۳، ۴ و محیط مثلث برابر ۹ است.

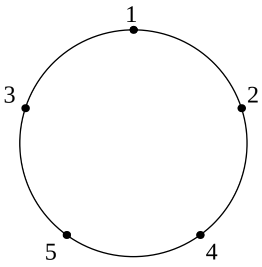
۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که مسأله معادل با این مسأله است که اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به‌ترتیبی دور دایره بچینیم که مجموع حاصل‌ضربهای اعداد مجاور بیشترین مقدار ممکن باشد.



فرض کنید که در حالت کلی اعداد ۱، ۲، ... و $n - ۱$ را به‌ترتیبی دور دایره چیده باشیم و بخواهیم n را اضافه کنیم. اگر $S_{n-۱}$ مجموع مورد نظر در وضعیت اول و S_n مجموع پس از اضافه کردن n بین عددهای i و j باشد آنگاه

$$S_n = S_{n-۱} - ij + ni + nj = S_{n-۱} - (n-i)(n-j) + n^۲$$

پس برای اینکه S_n بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید $(n-i)(n-j)$ کمترین مقدار ممکن را اختیار کند، پس i و j باید اعداد $n - ۱$ و $n - ۲$ باشند. یعنی در هر گام برای ماکزیمم شدن S_n باید n را بین $n - ۱$ و $n - ۲$ قرار دهیم.



پس آرایش نشان داده شده در شکل به‌دست می‌آید و می‌توانیم بنویسیم

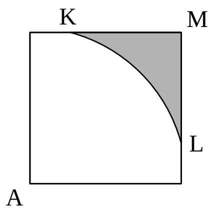
$$S_{۵} = ۲ + ۸ + ۲۰ + ۱۵ + ۳ = ۴۸$$

یادداشت. با استدلالی مشابه استدلال بالا می‌توان نشان داد که در حالت کلی، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$S_n = \frac{۲n^{۳} + ۳n^{۲} - ۱۱۸ + ۱۸}{۶}$$

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

روشن است که نقطه‌های A و B و C را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که در یک امتداد نباشند. اگر به مرکز A دایره‌ای به‌شعاع $r = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ رسم کنیم تا اضلاع مربع را در نقاط K و L قطع کند.



بنابر فرض چون $AB, AC \geq r$، پس B و C درون ناحیه‌ی سایه‌دار KLM قرار می‌گیرند. اما محاسبه‌ی ساده‌ای نشان می‌دهد که $KL = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$. پس $BC < KL = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ که با فرض $x > \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ تناقض دارد.

همچنین به‌سادگی می‌توان دید که در مثلث AKL داریم $x = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ و بنابراین، بزرگترین مقدار x همین عدد است.

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید p عددی اول باشد. نشان می‌دهیم که $f(p)$ نیز عددی اول است. در واقع اگر $q|f(p)$، آنگاه عددی مانند r وجود دارد که $q = f(r)$. پس $f(r)|f(p)$ و بنابراین، $r|p$. پس $r = p$. (توجه کنید که $r \neq ۱$ زیرا به آسانی می‌توان دید که $f(۱) = ۱$.) درنتیجه، $q = f(p)$ و بنابراین، $f(p)$ عددی اول است. همچنین اگر n عددی طبیعی باشد که $f(n)$ توانی از q باشد، آنگاه n توانی از p است، زیرا اگر r عامل اولی از n و مخالف p باشد، آنگاه $f(r)|f(n)$ و بنابراین $f(r) = q$ و درنتیجه، $r = p$ که تناقض است. حال توجه کنید که $p|p^{۲}|p^{۳}|\cdots$ و بنابراین، $q = f(p)|f(p^{۲})|f(p^{۳})|\cdots$. چون f پوشاست پس همه‌ی توانهای q در برد f قرار دارند. اما چنین اعضایی می‌توانند تنها از اثر f بر توانهای p به‌دست آیند. پس نتیجه می‌شود که $f(p^{i}) = q^{i}$. اکنون به آسانی می‌توان دید که اگر a و b دو عدد طبیعی

باشند که $(a,b) = ۱$ آنگاه $f(ab) = f(a)f(b)$. پس اگر $\Pi p_i^{\alpha_i}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد. آنگاه $f(n) = \Pi f(p_i)^{\alpha_i}$. ویژگی (ج) به آسانی از این حکم نتیجه می‌شود.

