راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=d$$

که در آن a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند و $a<b<c$. چون

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$$

بنابراین $d=1$.
ادعا می‌کنیم که $a=2$. توجه کنید که $a\neq 1$ و اگر $a\geq 3$، آنگاه،

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$$

که ناممکن است. پس $a=2$ و بنابراین،

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

و $b\geq 3$.
ادعا می‌کنیم $b=3$. توجه کنید که اگر $b\geq 4$، آنگاه

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$$

پس $b=3$ و درنتیجه، $c=6$ به‌طور یکتا به‌دست می‌آید. پس تنها جواب مسأله $a=2$، $b=3$، $c=6$ و $d=1$ است.

۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
چون $\angle CDE=\angle CBE$، بنابراین چهار نقطه‌ی E، D، B و C روی یک دایره قرار دارند. پس بنابر تعریف قوت نقطه، $AB\cdot AC=AD\cdot AE$ و بنابراین،

$$a(a+b)=c(c+d)$$

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
فرض کنید $|A| \geq ۵$. در این‌صورت اگر A از هر رده‌ی مانده‌های به پیمانه‌ی ۳ دست‌کم یک عضو داشته باشد، مجموع این سه عضو بر ۳ بخش‌پذیر است. پس A دست‌کم از یکی از رده‌های مانده‌های به پیمانه‌ی ۳ عضوی ندارد. در این‌صورت، بنابر اصل لانه‌کبوتری، عددی مانند r وجود دارد که $۰ \leq r \leq ۲$ و n دارای سه عضو متمایز مانند $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ است که

$$x_i \overset{۳}{\equiv} r, \quad ۱ \leq i \leq ۳$$

اما در این‌صورت $۳|x_۱+x_۲+x_۳$. پس $|A| \leq ۴$. مثال $A = \{۱,۲,۴,۵\}$ نشان می‌دهد که $|A| = ۴$ امکان‌پذیر است.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید N عددی با ویژگی مورد نظر باشد. چون مجموع ارقام N برابر ۲ است پس یا $N = ۲$ یا N دارای دو رقم ۱ است و بقیه‌ی ارقام آن صفرند. اما چون N اول است ، رقم آخر آن باید ۱ باشد. پس n باید به شکل

$$N = ۱\underbrace{۰۰\ldots۰}_{n \text{تا}}۱ = ۱۰^n + ۱$$

باشد و چون $N < ۱۳۷۶$، پس $n < ۴$. به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ عددهای ۱۱ و ۱۰۱ به‌دست می‌آیند که اول‌اند. اما به‌ازای $n = ۳$ عدد ۱۰۰۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
چون $x^y + 1 = (x+1)^2$، پس $x^y = x^۲ + ۲x$. درنتیجه، $x^{y-۱} = x + ۲$. اگر $y = ۱$، نتیجه می‌شود $x + ۲ = ۱$ که غیرممکن است. پس $y \geq ۲$. بنابراین، $x|x^{y-۱}$ و چون $x|x$ پس $x|۲$. بنابراین، $x = ۱$ یا $x = ۲$. اگر $x = ۱$، به رابطه‌ی $۱ + ۲ = ۱$ می‌رسیم که تناقض است. اگر $x = ۲$ نتیجه می‌شود $y = ۳$. پس تنها جواب مسأله $(x, y) = (۲, ۳)$ است.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو جواب معادله باشند، آنگاه، $b = x_۱x_۲$ و $a = -(x_۱ + x_۲)$. پس اگر $x_۱x_۲$ فرد باشند، a زوج و b فرد خواهد بود و اگر یکی از $x_۱$ و $x_۲$ فرد و دیگری زوج باشد، a فرد و b زوج خواهد بود. پس عبارتهای ۲ و ۴ صحیح هستند.

۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
به آسانی می‌توان دید که $n = ۳$ و $n = ۴$ جوابهای معادله‌ی $n! + ۳ = ۳^{n-۱}$ هستند اما $n = ۱$، $n = ۲$ و $n = ۵$ جواب این معادله نیستند. به‌ازای $n \geq ۶$، $n!$ بر ۹ بخش‌پذیر است ولی $۳^{n-۱} - ۳$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
چون $BD = BA + AC$، پس $AD = AC$ و درنتیجه زاویه‌های $\angle ACD$ و $\angle ADC$ برابرند. بنابراین،

$$\angle ADC = \frac{۱}{۲}(\angle ADC + \angle ACD) = \frac{۱}{۲}\angle A = ۲۲/۵^\circ$$

فرض کنید L نقطه‌ی تقاطع CK با DM باشد. اگر مساحت شکل $\triangle$ را با$[\triangle]$ نشان دهیم، از $[BDM] = [BCK]$ نتیجه می‌شود

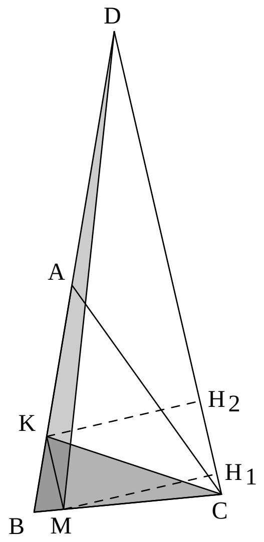
$$[MLC] = [KLD]$$

پس، $[MCD] = [KCD]$ و بنابراین، اگر $H_۱$ و $H_۲$ به‌ترتیب پاهای عمودهای رسم شده از M و K بر CD باشند،

$$CD \cdot MH_۱ = CD \cdot KH_۲$$

درنتیجه، $MH_۱ = KH_۲$. یعنی KM و CD موازی‌اند بنابراین،

$$\angle BKM = \angle BDC = \angle ADC = ۲۲/۵^\circ$$



۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.
شرط $f(f(x)) = f(x)$ هم ارز آن است که اگر y در برد تابع f قرار داشته باشد، آنگاه $f(y) = y$.
اگر برد f را با R_f نشان دهیم، سه حالت خواهیم داشت:

الف) $|R_f| = ۲$. در این حالت f روی R_f همانی است و به‌ازای تنها عضو خارج از R_f باید مقدار f را برابر با عضوی در R_f تعریف کنیم. پس دو امکان برای f وجود دارد و چون $\binom{۳}{۲} = ۳$ امکان برای R_f وجود دارد پس ۳×۲ امکان در این حالت وجود دارد.

ب) $|R_f| = ۳$. در این حالت $R_f = A$ و f روی A همانی است و بنابراین تنها ۱ انتخاب وجود دارد.

ج) $|R_f| = ۱$. در این حالت f تابعی ثابت است و بنابراین، ۳ انتخاب برای f وجود دارد.

پس جمعاً $۱ + ۳ + ۶$ یعنی ۱۰ انتخاب برای تابع f وجود دارد.

۱۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اگر S مساحت مثلث ABC باشد، چون $h_a = h_b + h_c$، نتیجه می‌شود

$$\frac{۲S}{a} = \frac{۲S}{b} + \frac{۲S}{c}$$

و درنتیجه، $bc = ab + ac$. بنابراین

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ - ۲ab - ۲ac + ۲bc = (a - b - c)^۲$$

پس $a^۲ + b^۲ + c^۲$ مربع کامل است.

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که

$$\left(10^{1376} - \frac{1}{2}\right)^2 < a < \left(10^{1376}\right)^2$$

بنابراین،

$$2 \times 10^{1376} - 1 < 2\sqrt{a} < 2 \times 10^{1376}$$

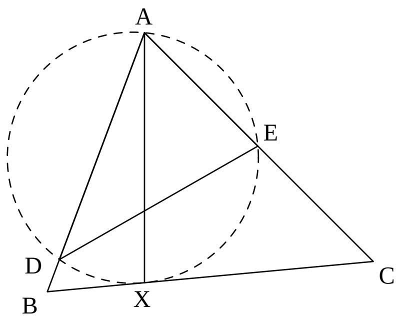
و درنتیجه،

$$[2\sqrt{a}\,] = 2 \times 10^{1376} - 1$$

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ADE را R بنامیم، می‌توانیم بنویسیم

$$DE = 2R\sin A$$

پس DE وقتی مینیمم می‌شود که R مینیمم شود (چون $\sin A$ ثابت است).



