راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۶

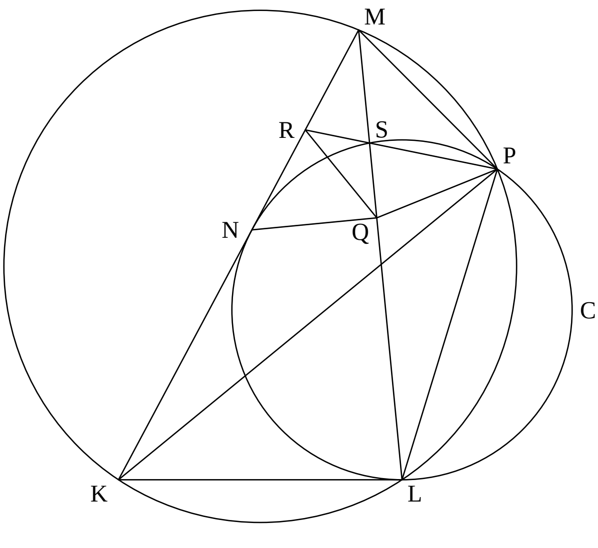
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. معادله هم ارز است با $3(x^2 - y^2) + (x - y) = y^2$ و یا

$$(x-y)(3(x-y)+6y+1) = y^2$$

قرار می‌دهیم $d = (x-y, 3(x-y)+6y+1)$. اگر $d > 1$، p را عدد اولی درنظر بگیرید که $p|d$. چون $p|x-y$، از رابطه‌ی قبل داریم $p|y^2$ و از آنجا $p|y$. درنتیجه $p|3(x-y)+6y$ و چون $p|d$، پس $p|3(x-y)+6y+1$. بنابراین، $p = 1$ که غیرممکن است. پس $d = 1$. در این صورت چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $3(x-y)+(6y+1)$ و $(x-y)$ برابر یک است و حاصل‌ضرب این دو عدد مربعی کامل است بنابراین هر دو مربع کامل‌اند و این حکم را ثابت می‌کند.

۲. فرض کنید S نقطه‌ی تقاطع دوم خط ML با دایره‌ی C و R نقطه‌ی تقاطع امتداد SP با MN باشد.



توجه کنید که

$$\angle KPL = \angle KLM = \angle LPS$$

و

$$\angle SPM = \angle LPK = \angle KML$$

بنابراین، دایره‌ی محیطی مثلث SMP بر KM در M مماس است. پس،

$$(RM)^۲ = RS \cdot RP = (RN)^۲$$

بنابراین، $RN = RM$؛ یعنی R وسط MN و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث MNQ است. در نتیجه،

$$\angle MPS = \angle SMR = \angle MQR$$

پس M، R، P و Q روی یک دایره قرار دارند و بنابراین،

$$\angle MPQ = \angle MPS + \angle RPQ = \angle KML + \angle KML = ۲\angle KML$$

۳. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حکم به‌ازای $n = ۲$ بدیهی است. فرض کنیم حکم به‌ازای عددهای طبیعی کوچکتر از n درست باشد.

درایه‌ی واقع در سطر a و ستون b جدول را با $A(a,b)$ نشان می‌دهیم. حال دنباله‌های $\{\alpha_i\}$ و $\{\beta_i\}$ از اعداد طبیعی با شرط $۱ \leq \alpha_i \leq n$ و $۱ \leq \beta_i \leq n$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A(\alpha_۱, \beta_۱) = -۱, \quad A(\alpha_i, \beta_i) = -۱, \quad A(\alpha_{i+۱}, \beta_i) = ۱$$