یادداشت. برای گزینه‌های دیگر، می‌توان به روش زیر مثال نقض ساخت. فرض کنید P مجموعه‌ی اعداد اول باشد و $\sigma : P \longrightarrow P$ یک جایگشت باشد، یعنی σ یک به یک و پوشا باشد. حال برای $n = \Pi p_i^{\alpha_i}$ تعریف کنید $f(n) = \Pi \sigma(p_i)^{\alpha_i}$.

اگر σ جایگشتی مخالف همانی باشد، (الف) و (ب) نادرست خواهند بود. همچنین با انتخاب $\sigma(۲) = ۵$ و $\sigma(۵) = ۲$ نتیجه می‌شود $f(۲) = ۵$ که مثال نقض (د) است. همچنین اگر σ طوری باشد که $\sigma \circ \sigma \neq ۱$، آنگاه تابع به‌دست آمده از σ، مثال نقض برای گزینه‌ی (ه) است.

۱۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $A_۰$، $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۱ و ۵۳ باشند که به پیمانه‌ی ۴ به‌ترتیب همنهشت با ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند. توجه کنید که

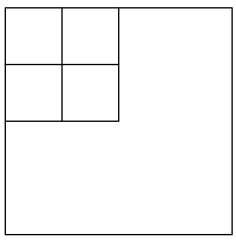
$$|A_۰| = |A_۲| = |A_۳| = ۱۳, \quad |A_۱| = ۱۴$$

اگر $S \subset \{۱, ۲, \ldots, ۵۳\}$ دارای خاصیت مورد نظر مسأله باشد، واضح است که

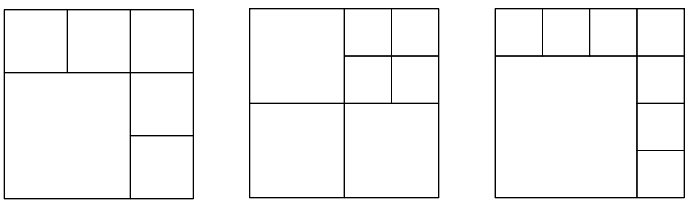
$$|S \cap A_۰| \leq ۷, \quad |S \cap A_۲| \leq ۷, \quad |S \cap A_۳| \leq ۷, \quad |S \cap A_۱| \leq ۷$$

زیرا از بین n و $n + ۴$ حداکثر یکی را می‌توان انتخاب کرد. پس $|S| \leq ۲۸$. به آسانی می‌توان مجموعه‌ی S با خاصیت مورد نظر را طوری ساخت که $|S| = ۲۸$.

۱۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است
توجه کنید که اگر بتوان از یک مربع n مربع برید، آن‌گاه می‌توان مطابق شکل، با چهار قسمت کردن یکی از مربعها، آن را به $n + ۳$ مربع نیز برید.



همچنین، مطابق شکلهای زیر، می‌توان یک مربع را به ۶ و ۷ یا ۸ مربع برید.



پس به‌ازای $n \geq ۶$، می‌توان هر مربع را به n مربع افراز کرد.

یادداشت. با کمی بحث، می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان یک مربع را به دو، سه یا پنج مربع افراز کرد.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که اگر اعداد فرد را حذف کنیم، اعداد باقی‌مانده دارای خاصیت مورد نظر مسأله هستند. برای آن که نشان دهیم باید حداقل ۱۰ عدد را حذف کرد، زوجهای مرتب $(1,2)$، $(3,20)$، $(4,19)$، ... و $(11,12)$ را درنظر بگیرید. چون مجموع مولفه‌ی اول و دوم هر یک از این زوجهای مرتب عددی اول است، پس از هر زوج باید حداقل یک مولفه‌اش حذف شود. پس چون ۱۰ زوج داریم، حذف حداقل ۱۰ عدد لازم است.

