

# آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهرا ن اخباریفر

۱. اگر  $n \geq 2$  عددی طبیعی و  $2^n + n^2$  عددی اول باشد، باقیمانده‌ی  $n$  بر ۶ کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

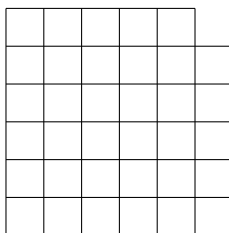
(الف) ۱ (ب) ۳ (ج) ۵ (د) الف و ب (ه) ب و ج

۲. در مثلث  $ABC$  ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  آن را در  $D$  قطع می‌کند و ارتفاع وارد بر ضلع  $CA$  نیز  $AD$  را در  $H$  قطع می‌کند. اگر  $AD = 4$ ،  $BD = 3$  و  $CD = 2$ ، آن‌گاه طول  $HD$  برابر است با:

(الف)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (ب)  $\frac{2}{3}$  (ج)  $\sqrt{5}$  (د)  $\frac{5}{4}$  (ه)  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

۳. در شکل زیر چند مربع وجود دارد؟

(الف) ۳۵ (ب) ۷۵ (ج) ۸۵ (د) ۱۰۵ (ه) ۲۰۵



۴. ۵ عدد میله‌ی آهنی به طولهای ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ داریم. با این میله‌ها به چند صورت می‌توان یک مثلث درست کرد؟

(الف) ۳ (ب) ۵ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰

۵.  $x$  و  $y$  دو عدد صحیح متوالی هستند. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد عبارت  $x^2 + y^2 + (xy)^2$  درست است؟

(الف) مجموعه‌ی رقمهای یکان آنها شامل مجموعه‌ی  $\{0, 1, 3, 5, 6, 9\}$  است.

(ب) همواره مربع کامل است.

(ج) به‌ازای مقادیری از  $x$  و  $y$ ، عددی اول است.

(د) همواره عددی مرکب است.

(ه) هیچ‌کدام

۶. دنباله‌ی  $a_n$  به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = na_n + a_n + n \end{cases}$$

# آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

باقیمانده‌ی تقسیم  $a_{101}$  بر  $102$  چند است؟

- (الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۹۹ (د) ۱۰۰ (ه) ۱۰۱

۷. طول اقطار دوزنقه‌های ۱۳ و ۱۵ و ارتفاع آن برابر ۱۲ است. مساحت این دوزنقه چقدر است؟  
(الف) ۵۶ (ب) ۷۲ (ج) ۸۴ (د) ۹۶ (ه) با این اطلاعات قابل محاسبه نیست.

۸. بزرگترین توان ۲ که عدد  $1 - 3^{512} = N$  بر آن بخش‌پذیر باشد، کدام است؟  
(الف)  $2^8$  (ب)  $2^9$  (ج)  $2^{10}$  (د)  $2^{11}$  (ه)  $2^{12}$

۹. اعداد طبیعی را مطابق الگوی زیر در یک جدول قرار داده‌ایم. مثلاً ۱۴ در سطر دوم و ستون چهارم آمده است. مکان عدد ۱۳۷۷ کدام است؟

- (الف) سطر ۲ ستون ۵۲ (ب) سطر ۵۲ ستون ۲ (ج) سطر ۲ ستون ۵۱  
(د) سطر ۵۱ ستون ۲ (ه) هیچ‌کدام

۱	۲	۶	۷	۱۵	
۳	۵	۸	۱۴		
۴	۹	۱۳			
۱۰	۱۲				
۱۱					

۱۰. چند عدد در مجموعه‌ی اعداد طبیعی  $\{1999, \dots, 1377\}$  وجود دارد که برابر تفاضل دو مجذور کامل هستند؟

- (الف) ۳۱۱ (ب) ۳۱۲ (ج) ۴۶۶ (د) ۴۶۷ (ه) ۶۲۳

۱۱. عددهای ۱، ۲، ... و ۱۳۷۷ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. هر بار دو تا از اعداد روی تخته را به دلخواه پاک می‌کنیم و قدر مطلق تفاضلشان را روی تخته می‌نویسیم، تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد عدد به‌دست آمده کامل‌تر است؟  
(الف) این عدد همواره مضربی از ۴ است.  
(ب) این عدد همواره فرد است.  
(ج) باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۴، مساوی یک است.  
(د) این عدد همواره زوج است.  
(ه) هیچ‌کدام