اما چون $h_a \leq AX \leq 2R$ (h_a ارتفاع وارد بر ضلع BC است)، پس R وقتی مینیمم می‌شود که $2R = h_a$ یعنی AX ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد.

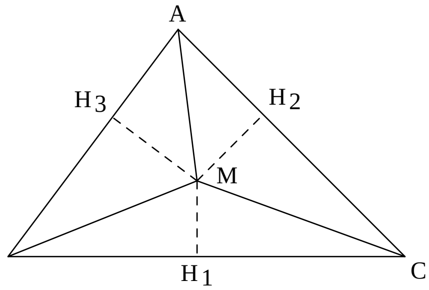
۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.
به هر مهره‌ی سفید، یک مهره‌ی سیاه می‌چسبانیم؛ حال ۵ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره سفید_ سیاه داریم که می‌خواهیم در یک ردیف آنها را از چپ به راست بچینیم. هر روش چیدن این مهره‌ها دقیقاً متناظر است با یک روش چیدن مهره‌ها که پس از هر سفید، دست‌کم یک سیاه قرار داشته باشد. پس تعداد حالتها برابر است با $N = \frac{10!}{5!\times 5!} = 252$.

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
ادعا می‌کنیم که هر عدد خوب زوج لزوماً توانی از ۲ است. فرض کنید n یک عددی خوب و زوج باشد و فرض کنید $n = 2^k m$ که در آن $k \geq 1$ و m عددی فرد است. اگر n توانی از ۲ نباشد، $m > 1$ و بنابراین، $(m,n) = m > 1$ پس $m \in A$. همچنین $2^k \in A_n$. اما

$$(2^k + m, n) = (2^k + m, 2^k m) = (2^k + m, m) = (2^k, m) = 1$$

عدد $2^k + m$ در A_n نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض $m > 1$ نادرست است. همچنین به آسانی می‌توان ثابت کرد که هر توان ۲ عددی خوب است. اکنون باید تعداد توانهای ۲ را بشماریم که از ۱۳۷۶ کوچکترند. اگر $2^n < 1376$، نتیجه می‌شود $n \leq 10$. پس ۱۰ عدد خوب زوج کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد.

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.
قرار می‌دهیم $a = BC$، $b = AC$ و $c = AB$، و مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم.



در این‌صورت،

$$[MBC] \cdot [MAC] \cdot [MAB] = \frac{۱}{۸} abc \cdot MH_۱ \cdot MH_۲ \cdot MH_۳$$

و چون a، b و c ثابت‌اند، حاصل‌ضرب $MH_۱ \cdot MH_۲ \cdot MH_۳$ وقتی ماکزیمم است که $[MBC] \cdot [MAC] \cdot [MAB]$ ماکزیمم باشد. اما چون $[MBC] + [MAC] + [MAB] = [ABC]$ مقداری ثابت است، پس حاصل‌ضرب بالا وقتی ماکزیمم است که

$$[MBC] = [MAC] = [MAB] = \frac{[ABC]}{۳}$$

پس M باید مرکز ثقل مثلث باشد.

۱۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید $x = dx'$ و $y = dy'$ که $(x', y') = ۱$. پس $x' + y' + ۲\sqrt{x'y'} = \frac{۱۳۷۶}{d}$ و چون $\sqrt{x'y'}$ صحیح است و x', y' نسبت به هم اول‌اند پس x' و y' هر دو مربع کامل هستند. فرض کنید $x' = u^۲$ و $y' = v^۲$ پس $(u+v)^۲ = \frac{۱۳۷۶}{d}$ و با توجه به $۱۳۷۶ = ۲^۵ \times ۴۳$ داریم $\frac{۱۳۷۶}{d} = ۴, ۱۶$ و از آنجا جوابهای $(u, v) = (۱, ۱)$ و $(u, v) = (1, 3)$ به‌دست می‌آیند که متناظر با $(x, y) = (۱۰۴, ۱۰۴)$ و $(x, y) = (۲۶, ۷۸)$ هستند.