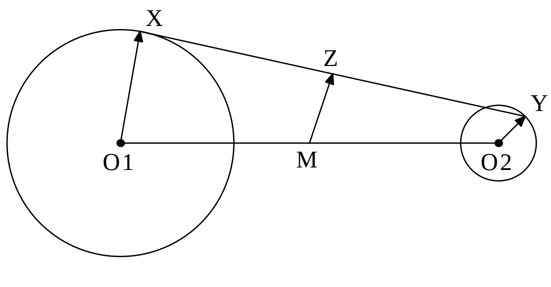
یادداشت. می‌توان ثابت کرد که اگر به‌جای ۲۰، عدد زوجی مانند $2k$ بگذاریم، باید حداقل k عدد را حذف کنیم تا مجموع هیچ دو عدد باقی مانده اول نباشد. این مطلب را به استقرا نشان می‌دهیم. فرض کنید p عددی اول بین $2k$ و $4k$ باشد. وجود چنین عدد اولی از قضیه‌ی چبیشف نتیجه می‌شود. اکنون زوجهای مرتب $(2k, p-2k)$، $(2k-1, p-2k+1)$، ... و $(\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2})$ را درنظر بگیرید. با استدلالی مشابه استدلال بالا باید حداقل به تعداد $2k - \frac{p-1}{2}$ از این اعداد حذف شوند. همچنین از بین اعداد ۱، ۲، ... و $p-2k-1$ نیز باید حداقل تعداد $\frac{p-2k-1}{2}$ حذف شوند (فرض استقرا). توجه کنید که این دو مجموعه از اعداد هیچ اشتراکی ندارند (این مطلب از این که $p < 4k$ نتیجه می‌شود). پس دست‌کم $2k - \frac{p-1}{2} + \frac{p-2k-1}{2} = k$ عدد باید حذف شوند.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که $A = 10^{81} - 1$. بنابراین، $A^2 = 10^{162} - 2 \times 10^{81} + 1$ پس نمایش ده‌دهی A^2 به‌صورت زیر است:

$$A^2 = \underbrace{99\ldots9}_{80}800\ldots01$$

پس مجموع رقمهای A^2 در پایه‌ی ۱۰ برابر $729 = 1 + 8 + 80 \times 9$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
با توجه به شکل فرض کنید O_1 مرکز دایره C_1 و O_2 مرکز دایره‌ی C_2 را نشان دهد. همچنین X را نقطه‌ای روی C_1 و Y را نقطه‌ای روی C_2 بگیرید. اگر Z وسط پاره‌خط XY و M وسط O_1O_2 را نشان دهد.



می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MZ} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY}) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1X} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2Y}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{O_1X} + \overrightarrow{O_2Y})
\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$\left|\overrightarrow{O_۱X}\right| = ۳$$

و

$$\left|\overrightarrow{O_۲Y}\right| = ۱$$

پس

$$۲ \leq \left|\overrightarrow{O_۱X} + \overrightarrow{O_۲Y}\right| \leq ۴$$

و بنابراین،

$$۱ \leq \left|\overrightarrow{MZ}\right| \leq ۲$$

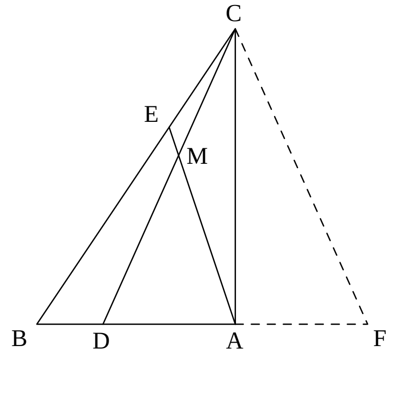
همچنین به آسانی می‌توان ثابت کرد که $\overrightarrow{MZ}$ می‌تواند هر برداری با طول دلخواه $۱ \leq r \leq ۲$ باشد. پس Z در ناحیه‌ای بین دو دایره به شعاعهای ۲ و ۱ و مرکز M تغییر می‌کند. پس مساحت مکان هندسی فوق برابر است با $\pi\left(۲^۳ - ۱\right) = ۳\pi$.