۱۲. در مثلث  $ABC$  یکی از میانه‌ها بر یکی از نیمسازهای درونی عمود است. اگر اندازه‌ی اضلاع این مثلث سه عدد صحیح متوالی باشند، آن‌گاه اندازه‌ی محیط این مثلث برابر است با:  
(الف) ۶ (ب) ۹ (ج) ۱۵ (د) ۱۸ (ه) ۲۱

۱۳. اگر  $a, b, c, d, e$  یک ترتیب دلخواه از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ باشد، در این صورت حداکثر مقدار عبارت  $S = ab + bc + cd + de + ea$  به‌ازای ترتیبهای مختلف چقدر است؟  
(الف) ۴۲ (ب) ۴۳ (ج) ۴۵ (د) ۴۸ (ه) ۵۰

۱۴. فرض کنید  $A, B$  و  $C$  سه نقطه در داخل یا روی اضلاع یک مربع به ضلع واحد باشند. اگر داشته باشیم  $x = \min\{AB, AC, BC\}$  (که در آن،  $\min$  کوچکترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد)، آنگاه

# آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

حداکثر مقدار  $x$ ، وقتی که  $A$ ،  $B$  و  $C$  داخل یا روی اضلاع مربع تغییر می‌کنند، چیست؟  
 الف)  $\frac{4}{5}$  (ب) ۱ (ج)  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$  (د)  $\sqrt{2}$  (ه)  $\frac{4}{3}$

۱۵.  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  تابعی است یک‌به‌یک و پوشا و به‌علاوه می‌دانیم که  $m$  بر  $n$  بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر  $f(m)$  بر  $f(n)$  بخش‌پذیر باشد. کدام گزینه در مورد هر تابع به این شکل درست است؟  
 الف)  $f(n)$  بر  $n$  بخش‌پذیر است.  
 ب) اگر  $p$  عددی اول باشد، آن‌گاه  $f(p) = p$   
 ج) برای هر  $a$  و  $b$  داریم:  $f(ab) = f(a)f(b)$   
 د)  $f(n) \leq n^2$   
 ه)  $f(f(n)) = n$

۱۶. از بین عددهای مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 53\}$  حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد که تفاضل هیچ دوتایی از آنها برابر با ۴ نباشد؟  
 الف) ۲۶ (ب) ۲۷ (ج) ۲۸ (د) ۲۹ (ه) ۳۰

۱۷. یک تکه مقوای مربع شکل را با فیچگی به  $n$  تا مربع کوچکتر (نه لزوماً مساوی) بریده‌ایم.  $n$  کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟  
 الف) ۱۱۲ (ب) ۱۷۲ (ج) ۲۲۲ (د) ۳۱۲  
 ه) همهی مقادیر الف، ب، ج، و د

۱۸. از میان عددهای  $1, 2, \dots, 20$  حداقل چند عدد را باید حذف کنیم به‌طوری که مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده، عددی اول نباشد.  
 الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

۱۹. فرض کنید  $A = \overbrace{99 \dots 99}^{81}$ . مجموع ارقام  $A^2$  در پایه‌ی ۱۰ چند است؟  
 الف) ۶۹۳ (ب) ۷۲۹ (ج) ۷۹۰ (د) ۸۳۷ (ه) ۹۳۶

۲۰.  $C_1$  و  $C_2$  دو دایره به شعاعهای ۳ و ۱ هستند که فاصله‌ی بین مرکزهای آنها برابر ۱۰ است. فرض کنید  $S$  مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی باشد که یک سر آن روی محیط  $C_1$  و سر دیگر آن روی محیط  $C_2$  است. مساحت  $S$  چقدر است؟  
 الف) ۰ (ب)  $3\pi$  (ج)  $4\pi$  (د)  $5\pi$  (ه)  $6\pi$

۲۱.  $A \subseteq \mathbb{N}$  را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بتوان اعضای آن را به‌صورت دنباله‌ی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  نوشت به‌طوری که هر دو جمله‌ی متوالی مثل  $a_i$  و  $a_{i+1}$  دارای مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ باشند. کدام یک از مجموعه‌های زیر خوب نیستند؟  
 الف) اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ (ب) اعداد فرد بزرگتر از ۱  
 ج) اعداد طبیعی به‌صورت  $3k + 2$  (د) اعداد مربع کامل بزرگتر از ۱  
 ه) هر چهار مجموعه، خوب هستند.