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که f تابعی یک به یک است. در واقع، اگر $f(m) = f(n)$ آنگاه $ff(m) = ff(n)$. پس $۲m + ۳ = ۲n + ۳$ و درنتیجه، $m = n$. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$f(۰) + ff(۰) = ۳$$

اگر $f(۰) = ۰$، نتیجه می‌شود $۳ = f(۰) + f(f(۰)) = ۰$ که تناقض است. پس همین طور اگر $f(۰) = ۳$، نتیجه می‌شود $۳ + f(۳) = ۳$ و بنابراین، $f(۳) = ۰$. پس

$$۹ = f(۳) + f(f(۳)) = ۰ + ۳ = ۳$$

که باز هم تناقض است. پس $f(۰) = ۱$ یا $f(۰) = ۲$. اگر $f(۰) = ۲$، نتیجه می‌شود $۲ + f(۲) = ۳$ و بنابراین، $f(۲) = ۱$. پس $f(۱) + f(۲) = ۹$ و درنتیجه، $f(۱) = ۸$. اما $f(۱) \le f(۱) +$

$f(f(1)) = 5$. پس نتیجه می‌گیریم $f(0) = 1$. اکنون به استقرا ثابت می‌کنیم که $f(n) = n + 1$. حکم به‌ازای $n = 0$ صحیح است. اگر تساوی به‌ازای n برقرار باشد، آنگاه

$$f(n+1) = 2n + 3 - f(n) = 2n + 3 - (n+1) = n + 2$$

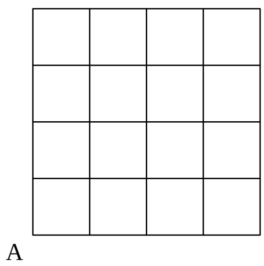
پس تنها یک تابع در این معادله صدق می‌کند.

۱۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
هیچ عدد سه رقمی با این خاصیت وجود ندارد. در واقع اگر $b^2 - 4ac = 9$، چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ روی مجموعه‌ی اعداد صحیح به‌صورت $(px + q)(rx + s)$ تجزیه می‌شود. بنابراین،

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = (10p + q)(10r + s)$$

عددی مرکب خواهد بود.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که بیش از ۵ نقطه با این خاصیت نمی‌تواند وجود داشته باشد،



چون ۶ نقطه $\binom{6}{2} = 15$ فاصله به‌وجود می‌آورند و به سادگی می‌توان دید که در شکل بالا دقیقاً ۱۴ فاصله‌ی ناصفر متمایز وجود دارد.

شکل بالا ۵ نقطه را نشان می‌دهد که تمام فاصله‌ها در آن متمایزند.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
ادعا می‌کنیم که اگر $x \geq 1$، آنگاه $f(x) \geq 2$. در واقع اگر $f(x) = 1$، آنگاه

$$f(x^2) = f(x) + f(x) - 1 = 1$$

و به‌همین ترتیب، $f(x^4) = f(x^8) = \cdots = 1$. پس به‌ازای تعدادی نامتناهی عدد طبیعی مانند y، $f(y) = 1$ که با فرض (۲) مسأله تناقض دارد. از سوی دیگر از شرط (۳) نتیجه می‌شود

$$f(30) = f(15) + f(2) - 1 = f(3) + f(5) + f(2) = 6$$

اما چون $f(2), f(3), f(5) \geq 2$ و مجموع آنها برابر ۶ است، پس $f(2) = f(3) = f(5) = 2$.

۲۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید که همه‌ی زیرمجموعه‌های ۴، ۵ و ۶ عضوی را انتخاب کنیم. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$$

و روشن است که هر دو تای آنها دست‌کم در ۲ عضو مشترک‌اند.