۲۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
ثابت می‌کنیم مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ خوب است. استدلال در بقیه‌ی موارد نیز مشابه است. دنباله‌ی مورد نظر را به طور استقرایی می‌سازیم. فرض کنید $a_۱ = ۲$ و اعداد $a_۱$، $a_۲$، . . . و a_n را ساخته‌ایم و m کوچکترین عدد طبیعی است که در این بین نیامده است. عدد طبیعی k را آن‌قدر بزرگ انتخاب کنید که عدد kma_n در این فهرست نیامده باشد. حال قرار دهید $a_{n+۱} = kma_n, a_{n+۲} = m$. روشن است که هر عدد طبیعی سرانجام در این دنباله خواهد آمد. همچنین توجه کنید که

$$\begin{aligned}(a_n, a_{n+۱}) &= (a_n, kma_n) &= a_n > ۱\\ (a_{n+۱}, a_{n+۲}) &= (kma_n, m) &= m > ۱\end{aligned}$$

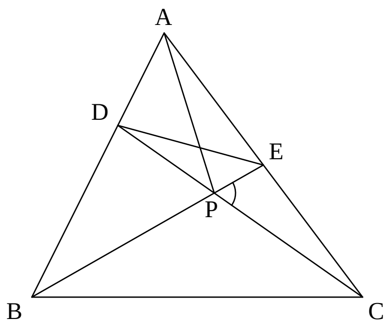
بنابراین مجموعه‌ی $\mathbb{N} - \{۱\}$ مجموعه‌ای خوب است.

۲۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.
از نقطه‌ی C خطی به موزات AE رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه‌ی F قطع کند. در مثلث BCF، چون $AE \| CF$ و $BE = ۲EC$ نتیجه می‌شود $AB = ۲AF$ و بنابراین، $DA = AF$.



۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $x = [DEP]$ و $y = [PBC]$. اگر زاویه‌ی $\angle DPE$ برابر α باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} xy &= [DEP] \cdot [PBC] \\ &= \tfrac{۱}{۴} PE \cdot DP \cdot PB \cdot PC \cdot \sin^{۲} \alpha \\ &= [PEC] \cdot [PDB] \\ &= ۸ \times ۳ \\ &= ۲۴ \end{aligned}$$



بنابر قضیه‌ی منلائوس در مثلث CAD،

$$\frac{BA}{BD} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = ۱$$

اما،

$$\frac{BA}{BD} = \frac{[AEB]}{[DEB]} = \frac{x + ۱۳}{x + ۸}, \quad \frac{PD}{PC} = \frac{[EPD]}{[EPC]} = \frac{x}{۳}$$

و

$$\frac{CE}{EA} = \frac{[DCE]}{[DEA]} = \frac{x + ۳}{۵}$$

بنابراین،

$$x(x + ۱۳)(x + ۳) = ۱۵(x + ۸)$$

معادله‌ی فوق دارای ریشه‌ی $x = ۲$ است. بنابراین، $y = ۱۲$ و مساحت مثلث برابر ۳۰ است.

۲۴. گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

با استفاده از الگوریتم اقلیدس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} d_n &= (a_n, b_n) \\ &= (n^۳ - ۵n^۲ + ۶n, n^۲ + ۵) \\ &= (n^۲ + ۵, n + ۲۵) \\ &= (n + ۲۵, ۶۳۰) \end{aligned}$$

پس $d_n \leq ۶۳۰$. چون $d_{۶۰۵} = ۶۳۰$، بنابراین، $\max\{d_n | n \in N\} = ۶۳۰$. همچنین بدیهی است که

$$d_{n+۶۳۰} = (n + ۶۳۰ + ۲۵, ۶۳۰) = (n + ۲۵, ۶۳۰) = d_n$$

و بنابراین، d_n متناوب است.