(چون در هر سطر و هر ستون فقط یک عدد ۱ و یک عدد ۱- وجود دارد α_iها و β_iها به طور یکتا تعریف می‌شوند) اما چون عضوهای دنباله‌ی $\{\alpha_i\}$ فقط n مقدار متمایز را می‌توانند اختیار کنند، عددهای طبیعی k و e به‌طوری $e < k$ وجود دارند که $\alpha_k = \alpha_e$. در این‌صورت، از

$$A(\alpha_k, \beta_{k-۱}) = A(\alpha_e, \beta_{e-۱}) = ۱$$

نتیجه می‌شود $\beta_{k-۱} = \beta_{e-۱}$ و سپس از

$$A(\alpha_{k-۱}, \beta_{k-۱}) = A(\alpha_{e-۱}, \beta_{e-۱}) = ۱$$

نتیجه می‌شود $\alpha_{k-۱} = \beta_{e-۱}$ و به همین ترتیب می‌توانیم ادامه دهیم و ثابت کنیم $\alpha_۱ = \alpha_{k-e+۱}$ و $\beta_۱ = \beta_{k-e+۱}$.

حال اگر $k - e < n$ حکم با استقرا درست است.

اگر $k - e = n$ آنگاه $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n$ و $\beta_۱, \ldots, \beta_n$ جایگشتی از شماره‌ی سطرها و ستونهای جدول‌اند. پس کافی است سطرهای جدول را طوری جابه‌جا کنیم که دنباله‌ی $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n$ به دنباله‌ی $\alpha_۱, \alpha_n, \alpha_{n-۱}, \ldots, \alpha_۲$ تبدیل شود و سپس ستونهای جدول را طوری جابه‌جا کنیم که دنباله‌ی $\beta_۱, \ldots, \beta_n$ به دنباله‌ی $\beta_n, \beta_{n-۱}, \ldots, \beta_۱$ تبدیل شود.

۴. توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{۴} {x_i}^۳ \quad &= \quad \tfrac{۱}{۳}\left({x_۱}^۳ + {x_۲}^۳ + {x_۳}^۳\right) + \tfrac{۱}{۳}\left({x_۱}^۳ + {x_۲}^۳ + {x_۴}^۳\right) \\ &\quad + \tfrac{۱}{۳}\left({x_۱}^۳ + {x_۳}^۳ + {x_۴}^۳\right) + \tfrac{۱}{۳}\left({x_۲}^۳ + {x_۳}^۳ + {x_۴}^۳\right)\end{aligned}$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی

$$\frac{{x_۱}^۳ + {x_۲}^۳ + {x_۳}^۳}{۳} \geq \sqrt[۳]{{x_۱}^۳ {x_۲}^۳ {x_۳}^۳} = \frac{۱}{x_۴}.$$

به‌همین ترتیب با اعمال این نامساوی بر جمله‌های دیگر مجموع $\sum_{i=۱}^{۴} x_i^۳$، نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=۱}^{۴} {x_i}^۳ \ge \sum_{i=۱}^{۴} \frac{۱}{x_i}$$

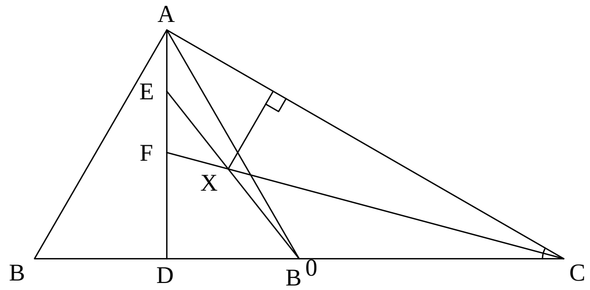
برای اثبات قسمت دیگر، با توجه به نامساوی توانی می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{۴} {x_i}^۳ \ge \left(\frac{\sum_{i=۱}^{۴} x_i}{۴}\right)^۳.$$

که هم ارز است با $\sum {x_i}^۳ \ge \frac{۱}{۱۶}\left(\sum x_i\right)^۳$. پس کافی است ثابت کنیم $(\sum_{i=۱}^{۴} x_i)^۳ \ge ۱۶\sum_{i=۱}^{۴} x_i$. چون $\sum_{i=۱}^{۴} x_i > ۰$ پس باید ثابت کنیم $\sum_{i=۱}^{۴} x_i \ge ۴$ و این نیز با توجه به نامساوی حسابی ـ هندسی و تساوی $\Pi_{i=۱}^{۴} x_i = ۱$ روشن است.