حال ادعا می‌کنیم که بیش از ۲۲ مجموعه نمی‌توان انتخاب کرد. اولاً در مجموعه‌های انتخاب شده $\emptyset$ و مجموعه‌های تک‌عضوی نمی‌توانند وجود داشته باشند. همچنین اگر مجموعه‌ای دوعضوی مثل $\{۱,۲\}$ در این زیرمجموعه‌ها باشد، بقیه باید همه شامل این زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی باشند و بنابراین، تعداد کل مجموعه‌ها حداکثر $۱۶ = ۲^۴$ خواهد بود. همچنین اگر مجموعه‌ای سه‌عضوی مثل $\{۱,۲,۳\}$ بین زیرمجموعه‌ها باشد، باز هم با استدلالی مشابه استدلال قبل می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان به بیش از ۲۲ مجموعه رسید.

۲۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که $n = ۲$ عددی جالب است چون $d(d(d(۲))) = d(d(۲)) = ۲$ ولی $n^۳ = ۸$ جالب نیست چون $d(d(۸)) = d(۴) = ۳$، ولی $d(۳) = ۲ \neq ۳$.

۲۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
عمل $*$ را روی اعداد حقیقی چنین تعریف کنید:

$$x * y = x + y + xy$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که $*$ عملی جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است. بنابراین اعداد $a_۱$، ... و a_n را به هر شکل و با هر ترتیب که با عمل $*$ ترکیب کنیم نتیجه‌ی نهایی به‌ترتیب انجام این کار بستگی ندارد و A به‌طور منحصر به‌فرد توسط $a_۱$، ... و a_n مشخص می‌شود.

۲۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
روشن است که لامپ شماره‌ی m به تعداد مقسوم‌علیه‌های m تغییر وضعیت می‌دهد. بنابراین چون در ابتدا همه‌ی لامپها خاموش بوده‌اند، در پایان لامپهایی روشن خواهند بود که تعداد مقسوم‌علیه‌های آنها عددی فرد باشد. اما اگر

$$m = p_۱^{\alpha_۱} \dots p_s^{\alpha_s}$$

تجزیه‌ی m به عوامل اول باشد، در این‌صورت تعداد شمارنده‌های m برابر است با $d(m) = (\alpha_۱ + ۱) \cdots (\alpha_s + ۱)$ و $d(m)$ فقط وقتی فرد خواهد بود که هر α_i زوج باشد، یعنی m مربع کامل باشد. پس تعداد لامپهای روشن برابر تعداد مربعهای کامل کوچکتر از ۱۳۷۶ است. اگر $m^۲ < ۱۳۷۶$ نتیجه می‌شود $m \leq ۳۷$.

۲۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که با انتخاب اعداد ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۲۰ و ۲۳ از ستونهای اول تا پنجم به عدد ۲۰ می‌رسیم. برای آنکه ثابت کنیم a نمی تواند از ۲۰ بزرگتر باشد، توجه کنید که از مربع ۳×۳ وسط باید دست‌کم یک عدد انتخاب شود و بزرگترین عدد در این مربع نیز ۲۰ است.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که زیرمجموعه‌ی $S = \{۵۰۱, ۵۰۲, \dots, ۱۰۰۱\}$، که ۵۰۱ عضو دارد، در شرط مسأله صدق می‌کند. اگر $|S| > ۵۰۱$، فرض کنید که t بزرگترین عضو S باشد. زوجهای

$$(۱, t-۱), (۲, t-۲), \dots, \left(\left\lfloor \frac{t}{۲} \right\rfloor, \left\lceil \frac{t}{۲} \right\rceil\right)$$

$\lfloor \frac{t}{۲} \rfloor$ زوج مرتب‌اند که مجموع مو□لفه‌ی اول و دوم هر یک از آنها برابر t است. بنابراین از هر زوج مرتب حداکثر یک مو□لفه‌ی آن می‌تواند در S باشد. چون همه‌ی اعداد ۱، ۲، ...، $t - ۱$ در مو□لفه‌های این $\lfloor \frac{t}{۲} \rfloor$ زوج مرتب ظاهر شده‌اند، بنابراین $|S| \leq \lfloor \frac{t}{۲} \rfloor$. از فرض $|S| > ۵۰۱$ نتیجه می‌شود $\lfloor \frac{t}{۲} \rfloor \geq ۵۰۲$ و بنابراین $t \geq ۱۰۰۴$ که تناقض است.