۲۵. این مسأله نادرست است.
فرض کنید $t = \frac{a}{b}$ که $(a, b) = ۱$. در این‌صورت

$$f(t) = ۳t^۳ + ۱۰t^۲ - ۳t = \frac{۳a^۳ + ۱۰a^۲b - ۳ab^۲}{b^۳}$$

اگر $f(t) \in \mathbb{Z}$، آنگاه $b|۳a^۳ + ۱۰a^۲b - ۳ab^۲$ و درنتیجه $b|۳a^۳$. اما چون $(b, a) = ۱$ پس $b|۳$. یعنی b یکی از اعداد ۱ یا ۳ خواهد بود. اگر $b = ۱$، آن‌گاه باید $۰ \leq a \leq ۷۷$ و ۷۸ انتخاب برای a وجود دارد.

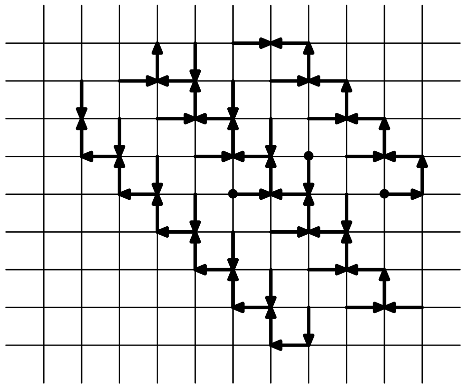
اگر $b = ۳$، نتیجه می‌شود که $۲۷|۳a^۳ + ۳۰a^۲ - ۲۷a$ و بنابراین $۹|a^۳ + ۱۰a^۲$ و چون $(a, ۳) = ۱$ پس $۹|a + ۱۰$. یعنی $a = ۹k - ۱$ که $k \in \mathbb{Z}$. پس از شرط $۰ \leq t \leq ۷۷$ نتیجه می‌شود

$$۰ \leq \frac{۹k - ۱}{۳} \leq ۷۷$$

و درنتیجه $۱ \leq k \leq ۲۵$. پس ۲۵ انتخاب برای k و بنابراین، برای a وجود دارد. بنابراین در مجموع ۱۰۳ انتخاب برای t وجود دارد که در بین گزینه‌ها وجود ندارد.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در شکل زیر مسیر حرکت یک نقطه مشخص شده است. توجه کنید که چون $۱۰ \overset{۴}{\equiv} ۲$، در صورت مسأله می‌توان به‌جای نقطه‌ی $(۰, ۱۰)$، از نقطه‌ی $(۰, ۲)$ استفاده کرد.



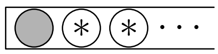
پس کافی است از نقطه‌ی $(۰,۲)$ شروع کنیم و ۱۰۰ گام به عقب برگردیم. اگر حرکت به چپ، راست، بالا و پایین را به‌ترتیب با L، R، U و D نشان دهیم، با کمی دقت می‌توان دید که برای بازگشت، فقط دو راه وجود دارد:

$$DRDR\dots DRDR, \qquad DRDR\dots DRDL$$

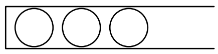
(در واقع اگر مسیر دیگری را انتخاب کنیم، پیش از ۱۰۰ گام، متوقف می‌شویم.)

۲۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید a_n تعداد روشهای چیدن n سکه در یک ردیف باشد که هیچ دو سکه‌ی مجاوری به رو نباشد. ادعا می‌کنیم که $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$. برای اثبات توجه کنید که اگر اولین سکه به پشت باشد، $n-۱$ سکه‌ی بعدی به $a_{n-۱}$ طریق می‌توانند چیده شوند.



اما اگر اولین سکه به رو گذاشته شود، سکه‌ی مجاور آن باید حتماً به پشت باشد و $n-۲$ سکه‌ی بعدی به $a_{n-۲}$ روش می‌توانند قرار بگیرند.



حال با توجه به اینکه $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$، به آسانی نتیجه می‌شود $a_{۱۰} = ۱۴۴$.