۵. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد، مثلاً $AB < AC$. در این‌صورت $BD < CD$. پس اگر B' قرینه‌ی B نسبت به D باشد، B' بین D و C خواهد بود.

نقطه‌ی E نمی‌تواند بین F و D باشد زیرا در این‌صورت نتیجه می‌شود $B'E < CE \le CF$



و چون $BE = B'E$ می‌توان نتیجه گرفت $BE < CF$ است که خلاف فرض است. پس E بین A و F است. درنتیجه دو پاره‌خط EB' و FC یکدیگر را در نقطه‌ای مانند X قطع می‌کنند. X روی نیمساز $\angle C$ است. پس X از AC و DC به یک فاصله است. ضمناً X روی نیمساز $\angle AB'D$ قرار دارد. پس از AB' و DC نیز به یک فاصله است. ولی این ناممکن است زیرا اگر از X به AC عمود کنیم، خط عمود خارج شده از X قبل از برخورد با AC، AB' را قطع می‌کند. پس فاصله‌ی X تا AC بیشتر از فاصله‌ی X تا AB' است. ولی بنابر استدلال بالا این دو فاصله باید برابر باشند.

۶. روشن است که b عددی زوج است. اگر $b = ۲c$ آنگاه $p = \frac{c}{۲}\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$ یعنی $\frac{۴p^۲}{c^۲} = \frac{a-c}{a+c}$. قرار می‌دهیم $\frac{۴p^۲}{c^۲} = \frac{m^۲}{n^۲}$ که $(m,n) = ۱$. حال اگر $(a-c, a+c) = k$ آنگاه خواهیم داشت $a+c = km^۲$ و $a-c = kn^۲$. پس $۲c = k(n^۲ - m^۲)$ و چون داشتیم $۲p = \frac{cm}{n}$، نتیجه می‌شود $۴p = \frac{k(n^۲-m^۲)m}{n}$.

حال m و n یا هر دو فردند یا فقط یکی از آنها فرد است. اگر m و n هر دو فرد باشند آنگاه $۸|n^۲ - m^۲$. پس $۸|۴p$. پس $p = ۲$. اگر m و n دارای زوجیت متفاوت باشند از رابطه‌ی $۲c = k(n^۲ - m^۲)$ نتیجه می‌شود که k زوج است. پس $k = ۲r$. و چون $(n^۲ - m^۲, n) = ۱$ نتیجه می‌شود $n|k$. پس

$r = ns$. بنابراین، $۲p = s(n-m)(n+m)m$. اما $۲p$ فقط به دو شکل به‌صورت حاصل‌ضرب چهار عدد صحیح نوشته می‌شود (ترتیب را درنظر نمی‌گیریم)

$$۲p = ۲p \times ۱ \times ۱ \times ۱, \quad ۲p = p \times ۲ \times ۱ \times ۱$$

حال اگر

$$(n-m)(n+m)m = ۲p \times ۱ \times ۱ \times ۱$$

آنگاه چون $n+m > m$ پس $n+m = ۲p$ بنابراین، $n+m = ۲p$، $m = ۱$ و $n-m = ۱$. پس $n+m = ۳ \neq ۲p$. در نتیجه، در این حالت نمی‌توانیم داشته باشیم $n+m = ۲$ زیرا در این‌صورت نتیجه می‌شود $n = m = ۱$ و $n-m = ۰$ که ناممکن است. پس $n+m = p$. اگر $m = ۲$ و $n-m = ۱$ آنگاه $p = ۵$ و اگر $m = ۱$ و $n-m = ۱$ نتیجه می‌شود $p = ۳$ و به‌ازای $n-m = ۲$ نتیجه می‌شود $p = ۴$ که ممکن نیست. پس $p = ۵$ بزرگترین مقدار p است.