۲۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم که n و $f(n)$ همواره باقیمانده‌ی مساوی در تقسیم بر عدد ۹ دارند. یعنی $n \overset{۹}{\equiv} f(n)$. اما،

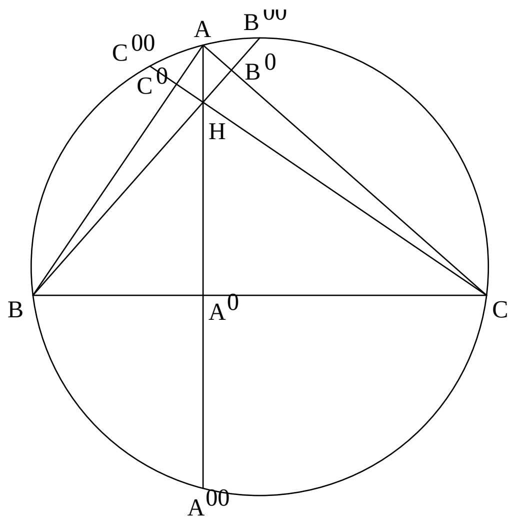
$$\begin{aligned}(۱۳)^{۷۶} &\overset{۹}{\equiv} ۴^{۷۶} \overset{۹}{\equiv} (۴^{۲})^{۳۸}\\ &\overset{۹}{\equiv} (-۲)^{۳۸} \overset{۹}{\equiv} (۲^{۳})^{۱۲} \times ۲^{۲}\\ &\overset{۹}{\equiv} (-۱)^{۱۲} \times ۴ \overset{۹}{\equiv} ۴\end{aligned}$$

پس اگر $k = f(f \cdots f(n_{۰}))) \cdots)$، آنگاه $k \overset{۹}{\equiv} ۴$.

اکنون توجه کنید که چون برای هر عدد مانند n که دست‌کم دو رقم داشته باشد، $f(n) < n$، در دنباله‌ی داده شده اعداد مرتباً کوچک می‌شوند تا به یک عدد یک رقمی برسیم این عدد یک رقمی لزوماً ۴ خواهد بود.

۲۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

نقطه‌ی تلاقی ارتفاعها را H می‌نامیم.



می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{AA''}{AA'} = ۱ + \frac{A'A''}{AA'} = ۱ + \frac{HA'}{AA'} = ۱ + \frac{HA' \cdot BC}{AA' \cdot BC}$$

$\frac{BB''}{BB'}$ و $\frac{CC''}{CC'}$ را به‌همین ترتیب ساده می‌کنیم. اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} &= ۳ + \frac{[BHC]+[AHC]+[AHB]}{[ABC]}\\ &= ۳ + \frac{[ABC]}{[ABC]}\\ &= ۴\end{aligned}$$

۲۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که اگر m و k عددهایی طبیعی باشند، $۵^m + ۵^k \overset{۴}{\equiv} ۲$. اما هیچ عدد مربع کامل به‌صورت $۴r + ۲$ وجود ندارد. گزینه‌های (ب)، (ج) و (د) نیز با همنهشتی به پیمانه‌های ۳ ، ۵ و ۶ و دقت به این نکته که هیچ مربع کاملی به پیمانه‌ی این اعداد همنهشت با ۲ نیست رد می‌شوند.

۳۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

از نابرابری کوشی‌ـ شوارتز نتیجه می‌شود،

$$\left(\frac{۱}{a_۱} + \cdots + \frac{۱}{a_{۱۳۷۶}}\right)(a_۱ + \cdots + a_{۱۳۷۶}) \geq ۱۳۷۶^۲$$

و اگر معادله جواب داشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت $1376 \geq 1376^2$ که تناقض است. پس این معادله جواب ندارد.