۲۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x^۲y^۲ + y^۲ - ۲۶x^۲ - ۱۳ = ۱۲۰۱ - ۱۳ = ۱۱۸۸$$

یا

$$\left(۲x^۲ + ۱\right)\left(y^۲ - ۱۳\right) = ۴ \times ۲۷ \times ۱۱$$

با توجه به این‌که $۲x^۲ + ۱$ عددی فرد است، این عدد، باید برابر با یکی از اعداد ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۱۱، ۳۳، ۹۹ یا ۲۹۷ باشد. اما از حل معادله‌ی $۲x^۲ + ۱ = a$ به‌ازای این مقادیر a، فقط جوابهای $x = ۱,۲,۴,۷$ به‌دست می‌آیند. اما به‌ازای این مقادیر x، معادله به‌صورت $y^۲ = ۴۰۹, ۱۴۵, ۴۹, ۲۵$ در می‌آید که فقط دو جواب آخر قابل‌قبول‌اند. پس معادله دارای دو جواب $(x,y) = (۴,۷)$ و $(x,y) = (۷,۵)$ است.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید که تابع f با شرایط داده شده وجود داشته باشد. ادعا می‌کنیم که $n|۳۰$. برای اثبات، توجه کنید که برای هر $x \neq ۱$، مدار x، یعنی مجموعه‌ی $\{x, f(x), f^۲(x), \dots\}$ مجموعه‌ای n عضوی است. همچنین اگر مدار x را با $O(x)$ نشان دهیم، هر دو مجموعه‌ی $O(x)$ و $O(y)$ یا مساوی و یا جدا از هم‌اند. زیرا اگر $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$ و مثلاً $z = f^i(x) = f^j(y)$، آنگاه چون تابع f یک‌به‌یک و پوشاست (این مطلب از شرط اول به‌سادگی نتیجه می‌شود)، پس اگر $i > j$ نتیجه می‌شود $f^{i-j}(x) = y$ و بنابراین، $y \in O(x)$. پس $O(y) = O(x)$. حال چون مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,۳۰\}$ به تعدادی مجموعه که تعداد اعضای هرکدام برابر n است افراز شده است، پس $n|۳۰$ و در بین گزینه‌ها، فقط گزینه (ج) در این شرط صدق می‌کند.

یادداشت. توجه کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n|۳۰$، چنین تابعی وجود دارد. کافی است f را چنین تعریف کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ (x + \frac{۳۰}{n}) \pmod{۳۰} & x \neq ۱ \end{cases}$$

به‌سادگی می‌توان این مسأله را برای حالتی که ۳۱ با عدد طبیعی دلخواهی عوض شده باشد، تعمیم داد.

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.
ابتدا همه‌ی زوجهای $(a_۱, a_۲)$، $(a_۲, a_۳)$، ... و $(a_{m-۱}, a_m)$ را درنظر بگیرید. با توجه به شرط دوم، این $m-۱$ زوج مرتب، دوبه‌دو متمایزند. اما چون $a_i \in \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$، پس حداکثر ۱۰۰ زوج مرتب به‌صورت $(a_i, a_{i+۱})$ وجود دارند. پس $m - ۱ \leq ۱۰۰$ و بنابراین، $m \leq ۱۰۱$. حال ثابت می‌کنیم که چنین دنباله‌ای به‌طول ۱۰۱ وجود دارد. برای اثبات، در حالت کلی ثابت می‌کنیم که اگر ۱۰ را با عدد طبیعی n جایگزین کنیم، دنباله‌ای به‌طول $n^۲ + ۱$ با شرایط مسأله وجود دارد و این دنباله دارای این شرط اضافی نیز هست که $a_۱ = a_{n^۲+۱} = ۱$. این مطلب را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = ۱$ دنباله‌ی ۱، ۱ در شرط مسأله صدق می‌کند. فرض کنید که برای عدد طبیعی n دنباله‌ی $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{n^۲+۱}$ را ساخته باشیم که $a_۱ = ۱$ و $a_{n^۲+۱} = ۱$. حال دنباله را به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$۱, n+۱, ۲, n+۱, \ldots, n-۱, n+۱, n, n+۱, n+۱, ۱$$

توجه کنید که $۲n + ۱$ جمله به دنباله‌ی قبلی افزوده‌ایم. به‌سادگی می‌توان دید که دنباله‌ی فوق دنباله‌ای به‌طول $(n+۱)^۲ + ۱$ است که جمله‌های اول و آخر آن برابر ۱ هستند و در شرایط مسأله نیز صدق می‌کند.