۲۲. در مثلث  $ABC$ ،  $D$  نقطه‌ی وسط  $AB$ ، و  $E$  نقطه‌ای روی  $BC$  است به‌طوری که  $BE = 2EC$ . فرض کنید  $\angle ADC = \angle BAE$ . زاویه‌ی  $\angle BAC$  چقدر است؟  
 الف) ۴۵ درجه (ب) ۶۰ درجه (ج) ۷۵ درجه (د) این زاویه به‌طور یکتا مشخص می‌شود ولی هیچ‌کدام از جوابهای بالا درست نیست.  
 ه) اطلاعات برای تعیین زاویه کافی نیست.

۲۳.  $ABC$  یک مثلث است.  $D$  نقطه‌ای روی  $AB$  و  $E$  نقطه‌ای روی  $AC$  است. تقاطع  $BE$  و  $CD$  را  $P$  می‌نامیم. اگر مساحت مثلثهای  $ADE$ ،  $BPD$ ،  $CEP$  به‌ترتیب ۵، ۸ و ۳ باشد، مساحت مثلث  $ABC$

# آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

چقدر است؟

- (الف) ۲۵ (ب) ۲۷ (ج) ۳۰ (د) ۳۲  
 (ه) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۲۴. فرض کنید  $a_n = n^3 - 5n^2 + 6n$ ،  $b_n = n^2 + 5$  و  $d_n$  برابر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک  $a_n$  و  $b_n$  است. کدام گزینه درست است؟ (max بزرگترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد.)  
 (الف)  $d_n$  متناوب است. (ب)  $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty$   
 (ج)  $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 630$  (د)  $d_n$  از جایی به بعد ثابت است.  
 (ه) الف و ج

۲۵. چند عدد گویای  $t$  وجود دارد که  $0 \leq t \leq 77$  و  $3t^2 + 10t^2 - 3t$  عددی صحیح باشد؟  
 (الف) ۷۸ (ب) ۸۶ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۰۴ (ه) ۲۳۲

۲۶. نقطه‌ی  $P$  روی نقاط صفحه‌ی  $xy$  با مختصات صحیح در حال حرکت است. به این صورت که اگر در نقطه‌ی  $(a, b)$  باشد با توجه به اینکه باقیمانده‌ی تقسیم  $a + b$  بر ۴، برابر ۰، ۱، ۲، یا ۳ است به ترتیب به راست، بالا، چپ، یا پایین می‌رود. فرض کنید  $P$  از  $P_0$  شروع به حرکت کرده و پس از ۱۰۰ حرکت به نقطه‌ی  $(0, 10)$  رسیده است. به ازای چه تعداد  $P_0$  چنین اتفاقی می‌افتد؟  
 (الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۲۷. می‌خواهیم ۱۰ عدد سکه را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه‌ی مجاوری به رو نباشند. به چند صورت این کار امکان‌پذیر است؟  
 (الف) ۱۰۰ (ب) ۱۲۱ (ج) ۱۴۴ (د) ۲۴۳ (ه) ۲۵۶

۲۸. چند دوتایی  $(x, y)$  از اعداد طبیعی در معادله‌ی  $26x^2 + 120y^2 = 2x^2y^2 + y^2$  صدق می‌کند؟  
 (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) این معادله جواب ندارد.

۲۹. به ازای کدام دسته از مقادیر  $n$ ، تابع  $f: \{1, \dots, 31\} \rightarrow \{1, \dots, 31\}$  وجود دارد که در هر دو شرط زیر صدق می‌کند:  

$$(f^i = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^i)$$

برای هر  $x \in \{1, \dots, 31\}$  داریم  $f^n(x) = x$  برای هر  $0 < i < n$  داریم  $x = 1$   
 (الف) مجموعه‌ی اعداد اول کمتر از ۳۱ (ب)  $\{2, 8, 16\}$   
 (ج)  $\{2, 3, 15\}$  (د)  $\{2k + 1 \mid k = 1, 2, \dots, 14\}$  (ه)  $\{3, 7, 13\}$

۳۰. بزرگترین  $m$  ای که دنباله‌ای مثل  $a_1, a_2, \dots, a_m$  با شرایط زیر وجود دارد، چند است؟  
 $a_i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  اگر  $a_i = a_j$  و  $a_{i+1} = a_{j+1}$  آنگاه  $j = i$   
 (الف) ۹۸ (ب) ۹۹ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۰۱ (ه) ۱۰۲